

国际机械工程先进技术译丛



# 机器人手册

# Springer Handbook of Robotics


（意）Bruno Siciliano
（美）Oussama Khatib 编辑
《机器人手册》翻译委员会 译


原版书荣获 The AAP PROSE Award for Excellence in Physical Sciences & Mathematics
The AAP PROSE Award for Engineering & Technology

原书编者获得三项IEEE殊荣：

Bruno Siciliano 教授荣获 The IEEE RAS Distinguished Service Award

Oussama Khatib 教授荣获 The IEEE RAS Pioneer in Robotics and Automation Award

Alexander Zelinsky 博士荣获 The IEEE Inaba Technical Award



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS




国际机械工程先进技术译丛

# 机 器 人 手 册

# Springer Handbook of Robotics

[意] Bruno Siciliano（布鲁诺·西西利亚诺）
[美] Oussama Khatib（欧沙玛·哈提卜） 编辑
《机器人手册》翻译委员会 译



机 械 工 业 出 版 社

由施普林格出版社出版的《机器人手册》主要介绍了20世纪80年代以来人们在机器人技术方面的努力成果，是100多位来自不同国家的科学家几十年努力研究的成果。本手册从学科基础入手，介绍了机器人各个卓有成效的研究领域，包括最新出现的机器人各种应用，展现了机器人学领域的一幅全面图景。本书共分7篇，其中各章均运用经典的方法引导出将阐述的内容，避免了正在接受验证和尚未完全成熟的方法。本书内容先进，实用性强，是机械、控制、传感器技术、信息信号处理、模式识别、人工智能和计算机技术交叉领域内具有前沿性、综合性及权威性的著作，为推动机器人领域研究的快速发展将起到极其重要的作用。

本手册内容深入浅出，并附有大量的科研实例，便于自学和应用，可作为机器人、人工智能、自动化、控制以及计算机应用等专业科研人员、高校教师的参考用书，也可作为相关专业本科生或研究生的参考教材，还可供机器人业余爱好者们参考。



**图书在版编目（CIP）数据**

机器人手册/（意）西西利亚诺（Siciliano，B.），（美）哈提卜（Khatib，O.）编辑；《机器人手册》翻译委员会译. —北京：机械工业出版社，2012.11

（国际机械工程先进技术译丛）

ISBN 978-7-111-39716-8

Ⅰ.①机… Ⅱ.①西…②哈…③机… Ⅲ.①机器人-手册

Ⅳ.①TP242-62

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第216075号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：孔 劲 责任编辑：孔 劲 杨明远 刘本明

版式设计：霍永明 责任校对：陈延翔 常天培 纪 敬

封面设计：鞠 杨 责任印制：乔 宇

三河市宏达印刷有限公司印刷

2013年1月第1版第1次印刷

184mm×260mm·80印张·2插页·2760千字

0001—2000册

标准书号：ISBN 978-7-111-39716-8

定价：398.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

策划编辑(010)88379772

网络服务

教材网：http://www.cmpedu.com

机工官网：http://www.cmpbook.com

机工官博：http://weibo.com/cmp1952

封面无防伪标均为盗版

# 译 丛 序

## 一、机械工程高速发展

机械工程是以自然科学和技术科学为理论基础，结合在生产实践中积累的技术经验，研究和解决机械产品开发、设计、制造、安装、运用、修理及再制造等方面的全部理论和实际应用的学科。机械工程的学科内容包括：机械工程基础理论研究，机械产品开发、设计，机械产品的制造、装备、检验，机械产品的应用与维护，机械制造企业的经营和管理，机械产品的绿色生命周期等问题及技术措施。机械工程先进技术涉及设计、制造、应用、管理等相关环节的机械、电子、信息、材料、能源和管理科学等领域的先进技术。

20世纪后期，特别是进入21世纪，计算机、信息技术在机械工程领域的广泛、深入应用，使机械工程技术高速发展。机械工程技术由线性到非线性、由静态到动态、由二维到三维的研究发展，为现代机械设计方法的研究、应用奠定了工程理论基础；虚拟技术、创新设计、绿色设计、并行工程等，为现代机械设计提供了技术基础；机床数控技术、工业机器人、柔性制造技术、传感技术、集成制造技术、自动检测及信号识别技术等，为机械制造工艺自动化提供了支撑技术；ERP（企业资源计划）、MES（制造管理信息系统）、CIMS（计算机集成制造系统）等，为机械制造企业的经营和管理提供了现代化的支撑平台；PLM（产品全生命周期管理）、IWM（废物管理一体化）、EMS（环境管理体系）等理念、技术的发展，已成为机械工程先进技术的重要组成部分。

机械工程先进技术是实现工业技术现代化重要的技术支撑之一。但是，机械工程先进技术的发展要受到自然条件、经济条件、社会条件、技术基础等的限制，我国作为发展中国家，在机械工程先进技术方面同工业发达国家还有很大差距。为了加快我国机械工程先进技术的发展进程，通过各种方式引进外国机械工程先进技术，是一条切实可行的发展之路。

## 二、图书交流传播知识

图书资料是一种传统、永恒、有效的学术、技术交流方式。早在20世纪初期，我国清代学者严复就翻译了英国学者赫胥黎所著的《天演论》，其后学者周建人翻译了英国学者达尔文所著的《物种起源》，对我国自然科学的发展起到了很大的推动作用。

图书是一种信息载体，图书是一个海洋，虽然现在已有网络通信、计算机等信息传输和储存手段，但图书仍将以严谨性、系统性、广泛性、适应性、持久性和经济性而长期存在。纸质图书有更好的阅读优势，可满足不同层次读者的阅读习惯，同时它具有长期的参考价值和收藏价值。

近年来，国际间的交流与合作对机械工程技术领域的发展、技术进步及重大关键技术的突破起到了积极的促进作用，对机械工程技术领域科技人员及时了解国外相关技术领域的最新发展状况、取得的最新成果及应用情况等，发挥了积极作用。

机械工业出版社希望通过引进、翻译国外机械工程技术领域的先进技术图书，传播国外机械工程领域的先进技术，推动国内学者和技术人员对国外机械工程先进技术的引进、消化、吸收和创新发展。从而提升我国机械工程技术的自主创新能力，提高我国装备制造业的技术水平，加速实现我国工业的现代化。

## 三、精挑细选精雕细刻

为真正实现翻译国外机械工程技术领域先进技术图书、推动我国机械工程技术发展的战略目标，机械工业出版社将认真执行：

（1）精挑细选　坚持从机械工程技术比较发达的国家、国外优秀出版社引进优秀技术图书，组成一套《国际机械工程先进技术译丛》。本套译丛将涵盖机械工程的基础理论研究，产品开发、设计、制造、运用、维修、再制造和资源、环保、信息、管理等相关学科。

(2) 精雕细刻　本套丛书的选书、翻译工作均由国内相关专业的专家、教授、工程技术人员把关，以充分保证图书内容的先进性、适用性和翻译质量。内容翻译力争达到信、达、雅，真正实现传播国际机械工程先进技术，服务于国内机械工程技术的发展。

(3) 精益求精　本套丛书作为我社的精品重点书，将统一封面装帧设计，在版式编排、内容编校、图书印制等方面追求高质量，把“精品”体现到书的整体中去，力求为读者奉献一套高品质的《国际机械工程先进技术译丛》。

## 四、衷心感谢不吝指教

首先要感谢广大积极热心支持出版《国际机械工程先进技术译丛》的专家学者，积极推荐国外相关优秀图书，仔细评审外文原版书，推荐翻译的知名专家；特别要感谢承担翻译工作的译者所付出的辛勤劳动；同时要感谢从事图书版权贸易的工作人员的辛勤工作。

本套丛书希望能对广大读者的工作提供切实的帮助，欢迎广大读者不吝指教，提出宝贵意见和建议。

**机械工业出版社《国际机械工程先进技术译丛》编委会**

# 作 者 序 一

我对机器人学的首次了解是源自1964年的一个电话。打电话的人是Fred Terman，世界著名的《无线电工程师手册》的作者，当时任斯坦福大学教务长。Terman博士告诉我计算机科学教授John McCarthy刚获得一大笔研究经费，其中的一部分将用于开发计算机控制的机械臂。有人向Terman建议，如果以数学为方向的McCarthy教授和机械设计师联手，这将会是很聪明的做法。由于我是斯坦福教员中唯一有机械设计专长的人，Terman打算给我打个电话，尽管我们从未谋面，而且我还是个刚刚研究生毕业、在斯坦福只工作了两年的年轻助理教授。



**Bernard Roth**
**美国斯坦福大学机械工程教授**

Terman博士的电话使我与John McCarthy和他创建的斯坦福人工智能实验室（SAIL）有了紧密的联系。机器人成了我整个学术生涯的支柱，直到今天，我一直保持着对这一主题的教学与研究兴趣。

机器人控制的近代历史要追溯到20世纪40年代后期，当时伺服控制的机械臂被开发出来，它与主从方式的机械臂连接起来被用于处理核物质，从而保护相关人员。这一领域的发展一直延续到现在。然而在20世纪60年代初期，还很少有关于机器人学的学术活动和商业活动。首个学术活动是1961年麻省理工学院H. A. Ernst的论文。他用装有触觉传感器的从动机械臂在计算机控制下工作。他的研究思想就是利用触觉传感器中的信息来引导机械臂运动。

之后斯坦福人工智能实验室随之开展了相关项目，麻省理工学院Marvin Minsky教授也启动了类似的项目，这些研究在当时是在机器人学领域为数不多的学术冒险。这些尝试中的少数是在商业机械臂方面，大部分与汽车工业生产相联系。在美国，在汽车工业中对两种不同的机械臂设计进行了实验：其中一种来自AMF公司，另一种来自Unimation公司。

另外还有一些制造成手、腿和臂部假肢的机械装置，不久之后，为了提高人的能力还出现了外骨骼装置。那时还没有微处理器，所以这些装置既不受计算机控制，也不受远程的所谓微机所遥控，更不用说大型计算机控制了。

最初，计算机科学领域中的一些人认为计算机已足够强大，可以控制任何机械设备，并使其完美执行。但我们很快发现并非如此。我们分两条路线进行。其一是为斯坦福人工智能实验室（SAIL）开发特殊设备装置，以保证刚刚起步的机器人团队开展实验达到硬件证明与概念验证系统。另一条路线或多或少与斯坦福人工智能实验室的工作相关，是发展机器人的基础机械科学。我有一种强烈的感觉，可能会发展出一项有意义的科学。我们最好从基本概念的方面思考，而不是专门集中在特定的设备上面。

幸运的是，两种路线竟然相互间非常和谐融洽。更重要的是，研究者们对这一领域的研究很感兴趣。硬件开发为更多的基本概念提供了具体的例证，研究者们能够同时开发硬件和理论。

起初，为了尽快开始研究，我们购买了一只机械臂。在洛杉矶的Rancho Los Amigos医院有人在销售一种开关控制型电动机驱动的外骨骼机械臂，用来帮助那些臂部失去肌肉的患者。我们购买了一台，把它连接在PDP-6型分时计算机上。这套设备被命名为“奶油手指”，它是我们的第一个实验机器人。一些电影展示的视觉反馈控制、堆垛任务和避障都是由这台机器人作为明星演员完成的。

第一个由我们自主设计的操纵器被简单认为是“水压臂”。正如它的名字所指，它是由水力驱动的。要建立一个非常快的手臂，我们设计了特殊的旋转驱动器，这个手臂工作得非常好。它成为了最早测试机器人手臂的动态分析和时间最优化控制的实验平台。然而，当时普遍来说，计算、规划和传感性能都很有限，由于设计速度比要求速度快得非常多，使得这项技术的应用很受限制。

我们尝试去开发一个真正的数字化手臂。从而产生了一个蛇形结构，取名为Orm（挪威语中的蛇）。Orm有若干节，每节有膨胀的气动驱动器阵列，它们要么完全伸展，要么完全收缩。基本思想是：虽然在工作空间

中 Orm 仅可达到有限数量的位置，但是如果达到的位置有很多，那么这也是足够的。一个经过概念验证的小型原型 Orm 被开发出来，然而我们发现这种类型的手臂不能用于斯坦福人工智能实验室团队。

我们实验室第一个真正具有功能的手臂是由当时的研究生 Victor Scheinman 设计的，它就是非常成功的“斯坦福手臂”。有十几个这种手臂作为研究工具用于不同的大学、政府和工业实验室。它有六个独立驱动关节，均由计算机控制的直流伺服电动机驱动。其中一个关节是棱柱的，另外五个是旋转的。

鉴于“奶油手指”的几何学需要逆运动学的迭代解，因此选择“斯坦福手臂”的几何构型，即可以通过编程获得其逆运动学的迭代解，应用起来简单而高效。而且，这个机械设计是特别制作的，以兼容分时计算机控制固有的局限性。不同的末端执行器被连接到机械臂末端作为手。在我们的版本中，手被做成钳夹的形式，还有两只滑动手指，两只手指由一台伺服驱动器驱动，因此，手臂的实际自由度数目有7个。它也有一个特别设计的六轴腕部力传感器。Victor Scheinman 继续开发了其他重要的机器人：首先是一个有六个旋转关节的小型仿人手臂。最初设计是由麻省理工学院人工智能实验室 Marvin Minsky 资助的。Victor Scheinman 建立了 Vicarm 公司，这是一家小公司，为其他实验室制造了这个手臂和“斯坦福手臂”。Vicarm 后来成为了 Unimation 公司的西海岸分部，在那里，通过 Unimation 公司在通用电机公司资助下他设计了 PUMA 机械臂。后来，Scheinman 为 Automatix 公司开发了全新的 Robot World 多机器人系统。在 Scheinman 离开 Unimation 后，他的同事 Brian Carlisle 和 Bruce Shimano 重组了 Unimation 公司的西海岸分部——Adept 公司，该公司现在是美国最大的装配机器人制造商。

很快，精密机械和电子设计、优化的软件，以及完整系统集成的现代化趋势成为常态。到现在，这些结合是最高级机器人装置的标志。这是在“机械电子”（又译“机电一体化”或“电子机械”，mechatronic）背后的基本概念。“机械电子”这个词发源于日本，它代表机械和电子两个词的串联。依赖于计算的机械电子，正如我们今天所知的，是机器人固有技术的实质。

随着机器人技术在全世界的发展，很多人开始在与机器人相关的领域工作，一些特有的附属专业得到了发展。首先最大的分化是进行机械臂工作的人和视觉系统工作的人。早期，视觉系统在给出机器人周围环境的信息方面看起来比其他方法更有前途。

视觉系统是通过摄像机来捕获周围物体的图片，然后使用计算机算法对图像进行分析，从而推断出物体的位置、方位和其他特性。图像系统最初的成功在于解决定位障碍物问题、解决物体操作问题和读取装配工程图。人们感到视觉用于与工厂自动化和太空探索有关的机器人系统中具有很大潜力。这致使人们开始研究可以通过视觉系统识别机器零件（特别对于部分封闭的零件，发生在所谓的“拾箱”问题中）和形状不规则的碎石的软件。

在“看”和移动物体的能力被建立以后，下一个合理的需要就是让机器人做一系列事件的规划、去完成一项复杂的任务。这使得规划的发展成为机器人技术非常重要的分支。在固定的环境中制定固定的计划相对来说是很直接的。然而，在机器人技术中，面临的挑战之一就是，由于误差或者未计划的事件，环境发生了未预料到的变化，此时，机器人会发现环境的变化并且修改自身的行动。在此领域的一些里程碑事件是通过使用一台叫做 Shakey 的车辆来开展的，开始于1966年，由斯坦福研究所（现在称为 SRI）的 Charlie Rosen 小组开发。Shakey 有一台摄像机、距离探测器、碰撞传感器，通过无线电和视频连接到 DEC PDP-10 和 PDP-15 计算机上。

Shakey 是第一台可以思考自己行动的移动机器人。它利用程序获得独立感知、周围环境模仿和产生动作的能力。低级别的操作程序负责简单的移动、转动和路径规划。中级别的操作程序包含若干个低级别程序，可以完成更复杂的任务。最高级的操作程序能够制定和执行计划来实现用户提出的高级目标。

视觉系统对于导航、物体定位和确定它们之间的相对位置与方位非常有用。然而，当在具有环境约束力的地方，对于装配零件或者与其他机器人一起工作，只有视觉系统通常是不够的。因而产生了一种需求：对环境施加到机器人上的力和力矩进行测量，并利用测量结果来控制机器人的行动。多年以来，力控制操作成为了斯坦福人工智能实验室和遍布世界的其他几个实验室的主要研究课题之一。力控制在工业实践中的使用始终落后于该领域的研究发展。这是由于尽管高级的力控制系统对于通用的操作问题非常有效，但限制非常苛刻的工业环境的特殊问题经常只能在有限的力控制甚至没有力控制时解决。

在20世纪70年代，行走机器、机械手、自动汽车、多传感器信号融合和恶劣环境设计等专门领域开始快速发展。今天有大量的、不同的以机器人为主题的专门性研究，其中有一些是经典的工程学科领域，如运动

学、动力学、控制学、机器设计、拓扑学和轨迹规划。每一个学科在研究机器人技术之前都已经走过了一段漫长的路程，而为了发展机器人系统和应用，每一个学科已成为深入研究机器人技术的一个方面。

在理论正在发展的同一时间里，工业机器人，尽管稍微有些分离，也有了并行的发展。在日本和欧洲，商业开发强劲，美国也相继发展。相关的工业协会纷纷成立（日本机器人协会在1971年3月成立，美国的机器人工业协会（RIA）在1974年成立），定期举行协会展览会，并召开了应用导向的技术会议。其中最重要的有工业机器人国际研讨会（ISIR）、工业机器人技术会议（现在称为工业机器人技术国际会议（ICIRT））以及国际机器人和视觉展览与会议（这是由RIA每年举办的贸易展览会）。

第一个定期的系列会议在1973年召开。它强调机器人技术的各个研究方面，而不仅仅是工业上的。它由在意大利乌迪内的机械科技国际中心（CISM）和机械与机器理论国际联合会（IFToMM）共同赞助（尽管IFToMM仍在使用，但是意义已经变为机械与机器科学促进国际联合会）。该会议的名称是机器人与机械臂的理论与实践大会（RoManSy），明显特征是强调机械科学和来自东欧、西欧，还有北美和日本的科研人员们的积极交流、分享成果，会议现在仍然每半年举行一次。在我个人的笔记里，就是在RoManSy会议中，我首次遇到了这本手册的各位编辑：1978年遇到了Khatib博士，1984年遇到了Siciliano博士。他们当时都是学生：Bruno Siciliano攻读他的博士学位已经差不多一年了，Oussama Khatib那时刚刚完成了他的博士学位研究。两个事件，都让人产生一见钟情的感觉！

众多其他新的会议和研讨会迅速加入到RoManSy里面。如今，每年有大量机器人研究导向的会议在许多国家举行。当前，最大型的会议是一般吸引了超过1000位参会者的IEEE机器人与自动化国际会议（ICRA）。

在20世纪80年代初期，Richard Paul撰写了美国第一本真正关于机器人操作的教材《机器人操作——数学、编程与控制》出版社（Richard P. Paul，MIT，1981）。它把经典力学学科的理论应用到机器人领域。另外，书中有一些主题是从他在斯坦福人工智能实验室的论文研究中直接发展而来（在书里面，许多例子基于Scheinman的“斯坦福手臂”。）。Paul的书是美国的一个里程碑事件，它为将来一些有影响力的教材开创了一个模式，还鼓励众多的大学与学院开设专门的机器人课程。

差不多与此同时，一些新的期刊创刊，这些期刊主要发表机器人相关领域的论文。在1982年的春天，《机器人研究国际期刊》创刊，三年之后，《IEEE机器人与自动化期刊》（现在的《IEEE机器人学报》）创刊。

随着微处理器的普及，关于什么是或什么不是机器人的问题更加凸显出来。在我的脑海里，这个争论从来没有被很好地解决过。我认为永远不会有一个大家都普遍同意的定义。当然，存在着科幻小说中各种各样的外太空生物和戏院、文学以及电影中的机器人。早在工业革命之前，就有过想象中的类似机器人生物的例子，但实际的机器人又会是什么样的呢？我认为关于机器人的定义实质上是一个随着科技进步而不断改变其本体特征的移动靶。例如当船上的陀螺仪自动罗盘第一次被开发出来时就被认为是一个机器人。现在，当我们罗列在我们世界中的机器人的时候，总是无法完全囊括所有的机器人。机器人的定义已经被降级了，现在机器人被看做是一种自动控制装置。

对于很多人来说，机器人包含着多功能的概念，机器人即意味着在设计和制造时就具备了容易适应或者可被重新编程以完成不同任务的能力。在理论上，这种想法应该可以实现的，但在实际中，却是大多数的机器人装置只能在非常有限的领域里实现多功能。人们很快发现，在工业中一般而言，一台具有专门用途的机器要比一台具有广泛用途的机器表现好得多。而且在制造加工时，当产品的产量足够高的时候，一台具有专门用途的机器要比一台具有广泛用途的机器花费少。因此，人们开发出专业机器人用于喷漆、铆接、零部件装配、压力加载、电路板填充等方面。在一些情况下，机器人被用于如此专一的用途，以至于很难划清一台所谓的机器人与一条可调整的“固定的”自动化流水线的界限。人们理想中的机器人应该是能做“所有事”的万能机器，因此这种机器人在大量出售以后价格将相对便宜。但是，许多机器人的实际情况则恰好与之相反。

我认为机器人的概念应该与在给定的时间内什么活动是与人相关，以及什么活动是与机器相关联系起来。如果一台机器突然变得能够完成我们通常和人联系在一起的工作时，这台机器就能在定义上被提升而定义为一个机器人。过了一段时间以后，人们习惯于这件工作由机器来完成了，这个装置就从“机器人”降级为“机器”。那些没有固定底座和那些具有胳膊或腿状附件的机器人更有优势，也更有可能被称作机器人，但是很难让人想到一套始终如一的定义标准，并适合目前所有的命名惯例。

在包括家用机器的所有机器中，拥有微处理器来指导其行动的都可以认为是机器人。除了真空吸尘器，还

有洗衣机、冰箱以及洗碗机都能很容易地作为机器人被推向市场。当然，还存在着很多的可能性，包括那些具有环境感知反馈和判断能力的机器。在实践里，那些被看做是机器人的装置中，传感器的数量和判断能力可能由很多、很强一直变化到完全没有。

在最近的几十年里，对机器人的研究已经由一个以机电整合装置研究为中心的学科壮大为一个宽广得多的交叉性学科。被称作以人为本的机器人领域便是这样的一个例子。在这个领域里，人们研究人和智能机器的相互作用。这是一个发展中的领域，其中，对机器人与人的相互影响的研究已经吸引了来自经典机器人研究领域之外的专家们。人们正在研究一些诸如人和机器人的情感之类的概念；而且一些像人体生理学和生物学等古老的研究领域正在被合并成机器人研究的主流。这些研究活动将新的工程和科学层面引进到了研究著述中，从而丰富了机器人研究领域。

最初，初期的机器人界主要关注让机器去干活。对于那些早期的机器人装置，人们完全只关注它们能不能干活，而很少去在意它们有限的性能。现在，我们拥有精细的、可靠的装置作为机器人系统现代阵列的一部分。这一进步是全世界成千上万人的工作成果，这些工作很多都是在大学、政府的研究实验室和企业里进行的。这一成就创造了包含在本手册64章中的大量的信息，这是对全世界工程界和科学界的致敬。显然这些成果并非由任何中央规划或者一个整体有序的计划产生。因此本手册的编者面对着将这些材料组织成一个有逻辑而且清晰明了的整体的艰巨任务。

编辑将稿件划分为三层结构。第一层论述这门学科的基础。这一层由9章组成。作者在其中详细讲述了机器人学科、运动学、动力学、控制学、机构学、架构、编程、推理和传感。这些是组成机器人研究和发展的基本技术。

第二层有四个部分。第一部分（第2篇）阐述了机器人的结构，包括臂部、腿、手和其他大多数机器人的组成部分。乍一看，腿、臂部和手这些硬件可能相互之间差异巨大，但它们共有一套属性，使他们能够用相同的或很接近的、在第一层中描述过的原理去分析。

该层的第二部分（第3篇）涉及传感和感知，它们是任何真正独立的机器人系统所必需的基本能力。正如先前指出，实际上许多所谓的机器人设备只有少量的上述能力，但显然更先进的机器人不能离开它们，并且很大趋势是把这些能力合并到机器人设备中。该层第三部分（第4篇）讲述了这门学科领域和设备控制与接口技术的联系。该层第四部分（第5篇）由8章组成，探讨了移动机器人和不同形式的分布式机器人。

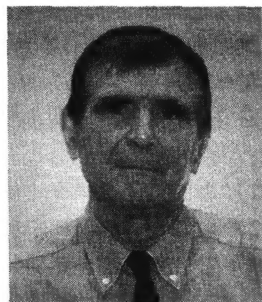
第三层由两部分共12章组成，涉及当今研究和开发前沿的高级应用。一部分（第6篇）论述现场和服务机器人，另一部分（第7篇）讲述以人为本和仿真机器人。对于外行读者，这些章节是先进机器人的全部。然而必须意识到这些非同寻常的实现如果没有前两层所介绍的发展，就可能不会存在。

理论和实践的紧密联系促成了机器人技术的发展，并成为现代机器人的一种特征。这两个互补的方面，对于我们当中那些同时拥有机会研究和开发机器人设备的人，是个人成就感的源泉。本手册极好地反映了学科的这两个互补方面，并展现近五十年来的大量研究成果。一些人将要发明更有能力的多样的下一代机器人设备，当然，本手册的内容将作为他们一个有价值的工具和导引。向编辑和作者致以祝贺与崇敬。

**Bernard Roth**
**美国斯坦福大学**
**2007年8月**

# 作者序二

翻开这本手册，纵观其64章丰富的内容，我们不妨从个人的视角，对机器人学在概念、趋势及中心问题等方面的演变作一个概述。



**Georges Giralt**
**研究主管**
**法国拉斯-国家科学研究中心**
**（LAAS-CNRS），图卢兹**

现代机器人学大约开始于半个世纪以前，并向两个不同的方向发展。

首先，让我们了解一下机械臂涉及的范围，从对遭受辐射污染产品的远程作业到工业机械手，无不包含在其领域中，而这之中标志性机器UNIMATE是通用机械手的代表。产品的工业发展，大多围绕六自由度串联图景以及积极的研究和开发，将机械工程与控制专业化联系在一起，成为其发展的主要推动力。当今特别值得关注的是，通过对先进的功能强大的数学工具的运用，在新颖的应用优化结构设计方面的努力终于获得了回报。类似的，为实现制造出与人类友好的机器人的梦想，一项关于未来认知机器人的臂和手的设计与实际建造也引起了人们的重视。

其次，还未被人类充分认识但我们应该清楚的是涉及人工智能相关主题的系列工作。在此领域中具有里程碑意义的项目便是斯坦福国际集团开发的移动机器人Shakey。这项旨在集计算机科学、人工智能和应用数学于一身发展智能机器的工作，至今作为一个子领域已经有一段时间了。20世纪80年代期间，通过对围绕包括从极端环境下的探测器（如星球探测，南极洲等）到服务机器人（如医院，博物馆引导等）等宽广范围的个案研究获得的建设强度，引发了大范围的研究，从而也奠定了智能机器人的地位。

因此机器人学的研究能够将这两个不同的分支联系起来，将智能机器人以一种纯粹的计算方式分类为有限理性机器，这是在20世纪80年代第三代机器人定义的基础上进行了扩展：

“（机器人）……作为一个通过智能将感知和行动联系在一起，而被赋予了对一项工作拥有理解、推断并执行能力的机器，在三维的世界里执行操作。”

作为一个广泛认可的测试平台，自主机器人领域最近从机器人设计方面的突出贡献中受益颇多，而这些贡献是通过在环境建模及机器人定位上运用算法几何及随机框架法（SLAM，同步定位和建模），以及运用贝叶斯估计和决策方法所带来的决策程序的发展等综合取得的。

在千禧年的过去十年间，机器人学主要处理智能机器人图景，在一个覆盖了先进传感和知觉、任务推理和规划、操作和决策自动化、功能性整合架构、智能人机接口、安全和可靠性等项目的主题内，将机器人和机器智能通用研究结合起来。

第二个分支数年来被认为是非制造机器人学的，涉及大量有关现场、服务、辅助以及后来的个人机器人的、以研究为驱动的真实世界的案例。这里，机器智能在其多个主题内是中心研究方向，使得机器人能够在以下三个方面得以行动：

1）作为人类的替代者，尤其是对于远程或恶劣环境中的干预工作。

2）通过与人友好机器人学或以人为本机器人学的所有实际应用，与人类的亲近交互及在人类环境中的操作。

3）与使用者的紧密协同，从机械外骨骼辅助、外科手术、保健和康复扩展到人类隆胸。

因此，在千年之交，机器人学已经成为一个广泛的研究主题，不仅有对于工程化很好的工业领域支持市场产品，同时也有大量在危险环境中操作的领域导向的应用案例，如水下机器人、复杂地形车、医疗/康复机器人学等。

机器人学的发展水平重点看理论方面所扮演的角色，目前它已经从应用领域发展到技术和科学的领域。这本手册的组织构架很好地阐释了这些不同的水平。此外，为了未来认知型机器人，除了大量的软件系统，人们还需要考虑与人友好的环境中的机器人物理性质和新奇附件，包括腿、臂和手的设计。

在当前千禧年的前十年，前沿的机器人学正在取得突出的进步，通常由以下两个方向组成：

1）中/短期面向应用的案例研究。

2）中/长期一般情况的研究。

为了完整性，我们需要提到大量外围的、激发机器人学灵感的学科，这些学科经常是关于娱乐、广告和精致的玩具。

与人友好机器人学的前沿领域包括几个一线的应用领域，在这些领域里，机器人（娱乐、教育、公共服务、辅助和个人机器人等）在人类环境或者在和人类密切相互作用的环境里运作。这里也就介绍了人机交互的关键性问题。

正是在这个领域的中心，浮现出来个人机器人的前沿的课题，对此，在这里我们着重强调它的三个总体特征：

1）它们可能由非专业使用者操作。

2）它们可能被设计来和使用者分享高水平的决定。

3）它们可能包含环境装置和机器附件、遥远的系统，还有操作者。这种分享决策的观念暗示这里呈现出一些前沿研究课题和伦理问题。

个人机器人的概念，正扩大为机器人助手和万能“伴侣”，对于机器人学来说确实是一项重大的挑战。机器人学作为科学和技术领域的一个重要分支，提供了在中长期对社会和经济产生重大影响的观念。这里介绍和质疑前沿课题包括以下认知的方面：可协调的智能人机交互、感觉（场景分析、种类识别）、开放式学习（了解所有的行为）、技能获取、大量的机器人世界的数据处理、自主决定权和可靠性（安全性、可靠性、交流和操作稳定性）。

上面提到的两种方法有很明显的协同性，尽管必要的框架存在时差。这种科学上的联系不仅集合了问题和获得结果，而且也在事物两方面创造出和谐的交流和给技术带来进步。

事实上，这种相应的研究趋势和应用领域的发展获得了爆炸性的实用技术的支持，其中包括计算机处理能力、通信学、计算机网络设计、传感装置、知识检索、新材料、微纳米技术。

今天，展望中长期的未来，我们正面对非常积极的议题和观点，但是也必须对有关机器人的批评性意见和隐存的风险做出回应，这种风险就在于人们担心机器人在和人接触的过程中也可能出现不需要的或者不安全的行为。因此，存在一个非常清晰的需求，那就是研究级别安全问题和可靠性与相应的系统限制课题。

《机器人手册》的出版非常及时，充满了挑战性的成果。它由165位作者在64章中总结了大量的难题、问题和方方面面。就其本身而言，它不仅是全世界研究者所获得的基本课题和结果的一个高效展示，而且进一步给每一个人提供了不同的观点和方法。这确实是一个可以带来进步的很重要的工具，但是，更重要的是，它将在这个千禧年的头二十年成为建立机器人学的开端，在机器智能的核心领域成为科学的学科。

**Georges Giralt**

**法国图卢兹**

**2007 年 12 月**

# 作 者 序 三



**Hirochika Inoue**
**日本东京大学教授**

机器人学领域诞生于20世纪中期，当时新兴的计算机科学正在改变科学和工程中的每一个领域。机器人学经历了不同的阶段，从婴儿期，童年期到青年期，再到成年期，已经完成了快速而稳健的成长。机器人学现在已经成熟，人们希望它在未来的社会里提高他们的生活质量。

在机器人学的婴儿期，它的核心被认为是模式识别、自动控制和人工智能。带着这些新的挑战，这个领域的科学家和工程师聚集在一起来审查新奇的机器人传感器和驱动器、规划和编程算法以及连接各部分组件的最优结构。在此过程中，他们创造出在真实世界中可以和人进行交互作用的机器人。这些早期的机器人学集中于研究手-眼系统，也就是人工智能研究的试验平台。

“童年时期”机器人的活动场地是在工厂。工业机器人被研究出来，并且应用到工厂进行自动喷涂、点焊、打磨、材料操作和零件装配。拥有传感器和记忆功能的机器人使工厂更加自动化，使机器人的操作更加柔性化、更加可靠和精确。机器人的自动化将人从繁重和乏味的体力劳动中解放出来。汽车、家电和半导体工业迅速将其生产线重整为机器人集成化系统。英文单词“机械电子”（又称为“机电一体化”、“电子机械”）最早是由日本人在20世纪70年代末期提出来的。它定义了一个新的机器观念，在这种观念里，电子和机器系统相融合，这种融合使很多工业产品变得更加简单、却又更加多功能，而且可编程和智能化。机器人学和机械电子学在制造过程的设计、操作和工业产品上都产生了非常积极的影响。

随着机器人学进入它的青春期，研究者雄心勃勃地去探索它新的起点。运动学、动力学和系统控制理论变得更加精妙，同时它们也被应用到真正的复杂机器人的机构中。为了进行规划和完成真实的任务，机器人必须能够认知它所处的环境。视觉——外部感觉的主要的途径，作为机器人了解其所处外部环境的最普通、最有效的、最高效的手段，被开发出来。已经发展起来的高级的算法和强有力的装置将会用来提高机器人视觉系统的速度和稳定性。触觉和力的传感系统也需要发展，这样机器人可以更好地操控物体。在建模、规划、认知、推理和记忆方面的研究扩大了机器人的智能化特性。机器人学逐渐被定义为传感和驱动之间的智能连接的研究。这种定义覆盖了机器人学的所有方面：三大科学核心和一个整合它们的综合方法。事实上，由于系统综合使仿生机器的创造成为可能，所以它已经成为一个机器人工程的关键性方面。创造这种仿生机器人的乐趣吸引了很多学生投身到机器人学领域。

在发展机器人学的过程中，科学的兴趣被导向到去理解人类的精妙。人类和机器人的比较研究在科学研究人的功能建模方面开辟出了一条新路。认知机器人学、仿生行为、生物激发的机器人和机器人生理心理学方法，在扩大机器人潜力方面达到了极限。总的来说，在科学探索中，不成熟的领域是稀少的。20世纪80和90年代，机器人学就处于这样一个年轻的阶段，它吸引了大量充满好奇心的研究者进入这个新的前沿领域。他们对该领域持续的探索形成该本富含科学内容的综合性手册。

随着机器人学科前沿知识的掌握，进一步的挑战为我们打开了将成熟的机器人技术应用于实际的大门。早期的机器人的活动空间给工业机器人的场所让路。内科机器人、外科机器人、活体成像技术给医生做手术提供了强有力的工具，这使许多病人免于病痛的折磨。人们期望诸如康复、卫生保健、福利领域的新机器人能够提高老龄化社会的生活质量。机器人必将会遍布于世界的每一个角落——天上、水下、太空中。人们希望能和机器人在农业、林业、矿业、建筑业、危险环境及救援中联手工作，并发现机器人在家务及在商店、饭馆、医院服务中的实用性。在无数的方式中，人们还是希望机器人可以支持我们的生活。然而，从这方面来看，机器人的应用主要受到结构化环境的限制，在这些环境中，出于安全考虑，机器人和人是相互隔离的。在下一个阶段，机器人所处的环境将扩展为非结构化的世界，在这里，人享受服务，将总是和机器人一起工作和生活。在这样的环境中，机器人将必须具备高性能的传感器、更加智能化、强化的安全性和更好的人类理解力。在寻求

阻碍机器人发展问题的解答过程中，不仅应该考虑技术上的问题，还应该考虑社会问题。

自从我最初的研究——使机器人变成一个奇想，到现在，四十年已经过去了。从最开始就见证了机器人技术的成长我感到幸运和高兴。为了机器人学的诞生，从其他学科引进了基础的技术。没有教科书和手册是现成的。为了达到目前的这个阶段，许多科学家和工程师已经挑战了新的领域。在推进机器人学的同时，他们从多维度的视角丰富了知识本身。他们努力的成果都已经编辑在这本机器人手册中了。这本出版物是百多位世界领军专家共同合作的结果。现在，那些希望投身于机器人学研究的人就能够找到一个可以建构自己知识体系的坚实的基础。这本手册必将会用于进一步发展机器人学，强化的工程教育和系统的知识编辑可以促进社会和工业的知识创新。

在老龄化社会里，人类和机器人的角色是科学家和工程师需要考虑的重要问题。机器人能够对保卫和平、促进繁荣和提高人们生活质量做出贡献吗？这是一个尚未解决的问题。然而，最近个人机器人、家用机器人和仿人机器人的进步间接表明机器人从工业部门到服务业部门的转移。为了实现这种转移，机器人学不可回避这样的观点，那就是机器人学工作的基础包含了社会学、生理心理学、法律、经济、保险、伦理、艺术、设计、戏剧和运动科学。将来的机器人学应该被作为包含人类学和技术的学科来研究。这本手册有选择地提供了推进机器人学这个新兴科学领域的技术基础。我期待机器人学持续不断的进步，期待它能够促进未来社会的繁荣。

**Hirochika Inoue**

**日本东京**

**2007 年 9 月**

# 作 者 序 四



**Rodney Brooks**

**美国麻省理工学院布鲁克斯教授**

机器人已经让人类着迷了几千年。在20世纪之前制造的机器人没有将传感和动作联系起来，只是通过人力或者是重复性的机器来驱动。直到20世纪20年代，电子登上舞台之后，才制造出了第一台真正感知世界并能恰当工作的机器人。在1950年前，我们开始看到流行杂志中出现了对真正机器人的描述。20世纪60年代，工业机器人进入了人们的视野。商业压力迫使它们对环境越来越不敏感，而在它们自己的工程化世界中，动作却越来越快。20世纪70年代中期，在法国、日本和美国，机器人再一次在少数研究实验室出现。现在我们已经迎来了一个世界性的研究热潮和遍布世界的智能机器人大规模研究的蓬勃发展。本手册汇集了目前多个领域机器人的研究现状。从机器人的机械装置、感应和知觉处理、智能、动作到许多应用领域，本书都有涉及。

我非常幸运地生活在过去30年来机器人的研究革命之中。在澳大利亚，当我还是一个少年的时候，在1949年和1950年我受到Walter在《科学美国人》中所描述的乌龟的启发，制作了一个机器人。当我在1977年抵达硅谷时，恰好是计算机个人化革命真正开始的时候，但是我转向了更为模糊的机器人世界的研究当中。在1979年我已经可以协助斯坦福人工智能实验室（SAIL）的Hans Moravec工作了，当时他正在耐心地使他的机器人“The Cart”在6个小时之内行驶20米。就在26年之后的2005年，在同样的实验室——斯坦福人工智能实验室，Sebastian Thrun和他的团队已经可以使机器人在6个小时之内自动行驶200000米了，在仅仅26年之中就提高了4个数量级，比每两年就翻一番的速度还快一点。但是，机器人不仅仅是在速度上提升了，它们在数量上也增加了。我在1977年刚到斯坦福人工智能实验室的时候，世界上只有3台移动机器人在运行。最近，我投资建立的一个公司制造了第3000000台移动机器人，并且我们制造的步伐还在加快。机器人的其他领域也有类似的壮大发展，尽管提供一个简洁的数字化的描述更难一些。以前，机器人太不清楚它们周围的环境，所以人们和机器人近距离一起工作非常不安全，而且机器人也根本意识不到人们的存在。但是近些年，我们已经远离了那样的机器人，还制造出了可以从人们的面部表情和声音韵律当中领悟其暗示的机器人。近期，机器人已经穿过了肉体和机器的界限，所以现在我们正在看到一系列的智能机器人，包括从会修复牵引术的机器人到为残疾人设计的康复机器人。最近，机器人已经成为了认知科学和智能科学研究中受尊敬的贡献者。

本手册介绍的研究结果提供了推动机器人伟大进步的关键想法。参与和部分参与工作的编辑们和所有的作者把这些知识汇集起来，完成了一项一流的工作。这项工作将会为机器人的进一步研发提供基础。谢谢你们，并祝贺所有在这项关键工作中付出劳动的人们。

对一些未来机器人的研究将通过采用和改善技术得以增加。未来机器人研究的其他方面将会更具革命性，这些研究的基础会与一些观念以及本书所述的现有技术发展水平相反。

当你在研究本书，寻找一些领域来通过你自己的才华和努力对机器人研究做出贡献的时候，我想提醒你，我相信能力和灵感会使机器人更加有用，更加高产，更容易被接受。我把这些能力按照一个小孩子拥有同等能力时的年龄描述为：

- 一个两岁小孩子的物体认知能力。
- 一个四岁小孩子的语言能力。

- 一个六岁小孩子的灵巧能力。
- 一个八岁小孩子的社会理解能力。

达到上述每一个程度都是非常困难的目标。但是即使是朝向以上任何一个目标的微小进步也将会立即应用在外面世界的机器人上。当你进一步对机器人学有所贡献之时，好好阅读本书并祝你好运。

**Rodney Brooks**
**美国麻省理工学院，剑桥**
**2007 年 10 月**

# 前　　言

机器人在达到人类前沿的同时，积极应对着新兴领域中出现的各种挑战。新一代机器人和人类互动，和人类一起探索、工作，它们将会越来越多地接触人类及其生活。实用机器人的前景令人信服是半个世纪的机器人科学发展的结果，这种发展将机器人作为现代科学学科建立起来。

机器人领域的快速发展推动了这本《机器人手册》的诞生。随着期刊、会议论文集和专著的增加，参与机器人科学技术研究的人，特别是刚进入该领域的人，很难跟得上它大范围发展的脚步。由于机器人技术是多学科交叉的技术，这个任务就显得尤为艰难。

这本手册依据20世纪80、90年代机器人学的发展成果，这些成果对机器人领域的研究很有参考价值：《机器人策略：规划和控制》（Brady，Hollerbach，Johnson，Lozano-Perez，和 Mason，MIT 出版社，1982），《机器人科学》（Brady，MIT 出版社，1989），机器人评论 1 和 2（Khatib，Craig，和 Lozano-Pérez，MIT 出版社，1989 和 1992）。随着机器人领域更大的扩展以及向其他学科的日渐延伸，人们对一部包含机器人基本知识和先进发展的综合性参考手册的需求越来越强烈。

这本手册是世界各国多位积极参与机器人研究的作者的努力成果。将各位作者组织成一个目标明确、能力卓越的团队，卓有见地地介绍覆盖机器人各个领域的知识，这是一项艰巨的任务。

这个工程开始于2005年5月，我们和施普林格欧洲工程主管 Dieter Merkle 及 STAR 的资深编辑 Thomas Ditzinger 一起参加会议期间。一年以前，我们和 Frans Groen 一道发行了“斯普林格先进机器人技术”系列小册子，这个小册子迅速成为及时传播机器人技术研究信息的重要媒介。

正是在这种背景下，我们开始了这个具有挑战性的任务，满腔热情地开始规划开发技术结构和构建作者团队。我们构思了一部由3层架构、共7篇内容的手册，在机器人领域已经建立了的学术中心、目前正在进行的研发，以及新兴应用中获取该领域多层面的信息。

第一层即第1篇是机器人学基础。综合的方法和技术包含在第二层的四篇中，涵盖了机器人的结构、传感和感知，操作和接口，移动和分布式机器人。第三层，包括机器人技术在两个领域先进的应用，分别是：服务机器人和以人为中心的仿人机器人。

为了展开上述各部分，我们设想建立一个编辑团队，来整理作者的稿件，以组成各个章节。一年后我们的七人编辑团队形成了：David Orin，Frank Park，Henrik Christensen，Makoto Kaneko，Raja Chatila，Alex Zelinsky 和 Daniela Rus.。有这样一批杰出的学者致力于这个手册的编辑工作，该手册在学术领域一定是高质量、大跨度的。

到2005年初，我们的作者超过了1150位。为了方便内部以及各个章节的交叉参照，把握手册的编写进度，我们制作了内部网站。第二年，就认真协调了手册的内容。尤其是在2005年和2006年春季的两个全日制举行的讲习班，大部分作者都出席了。

本手册的每一章都由至少3个独立的审稿人员进行审稿，通常都会包括那一章的编辑和两位相关章节的作者，有时候也会由一些该领域的其他专家进行审阅。必须审读两遍，有时候甚至是三遍。在这个过程中，只要认为有必要，就会加入几位新的作者。本书大部分章节在2007年夏季之前已定稿，在2008年早春之前书稿已全部完成——那时候，我们收到了10000多份电子邮件，汇集了来自165位作者的7篇总共64章1650多页的内容，有950幅插图，5500篇参考文献。

我们对作者们的脑力劳动深表谢意，也同样感谢审稿人员和各部分编辑的尽职尽责。感谢“施普林格科学和工程手册”的高级经理 Werner Skolaut，他全力支持稿件的编辑加工工作，将手册的编辑和审稿、出版相结合，很快成为了我们团队很投入的一名队员。感谢 Le-TeX 的工作人员的高度专业化的工作，他们重新排版了所有的文字，重绘和完善了很多图稿，同时在校对材料时及时地和作者互动。

在出版手册这个想法产生六年之后，这本手册终于面世了。除了它对研究人员的指导意义以外，我们也希望这本手册能够吸引一些新的研究者进入机器人领域，激励这个充满魅力的领域几十年的蓬勃发展。每一次努力的完成，总会带来新的令人振奋的挑战。在这种时候我们都会提醒我们的研究员——保持前进的梯度。

**Bruno Siciliano**
**Oussama Khatib**
**意大利那不勒斯、美国斯坦福大学**
**2008 年 4 月**

# 目　　录

# 第3篇　传感与感知

# 第4篇 操作与接口

# 第5篇　移动式和分布式机器人

# 第6篇　野外和服务机器人

# 第7篇 以人为中心和类生命机器人

# 引　　言

Bruno Siciliano，Oussama Khatib

机器人！火星、海洋、医院、家庭、工厂、学校，机器人无处不在。机器人能够救火，能够制造产品，能够节约时间、挽救生命……现如今，从制造业，到医疗保健、交通运输以及对外层空间和深海的探索，机器人正在对现代生活的许多方面产生着相当大的影响。未来，机器人将会和现在的个人电脑一样普及和私人化。从一开始，人们就梦想着能创造出既有能力又有智慧的机器。现在这个梦想在我们的世界里已经部分成为现实。

从早期文明开始，人类最大的雄心之一就是要创造出他们想象中的物品。将人类从粘土中塑造出来的巨神普罗米修斯或是赫淮斯托斯锻造的青铜奴役巨人泰勒斯（公元前3500年）的传奇，证明了希腊神话的这种追求。埃及人的甲骨文中的神谕（公元前2500年）也许正是现代思维机器的先驱。巴比伦人制造的漏水计时器（公元前1400）是最早的自动机械装置之一。在以后的几个世纪里，人类的创造力造就出许多装置，例如，有自动装置的英雄亚历山大剧院（100年）、加扎里（1200年）的水力灌溉和类人机器，以及莱昂纳多·达芬奇的难以计数的极具创造性的设计（1500年）。在18世纪，自动控制技术继续在欧洲和亚洲蓬勃发展，其中就有诸如Jacquer-Droz的机器人家庭（画家、音乐家和作家）和karakuri-ningyo机械木偶（倒茶和射箭）这样的发明。

机器人的概念得以清晰地建立源于许多极具创造力的历史产物。但是，真正的机器人还是要等到20世纪其基础技术发展后才能出现。1920年，英文单词“机器人”（robot）脱胎于斯拉夫语中意思是奴隶的单词“robota”，它第一次被捷克剧作家Karel Capek用在其剧目“罗萨姆的万能机器人”（Rossum's Universal Robots）中。1940年，人类与机器人之间往来的道德准则就被认为是约束在众所周知的机器人三原则之内，这个机器人三原则是美籍俄裔科幻小说家艾萨克·阿西莫夫（Isaac Asimov）在他的小说《Runaround》中提到的。

在20世纪中期，人们进行了对人类智能与机器关联的第一次探索，这标志着在人工智能领域一个多产时代的来临。在这一时期，第一台机器人变为现实，这得益于在机械控制、计算机和电子等领域的科技进步。同往常一样，新的设计会推动新的研究和发现。与此同时，这些新的研究和发现又促使解决问题方案的增加，并由此产生新的概念。这样一个有效的循环逐渐交替演变就催生了机器人领域的知识与认知——更准确地应该称为机器人科学与技术。

早期的机器人出现在20世纪60年代，它的产生主要受到两方面技术的影响：数控机器在精密制造业的应用和对远程放射性材料的遥控操作。这些主从式机械臂设计出来用于重复人手臂所做的“点到点”的机械运动，同时它们具有基本的控制，并对环境几乎没有感知。之后，在20世纪中后期，集成电路、数字计算机和微型元器件的发展使计算机控制机器人的设计和编程成为可能。20世纪70年代，这些机器人，也称为工业机器人，成为了柔性制造系统自动控制的必要组成。它们不只在汽车工业上得到了广泛应用，还被成功应用到其他工业生产中，例如金属制造业、化工业、电子业和食品工业中。最近，机器人还在工厂之外找到了新的用武之地，例如它们在清洁、搜救、水下、太空以及医疗应用等方面均具有广泛的应用。

20世纪80年代，机器人学被定义为研究感知与行动之间智能连接的一门科学。根据这一定义，机器人通过安装移动装置（轮子、履带牵引装置、腿、螺旋桨）来实现在空间中的移动，通过操作装置（悬臂、末端执行器、假肢）来对物体进行加工，其中，一些合适的装置赋予了机器人具有人的灵性。通过分析由传感器得来的机器人的状态参数（位置、速度）以及与周边环境相关的参量（力和触觉、距离和视野），机器人就具有了感觉；而其智能连接是通过一个经过了编程、规划和控制的控制架构来实现的，这种结构依赖于机器人的感觉和动作模式、周围环境，以及自身学习能力和技能习得过程。

在20世纪90年代，人类诉诸机器人的各种需求推动了机器人研究的发展。这些需求包括在危险的时候解决人类的安全问题（野外机器人），或提高人类的操作能力并且降低人类疲劳程度（人类机能增强），或实现一些人在充满潜力的市场里开发产品从而改善生活质量的愿望（服务机器人）。这些应用场景的一个共同之处就是它们必须运作在一个几乎非结

构化的环境中，最终达到增加能力和获得更高程度自主权的要求。

在新千年来临之际，机器人技术在范围和维度上经历了重大变革。这种扩张使机器人领域变得成熟，也使其相关技术获得了进步。机器人技术已经从具有主导优势的工业热点开始迅速扩展到成为人类世界的挑战（以人为本和类生命机器人）。人们期望新一代的机器人可以与人安全地、可靠地在家庭、工作场所共处，在社区提供服务，在娱乐业、教育行业、医疗保健行业、制造业等方面提供支持和援助。

除去实体机器人的冲击外，智能机器人的发展揭示了在不同研究领域和学科内可以开发出更为广泛的应用，例如：运动生物力学、触觉学、神经学、模拟仿真学、动画制作、外科手术和传感网络学科等。作为回报，新兴领域的挑战证明了机器人领域具有如此多样化的增产措施和启示。最引人注目的进展往往就诞生于学科的交叉处。

现在，伴随着越来越多的机器人核心连接的研究，以机器人用户和研发者为主的群体正在形成。机器人社会的战略目标就是与这些群体达成拓展与科研合作。而为了达到这个目标，在未来所要进行的发展与可以预期的成果将很大程度上依赖于科研团体的能力。

在过去几十年中，研究结果的推广、文献期刊中记录的发现，以及学术会议上的讨论对机器人的发展起了很重要的作用。有关机器人的科技活动已经引领了专业群体的成立，并且使研究网络开始转向这个领域。世界各地研究机构在机器人学方面的研究生计划的介绍，清晰地展示了在机器人学这一科学领域中科研已经能够达到的完善程度。

机器人学的密集研究情况已经记录在了具有独特价值的参考文献中，这些文献旨在搜集国际机器人科学共同体的意义非凡的成果。

《机器人手册》一书从学科基础说起，从研究领域，直至最新出现的机器人应用，展现了机器人学领域的一幅全景图。本书在逻辑上材料的组织可以分为三个层次，它们分别反映了机器人领域的历史发展，如图 1 所示。

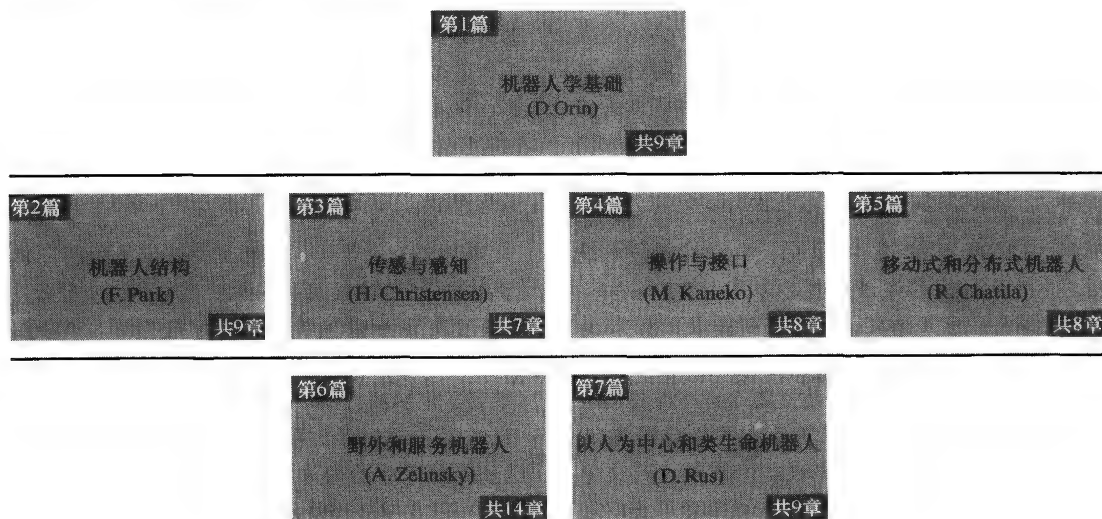



**图 1 本手册的结构**

第一层（第 1 篇，包含 9 章）：机器人科学基础，包括机器人的力学、感觉、设计和控制。第二层包括：统一的方法论和机器人构造技术（第 2 篇，包含 9 章），感觉和认知（第 3 篇，包含 7 章），操作与接口（第 4 篇，包含 8 章），移动式和分布式机器人（第 5 篇，包含 8 章）。第三层则致力于更先进的应用，比如在战争和服务领域的机器人（第 6 篇，包含 14 章）以及以人为中心和类生命机器人（第 7 篇，包含 9 章）。

第 1 篇介绍了在模型、设计和控制机器人系统中用到的基本原则和方法。包括运动学、动力学、力学设计和驱动、感觉和评价、运动规划、运动控制、力控制、机器人体系结构与程序设计、用于任务规划和学习的机器人智能推理方法。本篇每一章分别阐述了上述的某个主题。在后续部分中，这些主题将被拓展和应用到特殊的机器人结构和系统中。

第 2 篇涉及机器人在实际物理实现过程中的设计、模型、运动计划和控制等问题。包括一些更加明

显的机器人结构，如臂、腿、手，轮式移动机器人和平台，以及一些在毫米、纳米量级的机器人结构。其中一些章节阐述了评价指标和模型辨识，并成功分析了串联冗余度机构、并联机构、柔性机器人、机器手、机器腿，轮式机器人以及微米和纳米尺度机器人。

第3篇涵盖了机器人的不同感觉形态和跨时空传感数据整合。这将用于生成机器人模型及外部环境。机器人学是感知和行动的智能耦合。第3篇内容是对第2篇的补充，着重于继续建立一个系统。本篇包括接触感知、本体感知和外体感知，同时展示了主要的传感器类型，如触觉、视觉里程计、全球定位系统、测距和视觉。还包含了基本的传感器模型和多传感器信息融合。其中关于感觉融合的章节介绍了跨时空感觉信息集成所需的数学工具。

第4篇介绍了机器人与物体之间，机器人与人之间，机器人之间的交互。操作能通过臂或手指的直接接触或仅仅是推动来处理一个物体。接口能使人机交互变得直接或间接。为了提高机器人操作的灵巧度，本篇的前半部分介绍了诸如操作任务的动作、接触模拟和操作、抓取、协同操作等问题。为实现更熟练的操作或更强大的人/机系统，后半部分讨论了触觉理论、遥操作机器人、网络遥控机器人和让人类机能增强的外骨骼系统。

第5篇涵盖了各种问题。本篇介绍了轮式机器人运动规划和控制，同时考虑了运动约束条件、认知和世界模型、同步定位与建图、控制架构方面的集成等的影响。移动机器人确实是复杂集成系统的典范。本篇在移动机器人背景下补充了第1篇的基础原理，给出了感知的角色地位，在传感方面与第3篇紧密联系。另外，还讨论了多机器人交互和系统、模块化、可重构机器人，也介绍了网络机器人。

第6篇介绍野外机器人和可在所有环境中工作的应用型服务机器人。包括工业机器人，各种各样的在海、陆、空、航天领域应用的机器人，直至教学机器人。本篇以第1篇~第5篇的内容为基础，描述了如何令机器人工作。

第7篇介绍了如何创建在以人为中心的环境中工作的机器人，包括仿人（或称为拟人）或者仿其他生物外观的机器人的设计、传感、传动、驱动与控制结构，演示编程和安全性编程的用户界面内容，机器人的社会伦理性启示。

本手册不仅为机器人专家而写，也为将机器人作为扩展领域的初学者（工程师、医师、计算机科学家和设计师）提供了宝贵的资源。尤其要强调的是，第1篇的指导价值对于研究生和博士后很重要，第2篇~第5篇对于机器人领域所覆盖的研究有着很重要的科研价值，第6篇和第7篇对于对新应用感兴趣的工程师和科学家有着很大的附加价值。

本书各章的内容均经过仔细斟酌，待验证的方法和尚未完全成立的方法均未列人。本手册从客观的角度出发，包含多种方法，具有高的收藏价值。每章都有一个简短的摘要，并且在概述部分介绍了相关领域的技术发展水平。主体部分是以一种教学方式来阐述的。尽可能避免冗长的数学推导，方程、表格和算法均以便于使用的形式给出。最后一节给出了结论和题目，以供进一步阅读。

从机器人的基础开始到最后讲述机器人的社会意义和伦理启示，本书的64章全面收集了机器人领域在50年之中的进展。这是对机器人领域取得成就的一种证明，也是将来新的前沿机器人取得更大进展的保证。

# 第1篇　机器人学基础

**David E. Orin 编辑**

**第1章　运动学**
Kenneth Waldron，美国斯坦福
James Schmiedeler，美国哥伦比亚

**第2章　动力学**
Roy Featherstone，澳大利亚堪培拉
David E. Orin，美国哥伦比亚

**第3章　机构与驱动**
Victor Scheinman，美国斯坦福
J. Michael McCarthy，美国欧文

**第4章　传感与估计**
Henrik I. Christensen，美国亚特兰大
Gregory D. Hager，美国巴尔的摩

**第5章　运动规划**
Lydia E. Kavraki，美国休斯顿
Steven M. LaValle，美国厄巴纳

**第6章　运动控制**
Wankyun Chung，韩国浦项
Li-Chen Fu，中国台湾台北
Su-Hau Hsu

**第7章　力控制**
Luigi Villani，意大利那不勒斯
Joris De Schutter，比利时鲁汶海弗莱

**第8章　机器人体系结构与程序设计**
David Kortenkamp，美国休斯顿
Reid Simmons，美国匹兹堡

**第9章　机器人智能推理方法**
Joachim Hertzberg，德国奥斯纳布吕克
Raja Chatila 法国图卢兹

第1篇机器人基础介绍了用于开发机器人系统的基本原理和方法。为了完成关于机器人理论的任务，已经攻破了许多运动学、动力学、设计、驱动、传感、运动规划、控制、程序设计和任务规划中的挑战性难题。本篇章节阐述了上述领域里的最基本的问题。其中关于机器人的一些基本问题概述如下。通常，机器人有多个自由度，所以它可以完成一系列必需的三维运动。为了完成一项任务，关节驱动器的运动和转矩、要求的运动和力的运动学和动力学关系会非常复杂。为了完成要求的动作，连杆、关节结构、驱动的设计也是一项挑战。机器人是非线性耦合系统，其动力学非常复杂，因此难于控制。当环境变得不确定时，控制机器人将会变得更加复杂，所以也就需要精确的传感和估计技术。

除了控制运动，当操控物体或者与人交互时，就需要控制机器人和环境间的相互作用力。一项基本的机器人学任务就是让复杂物体，在充满了障碍物的场地，从出发点运动到目的地而不与任何障碍物发生碰撞，这是一个非常棘手的计算难题。为了达到人类的智能，机器人需要装备一些精密的任务规划控制器，这种装置可以部分感知环境，在动力学方面拥有一些象征性的分析判断能力。机器人的软件构架因为这些需求也相应地会有一些特殊要求。

本篇将详细阐述，以上段落概要介绍的基本问题，但是更加深入的了解需要参照其他相关手册。本篇介绍的运动学、动力学、机械设计、控制原理可以应用到机器人的结构中，这些结构包括臂、手和腿（第2篇），也可以应用到机械臂（第4篇）、轮式机器人（第5篇）、服务机器人（第6篇）。力的控制对于操控器和它的接口（第4篇）来说尤为重要。这里阐述的基本传感和估计技术已经充分发展，而且已经应用到特殊的传感系统中，这将会在第3篇进行介绍。运动规划在操控器（第4篇）和移动式与分布式机器人系统（第5篇）中是一个很重要的方面。

机器人的系统构架和人工智能的推理理论在运动学、机械动力设计、控制原理和分布式机器人学（第5篇）、以人为中心和仿生机器人学（第7篇）中起到特别重要的作用。

了解第1篇的概述后，我们下面提供关于每章的简要概述。

第1章运动学，提供大量的表示法和惯例来描述在机器人装置中物体的运动。其中包括旋转矩阵、欧拉角、四元法、齐次变换、旋转变换、矩阵指数参数化、普吕克坐标系。提供了所有普通的关节类型的运动学表示方法，同时也提供修正形式的D-H参数法。这些坐标表示法会被应用到计算工作空间、正运动学或者逆运动学、正瞬时运动学和逆瞬时运动学、雅可比行列式和静态扭转传动中。

第2章动力学，介绍动力学方程，从而可以得出驱动和作用在机器人上接触力的关系，以及力所导致的加速度运动轨迹。提供了有效的算法，以此来计算重要的运动学问题，包括逆动力学、正动力学、关节空间惯性矩阵和操作空间惯性矩阵。这种算法可能会被应用到固定基座机器人、移动机器人、并联机器人中。这种简洁的表达式算法是由于需要用六维空间运动来描述刚体的速度、加速度、惯性等。

第3章机构与驱动，聚焦于机器人系统的设计和构建的指导原则。用运动学方程和雅可比行列式来描述工作空间和机械性能优点，并以此来指导机器人尺寸和关节布置。串联机器人或相似类型的机器人都可以处理。设计关节结构和选择驱动器、传动机构要考虑到实际情况。还介绍了速度、加速度、可重复性及其他措施方面的机器人性能。

第4章传感与估计，简要介绍了在机器人学中具有广泛适用性的传感理论与估计技术。这些理论和技术提供有关环境和机器人系统状态的信息。主要按照传感、特征提取、数据融合、参数估计和模型集成等来介绍。介绍和描述了多种常规传感形式。在线性和非线性理论系统中讨论了估计理论，包括统计估计、卡尔曼滤波器和基于采样的理论。也介绍了一些常用的估计表示法。

第5章运动规划，在充满了障碍物的地方，对于复杂的机体，完成从出发点到目的地的过程中不碰撞任何物体是机器人的基本任务。介绍基本的路线设计难题（钢琴搬运者难题），这一章仅集中于基于样品的规划理论，因为它具有非常广泛的适用性。根据各种不同的限制条件进行规划是一种缜密的行为，而且对于轮式移动机器人也是非常重要的。相对于基本的运动规划而言，扩展的、变化的，也可以说更加高级的问题将会在章节的末尾讨论。

第6章运动控制，集中于精确的机器人操作器的运动控制。面临的主要挑战是非线性耦合动力学和组织的或非组织的不确定因素。这一章讨论的主题用于解决复杂的动力学问题，包括从独立关节控制和PID（比例-积分-微分）控制到计算转矩控制。适应性和强健控制用于处理系统不确定性问题。这章最后以可重复性运动的数字化实现和认知控制的一些实际思考作为结束。

第7章力控制，集中于机器人系统和它的外在环境的相互作用力的控制。这一章将相互作用力的控制

分成两类：间接和直接的力的控制。它们的区别在于完成力的控制不带有（间接）或带有（直接）明确终止力的反馈环路。阻抗控制和混合力或者运动控制分别是这两种控制类型的代表。相互作用任务的基本问题的模型被表达出来，它为力控制策略奠定基础。

第8章机器人体系结构与程序设计，介绍软件架构和用于发展机器人系统的辅助性程序设计工具和环境。机器人架构有特殊的要求，这是不确定、动态的环境和机器人相互作用的必然要求。这一章讨论分层机器人控制构架——行为控制、执行领导和任务计划者——组件的主要类型和相互连接这些组件的常用技术。

第9章机器人智能推理方法，描述了目前在基于符号的推理理论和应用方面的人工智能的工艺水平，这方面的人工智能被认为是和机器人学最为相关的。因为动态的和部分未知的工作环境，所以在移动机器人上推理被认为是极具挑战性的。这一章描述了知识表达和推断，覆盖了逻辑学和概率论的方法。除了推理理论，这一章还考虑了遗传推理应用，即动作规划与机器人学习。

# 第1章 运 动 学

肯尼思·沃尔德伦，詹姆斯·斯密德勒
(Kenneth Waldron，James Schmiedeler)
徐德 译

运动学涉及机器人机构中物体的运动，但并不考虑引起运动的力/力矩。由于机器人机构是为运动而精心设计的，所以运动学是机器人的设计、分析、控制和仿真的基础。机器人学领域的学者一直致力于运用位置、姿态以及它们对时间导数的不同表示方式，解决基本的运动学问题。

本章将给出物体在空间中的位置和方位的最有用的表示方式、机器人机构中最常见的关节运动学，以及表示机器人机构几何学的常用约定。这些表示工具将被用于计算机器人机构的工作空间、正向和逆向运动学、正向和逆向微分运动学、静力变换。简而言之，本章将重点放在用于开链机构的算法。

本章的目的是为读者以列表形式提供一系列通用工具，并简要介绍用于解决特定机器人机构运动学问题的主要算法。



## 1.1 概述

除非明确说明，否则，机器人机构是指由关节连接的刚体所构成的系统。刚体在空间的位置和姿态统称为位姿。因此，机器人运动学描述的是位姿、速度、加速度，以及构成机构的物体位姿的高阶导数。由于运动学不涉及引起运动的力/力矩，本章重点讨论位姿和速度。这些介绍是动力学（第2章）、运动规划（第5章）、运动控制（第6章）算法的基础。

在物体连接的众多可能拓扑中，有两种拓扑在机器人中特别重要，分别是串联链式机构和全并联机构。若刚体系统中的每一个中间刚体均与其他两个刚体连接，第一个和最后一个刚体只与一个刚体连接，则该刚体系统为串联链式机构。若刚体系统中的两个刚体通过多个关节连接，则该刚体系统为全并联机构。实际上，每一个关节本身就是一个串联链。本章主要着眼于用于串联链的算法，并联机构将在第12章详细讨论。

## 1.2 位置与姿态表示

在空间上，刚体运动学可以看做是物体位姿不同表示方法的对比研究。平移和旋转，两者结合称为刚体的偏移，也采用这些表示进行表达。没有哪一种方法对所有的问题都是最优的，每一种方法对解决不同

的问题各有优势。

在欧几里德空间中，对一个物体定位的最少坐标数量为6。许多空间位姿表示法采用上界坐标集，其中的坐标之间存在辅助关系。独立的辅助关系数量为6，它不同于坐标数量。

本章及后续章节频繁使用参考坐标系或简称坐标系。一个参考坐标系 $i$ 由坐标原点和3个相互正交的基矢量构成，固定于特定的物体上。坐标原点记为 $O_i$，基矢量记为 $(\hat{x}_i \quad \hat{y}_i \quad \hat{z}_i)$。一个物体的位姿总是相对于其他的物体进行表达，故它可以表示为一个坐标系相对于另一个坐标系的位姿。类似地，一个刚体的偏移可以表示为两个坐标系之间的偏移，其中一个刚体可以看做是运动的，另一个刚体看做是固定的。这表示观测者位于固定坐标系下的固定位置，并不存在任何绝对固定的坐标系。

### 1.2.1 位置与平移

坐标系 $i$ 的原点相对于坐标系 $j$ 的位置可以表示为 $3\times1$ 的矢量

$$
{}^j\boldsymbol{p}_i = \begin{pmatrix} {}^jp_i^x \\ {}^jp_i^y \\ {}^jp_i^z \end{pmatrix}
$$

该矢量中的元素是 $\boldsymbol{O}_i$ 在坐标系 $j$ 中的笛卡儿坐标，是矢量 ${}^j\boldsymbol{p}_i$ 在相应坐标轴上的投影。该矢量中的元素也可以表示为 $\boldsymbol{O}_i$ 在坐标系 $j$ 中的球面或柱面坐标，以有利于分析具有球关节或柱关节的机器人机构。

平移是指这样的偏移，刚体上的任何一点不再处于其初始位置，刚体上的所有直线平行于其初始方向（点和直线不是必须包含在某刚体的边界上，然而，空间中的任何点和直线都可以被认为严格固定在物体上）。一个物体在空间的平移，可以表示为平移前后的位置。相反，一个物体的位置可以表示为平移，即从一个固定于物体的坐标系与固定坐标系一致的位置，移动到当前的固定于物体的坐标系与固定坐标系不一致的位置。因此，任何位置的表示方法均可用于表示平移，反之亦然。

### 1.2.2 姿态与旋转

与位置相比，姿态的表示方法更加丰富。本节并不罗列所有的姿态表示方法，仅给出机器人中最常用的姿态表示方法。

旋转是指这样的偏移，刚体上至少有一点处于其初始位置，不是刚体上的所有直线平行于其初始方向。例如，一个物体在圆轨道上绕一个过圆心的轴旋转，在旋转轴上的任一点是物体上保持初始位置的点。与表示位置的平移一样，任何表示姿态的方法均可表示旋转，反之亦然。

**1. 旋转矩阵**

坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的姿态可以利用基矢量 $(\hat{x}_i \quad \hat{y}_i \quad \hat{z}_i)$ 在基矢量 $(\hat{x}_j \quad \hat{y}_j \quad \hat{z}_j)$ 中形成的矢量表示。形成的矢量记为 $({}^j\hat{x}_i \quad {}^j\hat{y}_i \quad {}^j\hat{z}_i)$，改写成 $3\times3$ 矩阵，称为旋转矩阵。${}^j\boldsymbol{R}_i$ 中的元素是两个坐标系基矢量的点积。

$$
{}^j\boldsymbol{R}_i = \begin{pmatrix} \hat{x}_i\cdot\hat{x}_j & \hat{y}_i\cdot\hat{x}_j & \hat{z}_i\cdot\hat{x}_j \\ \hat{x}_i\cdot\hat{y}_j & \hat{y}_i\cdot\hat{y}_j & \hat{z}_i\cdot\hat{y}_j \\ \hat{x}_i\cdot\hat{z}_j & \hat{y}_i\cdot\hat{z}_j & \hat{z}_i\cdot\hat{z}_j \end{pmatrix} \tag{1.1}
$$

因为基矢量是单位矢量，而且任何两个单位矢量的点积是其夹角的余弦，所以上述元素被称为方向余弦。

一个基本旋转是坐标系 $i$ 绕 $\hat{z}_j$ 轴旋转角度 $\theta$ 形成的矩阵

$$
\boldsymbol{R}_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}
$$

绕 $\hat{y}_j$ 轴旋转角度 $\theta$ 形成的矩阵

$$
\boldsymbol{R}_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.3}
$$

绕 $\hat{x}_j$ 轴旋转角度 $\theta$ 形成的矩阵

$$
\boldsymbol{R}_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.4}
$$

旋转矩阵 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 含有9个元素，其中只有3个参数是定义物体在空间的姿态所需要的。因此，旋转矩阵的元素中具有6个辅助关系。因为坐标系 $i$ 的基矢量是相互正交的，坐标系 $j$ 的基矢量也是相互正交的，所以由这些正交矢量的点积形成的 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 的列矢量也是正交的。由正交矢量构成的矩阵称为正交矩阵，它具有一个特性，即其逆矩阵是其转置矩阵。该特性决定了其6个辅助关系，其中3个关系为列矢量具有单位长度，另外3个关系为列矢量相互正交。另外，旋转矩阵的正交性对于逆序坐标系依然成立。坐标系 $j$ 相对于坐标系 $i$ 的姿态为旋转矩阵 ${}^i\boldsymbol{R}_j$，显然，${}^i\boldsymbol{R}_j$ 的行矢量即为 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 的列矢量。旋转矩阵通过简单的矩阵相乘相结合，可以获得坐标系 $i$ 相对于坐标系 $k$ 的姿态

$$^kR_i = {^kR_j}\, {^jR_i}$$

总之，$^jR_i$ 是一个将坐标系 $i$ 中表示的矢量转换为坐标系 $j$ 中表示的矢量的旋转矩阵，它提供坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的姿态表示，也可表示为坐标系 $i$ 到坐标系 $j$ 的旋转。表 1.1 列出了本节中其他姿态表示的等价变换矩阵，表 1.2 给出了从旋转矩阵到其他姿态表示的转换。

**表 1.1 其他姿态表示的等价变换矩阵，缩写 $c_\theta=\cos\theta$，$s_\theta=\sin\theta$，$v_\theta=1-\cos\theta$**

| |
|---|
| $Z$-$Y$-$X$ 欧拉角（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）：<br>$^jR_i=\begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha c_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{pmatrix}$ |
| $X$-$Y$-$Z$ 固定角（$\psi$，$\theta$，$\phi$）：<br>$^jR_i=\begin{pmatrix} c_\phi c_\theta & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{pmatrix}$ |
| 角-轴 $\theta\hat{w}$：<br>$^jR_i=\begin{pmatrix} w_x^2 v_\theta + c_\theta & w_x w_y v_\theta - w_z s_\theta & w_x w_z v_\theta + w_y s_\theta \\ w_x w_y v_\theta + w_z s_\theta & w_y^2 v_\theta + c_\theta & w_y w_z v_\theta - w_x s_\theta \\ w_x w_z v_\theta - w_y s_\theta & w_y w_z v_\theta + w_x s_\theta & w_z^2 v_\theta + c_\theta \end{pmatrix}$ |
| 单位四元数（$\varepsilon_0$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$）$^T$：<br>$^jR_i=\begin{pmatrix} 1-2(\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_0\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_0\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_0\varepsilon_3) & 1-2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_0\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_0\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_0\varepsilon_1) & 1-2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2) \end{pmatrix}$ |

**表 1.2 从旋转矩阵到其他姿态表示的转换**

| |
|---|
| 旋转矩阵：<br>$^jR_i=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ |
| $Z$-$Y$-$X$ 欧拉角（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）：<br>$\beta=\mathrm{Atan2}(-r_{31},\ \sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2})$<br>$\alpha=\mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\beta},\ \frac{r_{11}}{\cos\beta}\right)$<br>$\gamma=\mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\beta},\ \frac{r_{33}}{\cos\beta}\right)$ |

（续）

| |
|---|
| $X$-$Y$-$Z$ 固定角（$\psi$，$\theta$，$\phi$）：<br>$\theta=\mathrm{Atan2}(-r_{31},\ \sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2})$<br>$\phi=\mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\theta},\ \frac{r_{11}}{\cos\theta}\right)$<br>$\psi=\mathrm{Atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\theta},\ \frac{r_{33}}{\cos\theta}\right)$ |
| 角-轴 $\theta\hat{w}$：<br>$\theta=\arccos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)$<br>$\hat{w}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{pmatrix}$ |
| 单位四元数（$\varepsilon_0$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$）$^T$：<br>$\varepsilon_0=\frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$<br>$\varepsilon_1=\frac{r_{32}-r_{23}}{4\varepsilon_0}$<br>$\varepsilon_2=\frac{r_{13}-r_{31}}{4\varepsilon_0}$<br>$\varepsilon_3=\frac{r_{21}-r_{12}}{4\varepsilon_0}$ |

### 2. 欧拉角

作为一个最小表示，坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的姿态可表示为 3 个角（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）的一个矢量。这些角被称为欧拉角，每个角代表绕一个轴的旋转。在这种方式下，每个轴的相继旋转取决于以前的旋转，旋转的顺序需与定义姿态的 3 个角的顺序一致。例如，本手册使用符号（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$）表示 $Z$-$Y$-$X$ 欧拉角，其含义如下：在初始状态下运动坐标系 $i$ 与固定坐标系 $j$ 重合，$\alpha$ 是坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴的旋转，$\beta$ 是坐标系 $i$ 的 $\hat{y}$ 轴的旋转，$\gamma$ 是坐标系 $i$ 的 $\hat{x}$ 轴的旋转。其等价变换矩阵 $^jR_i$ 见表 1.1。$Z$-$Y$-$Z$ 和 $Z$-$X$-$Z$ 欧拉角是 12 种其他顺序旋转中的另外两种常用的表示方式。

无论旋转顺序如何，当第一次和最后一次旋转在同一个轴上时，欧拉角姿态表示会存在奇异问题。由表 1.2 可知，当 $\beta=\pm 90°$ 时，角 $\alpha$ 和 $\gamma$ 难以区分（对于 $Z$-$Y$-$Z$ 和 $Z$-$X$-$Z$ 欧拉角，当第 2 次旋转为 0° 或 180° 时，同样存在奇异问题）。这就出现了一个与角速度矢量（即欧拉角对时间的导数）相关的问题，它会在某种程度上限制欧拉角在机器人系统建模上的应用。$Z$-$Y$-$X$ 欧拉角的角速度关系为

$$\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\beta & 0 & 1\\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ \cos\beta\cos\gamma & -\sin\beta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \quad (1.5)$$

**3. 固定角**

坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的姿态也可表示为另外3个角的一个矢量，其中每个角代表绕固定坐标系一个轴的旋转。相应地，这些角被称为固定角，旋转的顺序需与重新定义姿态的3个角的顺序一致。其中，定义为（$\psi$，$\theta$，$\phi$）的 $X$-$Y$-$Z$ 固定角，是在12种可能的旋转顺序中常用的一种。运动坐标系 $i$ 与固定坐标系 $j$ 在初始状态下重合，$\psi$ 是绕固定轴 $\hat{x}_j$ 的旋转，称为偏转；$\theta$ 是绕固定轴 $\hat{y}_j$ 轴的旋转，称为俯仰；$\phi$ 是绕固定轴 $\hat{z}_j$ 轴的旋转，称为横滚。

其旋转的顺序根据这些角定义。每个角代表绕一个轴的旋转。比较表1.1中的相应等价旋转变换和表1.2中的相应转换，可以发现，$X$-$Y$-$Z$ 固定角与 $Z$-$Y$-$X$ 欧拉角是等价的，而且 $\alpha=\phi$，$\beta=\theta$，$\gamma=\psi$。上述结果表明，绕固定坐标系的3个轴旋转定义的姿态，与以相反顺序绕运动坐标系的3个轴旋转定义的姿态相同。同样，所有方式的固定角表示的姿态也像欧拉角表示的姿态那样，具有奇异问题。固定角对时间的导数与角速度矢量之间的关系，也类似于欧拉角对时间的导数与角速度矢量之间的关系。

**4. 角-轴**

一个角度 $\theta$ 与一个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 相结合，也可以表示坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的姿态。在这种情况下，坐标系 $i$ 绕相对于坐标系 $j$ 定义的矢量 $\hat{w}=(w_x \quad w_y \quad w_z)^{\mathrm{T}}$ 旋转角度 $\theta$。矢量 $\hat{w}$ 为有限旋转的等价轴。角-轴表示方式常记作 $\theta\hat{w}$ 或（$\theta w_x \quad \theta w_y \quad \theta w_z$）$^{\mathrm{T}}$。角-轴表示方式因采用4个参数，故具有一个冗余参数。辅助关系是矢量 $\hat{w}$ 为单位矢量，即其模长为1。即使存在该辅助关系，角-轴表示方式也不是唯一的，这是因为绕矢量 $-\hat{w}$ 旋转 $-\theta$ 与绕矢量 $\hat{w}$ 旋转 $\theta$ 是等价的。表1.3给出了角-轴表示与单位四元数的姿态表示之间的转换。这两种表示与欧拉角或固定角之间的转换见表1.2，与等价旋转矩阵之间的转换见表1.1。利用密切相关的四元数表示，更容易处理速度关系。

**5. 四元数**

四元数表示姿态起源于 Hamilton[1.1]，进而由 Gibbs[1.2] 和 Grassmann[1.3] 改进为更简化的矢量，它对于解决机器人学中的矢量/矩阵表示的奇异问题非常有用[1.4]。四元数不像欧拉角那样具有奇异问题。

**表1.3 角-轴表示与单位四元数的姿态表示之间的转换**

| |
|---|
| 角-轴 $\theta\hat{w}$ 到单位四元数 $(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}$： |
| $\varepsilon_0=\cos\dfrac{\theta}{2}$ |
| $\varepsilon_1=w_x\sin\dfrac{\theta}{2}$ |
| $\varepsilon_2=w_y\sin\dfrac{\theta}{2}$ |
| $\varepsilon_3=w_z\sin\dfrac{\theta}{2}$ |
| 单位四元数 $(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}$ 到角-轴 $\theta\hat{w}$： |
| $\theta=2\arccos\varepsilon_0$ |
| $w_x=\dfrac{\varepsilon_1}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ |
| $w_y=\dfrac{\varepsilon_2}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ |
| $w_z=\dfrac{\varepsilon_3}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ |

四元数定义为如下形式：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_0+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2 j+\varepsilon_3 k$$

式中，元素 $\varepsilon_0$、$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$ 是比例因子，有时也称为欧拉参数；$i$、$j$、$k$ 是算子。这些算子的定义符合如下规则：

$$ii=jj=kk=-1,\ ij=k,\ jk=i,$$
$$ki=j,\ ji=-k,\ kj=-i,\ ik=-j$$

两个四元数相加时，将对应的元素分别相加。因此，算子的作用像分离器。对于加法，空元素为四元数 $\mathbf{0}=0+0i+0j+0k$。四元数的相加符合结合律、交换律和分配律。对于乘法，空元素为四元数 $\boldsymbol{I}=1+0i+0j+0k$。对于任意四元数 $\boldsymbol{\varepsilon}$，有 $\boldsymbol{I\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}$ 成立。四元数的相乘符合结合律和分配律，但不符合交换律。由算子规则和加法，得到四元数的相乘形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}=&a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+\\&(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)i+\\&(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)j+\\&(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1)k\end{aligned} \quad (1.6)$$

定义四元数的补

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\varepsilon_0-\varepsilon_1 i-\varepsilon_2 j-\varepsilon_3 k$$

因此，

$$\boldsymbol{\varepsilon}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_0^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$$

一个单位四元数定义为$\boldsymbol{\varepsilon}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=1$。通常，$\varepsilon_0$称为四元数的比例部分，$(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}$称为矢量部分。

单位四元数用于描述姿态，其单位模长为用于解决冗余坐标（4坐标）的辅助关系。以四元数定义的矢量为$\varepsilon_0=0$的四元数。因此，矢量$\boldsymbol{p}=(p_x \quad p_y \quad p_z)^{\mathrm{T}}$可以表示为四元数$\boldsymbol{p}=p_x i+p_y j+p_z k$。对于任意单位四元数$\boldsymbol{\varepsilon}$，操作$\boldsymbol{\varepsilon p}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$执行的是矢量$\boldsymbol{p}$绕$(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3)^{\mathrm{T}}$方向的旋转，这可以通过展开$\boldsymbol{\varepsilon p}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$并比较表1.1中的等价旋转矩阵验证。如表1.3所示，单位四元数与角-轴姿态表示密切相关，$\varepsilon_0$代表了转角，而$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$代表了转轴。

对于速度分析，四元数对时间的导数可与角速度矢量建立联系：

$$\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}_0\\ \dot{\varepsilon}_1\\ \dot{\varepsilon}_2\\ \dot{\varepsilon}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2\\ -\varepsilon_3 & \varepsilon_0 & \varepsilon_1\\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

当一个单位四元数仅表示一个物体的姿态时，四元数可以被二元化[1.5-7]为一个描述物体空间位置和姿态的代数式。其他复合式表示将在后面介绍。

### 1.2.3 齐次变换

前面分别介绍了位置和姿态的表示。利用齐次变换，位置矢量和旋转矩阵可以用更加简洁的方式结合在一起。如果$i$坐标系相对于$j$坐标系的位置和姿态已知，那么$i$坐标系中的任一矢量${}^i\boldsymbol{r}$也可以表示为$j$坐标系中的矢量。利用1.2.1节中的符号，坐标系$i$的原点相对于坐标系$j$的位置可表示为矢量${}^j\boldsymbol{p}_i=({}^jp_i^x \quad {}^jp_i^y \quad {}^jp_i^z)^{\mathrm{T}}$。利用1.2.2节中的符号，坐标系$i$相对于坐标系$j$的姿态可用${}^j\boldsymbol{R}_i$表示。这样，

$${}^j\boldsymbol{r}={}^j\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{r}+{}^j\boldsymbol{p}_i \tag{1.8}$$

该方程可重写为

$$\begin{pmatrix}{}^jr\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^jR_i & {}^jp_i\\ 0^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^ir\\ 1\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

其中

$${}^j\boldsymbol{T}_i=\begin{pmatrix}{}^jR_i & {}^jp_i\\ 0^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

是4×4的齐次变换矩阵。$({}^j\boldsymbol{r} \quad 1)^{\mathrm{T}}$和$({}^i\boldsymbol{r} \quad 1)^{\mathrm{T}}$是位置矢量${}^j\boldsymbol{r}$和${}^i\boldsymbol{r}$的齐次表示。矩阵${}^j\boldsymbol{T}_i$将坐标系$i$中的矢量变换为坐标系$j$中的矢量，其逆矩阵${}^j\boldsymbol{T}_i^{-1}$将坐标系$j$中的矢量变换为坐标系$i$中的矢量。

$${}^j\boldsymbol{T}_i^{-1}={}^i\boldsymbol{T}_j=\begin{pmatrix}{}^jR_i^{\mathrm{T}} & -{}^jR_i^{\mathrm{T}}\,{}^jp_i\\ 0^T & 1\end{pmatrix} \tag{1.11}$$

4×4齐次变换矩阵的代数运算只是简单的矩阵相乘，正如3×3的旋转矩阵一样。因此，有${}^k\boldsymbol{T}_i={}^k\boldsymbol{T}_j{}^j\boldsymbol{T}_i$成立。由于矩阵乘法不能交换，所以其顺序非常重要。

绕一个轴的纯旋转的齐次变换有时记为$\boldsymbol{Rot}$。于是，绕轴$\hat{z}$旋转$\theta$角度记为

$$Rot(\hat{z},\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.12}$$

类似地，沿一个轴的纯平移有时记为$\boldsymbol{Trans}$。于是，沿轴$\hat{x}$平移$d$记为

$$\boldsymbol{Trans}(\hat{x},d)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & d\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

当希望符号简洁时，当编程的容易程度是最需要考虑的因素时，齐次变换是特别具有吸引力的。但是，由于它引入了大量含有0和1的附加乘法运算，所以它并不是一种计算效率好的表示。尽管齐次变换矩阵具有16个元素，但有4个元素被定义为0或1，剩余的元素则包括一个旋转矩阵和一个位置矢量。因此，真正的冗余坐标来自旋转矩阵部分，相应的辅助关系也与旋转矩阵有关。

### 1.2.4 旋量变换

式（1.8）的变换可以看作是坐标系$i$和坐标系$j$之间旋转和偏移的复合变换。从坐标系$i$变换到坐标系$j$时，应先进行旋转再进行偏移，反之亦然。再者，除纯平移之外，两个坐标系之间的偏移可以表示为绕特定直线的旋转和沿该直线的纯平移。

**1. Chasles定理**

Chirikjian和Kyatkin[1.8]给出的Chasles定理，由两部分构成。

第一部分为：物体在空间中的任一偏移可以认为由平移和旋转组成，即指定点从初始点到终点的纯平移，以及物体绕指定点使之到达到终点姿态的旋转。

第二部分为：物体在空间中的任一偏移可以表示为绕空间特定直线的旋转和沿该直线的纯平移。该直线称为旋量轴，是Chasles定理的第二个结论。

Chasles定理的第一部分是显而易见的。在欧几里德空间中物体上的任意一个指定点，可以被从一个给定的初始位置转移到一个给定的终点位置。更进一步，物体上的所有点作同样的偏移，则物体进行了平移，指定点也就从其初始位置移动到其终点位置。然后，物体可绕指定点旋转到任意给定的终点姿态。

Chasles 定理的第二部分依赖于空间偏移的表示，需要进行更为复杂的论证。欧拉的一个预备定理可以更加明确地说明物体的旋转：物体保持一点固定的任何偏移，等价于物体绕通过该固定点的一个特定轴的旋转。几何上，在运动物体的三个嵌入点中，若有一点在旋转时是固定点，则其他两点中的任何一点将有初始位置和终点位置。连接其初始位置和终点位置形成一条直线段，该直线段的中垂面必然通过上述固定点。在一个中垂面上的任意一条直线均可能是含有相应点的初始位置和终点位置的旋转的旋转轴。因此，两个中垂面的唯一公共线即为包含物体上任意点的初始位置和终点位置的旋转的旋转轴。刚体的刚性条件，决定了物体上包含上述旋转轴直线的所有平面旋转了相同的角度。

欧拉定理指出，对于由 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 描述的一个刚体的任意旋转，存在唯一的特征矢量使得

$$ {}^j\boldsymbol{R}_i\hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{w}} \tag{1.14} $$

式中，$\hat{\boldsymbol{w}}$ 是一个平行于旋转轴的单位矢量。该表达式说明，${}^j\boldsymbol{R}_i$ 有一个单位特征矢量对应于特征矢量 $\hat{\boldsymbol{w}}$。剩余的两个特征矢量为 $\cos\theta \pm i\sin\theta$，其中 $i$ 是复数操作符，$\theta$ 是物体绕旋转轴的旋转角。

结合 Chasles 定理的第一部分和欧拉定理，一个通用的空间偏移可以表示为将一个点从初始位置移动到终点位置的平移，以及将物体从初始姿态运动到终点姿态的、绕着通过该点的特定轴的特定旋转。将平移分解为沿轴向和垂直于轴向的分量，则物体上任一点在轴向上具有相同的偏移量，这是因为旋转不影响轴向分量。向垂直于轴向的平面投影，则偏移的运动几何与该平面的运动相同。正如在平面上有唯一的一个点，使得物体能够绕着该点在两个给定的位置间旋转，在投影平面上也具有唯一的一个这样的点。正如上述定理所言，若旋转轴通过该点移动，则绕该轴的旋转形成的空间偏移叠加了一个沿该轴的平移。

旋转所绕的直线称为偏移的旋量轴。线性位移 $d$ 对旋转角 $\theta$ 的比率称为旋量轴的距 $h$[1.4]。

$$ d = h\theta \tag{1.15} $$

纯平移的旋量轴不是唯一的。由于平移的旋转角为 0°，所以任何平行于平移方向的直线均可认为是旋量轴，其距为无穷大。

利用平行于旋量轴的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 和在旋量轴上任意点的位置矢量 $\boldsymbol{\rho}$，可最方便地表示任意参考坐标系中的旋量轴。附加的距 $h$ 和旋转角 $\theta$，完整地定义了第二个坐标系相对于参考坐标系的位姿。因此，共有 8 个坐标定义一个旋量变换，其中两个为冗余的。$\hat{\boldsymbol{w}}$ 的模是一个辅助关系，但通常没有第二个辅助关系。这是由于同一个旋量轴是由在其上面的所有点定义的，或者说矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 仅含有一个自由坐标。

代数上，旋量偏移表示为

$$ {}^j\boldsymbol{r} = {}^j\boldsymbol{R}_i({}^i\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) + d\hat{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{\rho} \tag{1.16} $$

比较该式与式（1.8），有

$$ {}^j\boldsymbol{p}_i = d\hat{\boldsymbol{w}} + (\boldsymbol{1}_{3\times3} - {}^j\boldsymbol{R}_i)\boldsymbol{\rho} \tag{1.17} $$

其中，$\boldsymbol{1}_{3\times3}$ 是 3×3 的单位矩阵。方程的两边与 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 进行内积，容易得到 $d$ 的表达式。

$$ d = \hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}\,j}\boldsymbol{p}_i \tag{1.18} $$

矩阵 $\boldsymbol{1}_{3\times3} - {}^j\boldsymbol{R}_i$ 是奇异的，故由式（1.17）不能求解出 $\boldsymbol{\rho}$ 的唯一值。但由于 $\boldsymbol{\rho}$ 可表示旋量轴上的任意点，所以情况并非如此。$\boldsymbol{\rho}$ 的一个元素可以任意选择，而且利用分量方程中的任意两个方程，可以求解得到 $\boldsymbol{\rho}$ 的另外两个元素。然后，在旋量轴上的所有其他点可以由 $\boldsymbol{\rho} + k\hat{\boldsymbol{w}}$ 确定，其中 $k$ 取任意值。

表 1.4 给出了旋量变换与齐次变换之间的转换关系。值得注意的是，旋量变换的等价旋转矩阵，与表 1.1 中姿态的角-轴表示的等价旋转矩阵相同。此外，在表 1.4 中，利用矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 与旋量轴正交（$\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho} = 0$）这一辅助关系，以提供齐次变换到旋量变换的唯一转换。其逆变换，即给定旋量偏移求取旋转矩阵 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 和平移 ${}^j\boldsymbol{p}_i$，采用 Rodrigues 方程求取。

**表 1.4 旋量变换与齐次变换之间的转换，缩写 $c_\theta = \cos\theta$，$s_\theta = \sin\theta$，$v_\theta = 1 - \cos\theta$**

旋量变换到齐次变换：

$$ {}^j\boldsymbol{R}_i = \begin{pmatrix} w_x^2 v_\theta + c_\theta & w_x w_y v_\theta - w_z s_\theta & w_x w_z v_\theta + w_y s_\theta \\ w_x w_y v_\theta + w_z s_\theta & w_y^2 v_\theta + c_\theta & w_y w_z v_\theta - w_x s_\theta \\ w_x w_z v_\theta - w_y s_\theta & w_y w_z v_\theta + w_x s_\theta & w_z^2 v_\theta + c_\theta \end{pmatrix} $$

$$ {}^j\boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{1}_{3\times3} - {}^j\boldsymbol{R}_i)\boldsymbol{\rho} + h\theta\hat{\boldsymbol{w}} $$

齐次变换到旋量变换：

$$ \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} $$

$$ \theta = \mathrm{sign}(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}\,j}\boldsymbol{p}_i)\left|\arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)\right| $$

$$ h = \frac{\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}\,j}\boldsymbol{p}_i}{2\theta\sin\theta} $$

$$ \rho = \frac{(\boldsymbol{1}_{3\times3} - {}^j\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}})\,{}^j\boldsymbol{p}_i}{2(1 - \cos\theta)} $$

$$ \hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{l}}{2\sin\theta} $$

物体上任一点在旋量偏移下的初始和终点位置如图1.1所示。

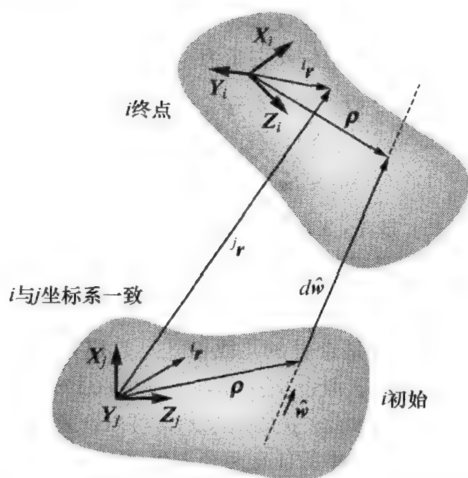



**图1.1 物体上任一点在旋量偏移下的初始和终点位置**

图1.1中，$^i\boldsymbol{r}$ 是该点相对于运动坐标系 $i$ 的位置，在初始位置时，运动坐标系与固定参考坐标系 $j$ 一致；$^j\boldsymbol{r}$ 是运动物体进行旋量偏移后该点相对于固定坐标系 $j$ 的位置

**2. Rodrigues 方程**

给定一个旋量轴、物体绕该轴的角偏移和物体沿该轴的平移，则物体上任一点的偏移可以求解。若将一个矩阵变换看做是物体偏移的描述，则求解旋量偏移等价于求解与给定旋量偏移等价的矩阵变换。

参见图1.1，一个点在旋量偏移前后的位置矢量具有以下几何联系

$$^j\boldsymbol{r} = {}^i\boldsymbol{r} + d\hat{\boldsymbol{w}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{w}} \times ({}^i\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) - (1-\cos\theta)({}^i\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) - ({}^i\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}) \cdot \hat{\boldsymbol{w}}\hat{\boldsymbol{w}} \quad (1.19)$$

式中，$^i\boldsymbol{r}$ 和 $^j\boldsymbol{r}$ 分别表示该点的初始和终点位置，$\hat{\boldsymbol{w}}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 表示旋量轴，$\theta$ 和 $d$ 给出了其偏移量。该结果称为 Rodrigues 方程[1.9]，可重写为矩阵变换形式[1.10]

$$^j\boldsymbol{r} = {}^j\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{r} + {}^j\boldsymbol{p}_i \quad (1.20)$$

式（1.20）展开后，得到含有 $^j\boldsymbol{r}$ 和 $^i\boldsymbol{r}$ 的元素的三个线性方程：

$$^j\boldsymbol{R}_i = \begin{pmatrix} w_x^2 v_\theta + c_\theta & w_x w_y v_\theta - w_z s_\theta & w_x w_z v_\theta + w_y s_\theta \\ w_x w_y v_\theta + w_z s_\theta & w_y^2 v_\theta + c_\theta & w_y w_z v_\theta - w_x s_\theta \\ w_x w_z v_\theta - w_y s_\theta & w_y w_z v_\theta + w_x s_\theta & w_z^2 v_\theta + c_\theta \end{pmatrix}$$

$$^j\boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{1}_{3\times3} - {}^j\boldsymbol{R}_i)\boldsymbol{\rho} + h\theta\hat{\boldsymbol{w}}$$

式中，缩写 $c_\theta = \cos\theta$，$s_\theta = \sin\theta$，$v_\theta = 1-\cos\theta$。该形式下的旋转矩阵 $^j\boldsymbol{R}_i$ 又称为旋量矩阵，这些方程给出的 $^j\boldsymbol{R}_i$ 和 $^j\boldsymbol{p}_i$ 的元素称为旋量参数。

纯平移是一种特殊情况，此时 $\theta=0$，Rodrigues 方程变为

$$^j\boldsymbol{r} = {}^i\boldsymbol{r} + d\hat{\boldsymbol{w}} \quad (1.21)$$

这种情况下，$^j\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{1}_{3\times3}$，$^j\boldsymbol{p}_i = d\hat{\boldsymbol{w}}$。

关于旋量理论的进一步信息参见参考文献[1.11-15]。

### 1.2.5 矩阵指数参数化

物体的位置和姿态也可以用指数表示为统一的格式。该方法首先被引入纯旋转，进而扩展到刚体的运动。该方法的细节参见参考文献［1.16，17］。

**1. 旋转的指数坐标**

所有行列式为1的三阶正交矩阵的集合，即所有旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的集合，是矩阵乘法操作的一个群，记为 $SO(3) \subset \mathbb{R}^{3\times3}$[1.18]。它代表特殊的正交，其特殊之处在于 $\boldsymbol{R}$ 的行列式为 +1 而不是 ±1。该旋转矩阵的集合符合一个群的下述4个公理：

闭包性：$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 \in SO(3) \quad \forall \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in SO(3)$。

一致性：$\boldsymbol{1}_{3\times3}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1}_{3\times3} = \boldsymbol{R} \quad \forall \boldsymbol{R} \in SO(3)$。

可逆性：$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \in SO(3)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的唯一逆 $\forall \boldsymbol{R} \in SO(3)$。

结合性：$(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3) \quad \forall \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3 \in SO(3)$。

在1.2.2节的角-轴表示中，姿态表示为绕单位矢量 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 旋转角度 $\theta$。表1.1中的等价旋转矩阵可以表示为指数形式

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{e}^{S(\hat{\boldsymbol{w}})\theta} = \boldsymbol{1}_{3\times3} + \theta\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}}) + \frac{\theta^2}{2!}\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})^2 + \frac{\theta^3}{3!}\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})^3 + \cdots \quad (1.22)$$

式中，$\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})$ 为斜对称矩阵。

$$\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}}) = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

于是，上述指数表达式将对应于转轴的斜对称矩阵 $\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})$ 转换成了对应于绕轴 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 旋转角度 $\theta$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{R}$。更有利于计算的 $\mathrm{e}^{S(\hat{\boldsymbol{w}})\theta}$ 的闭式解为

$$\mathrm{e}^{S(\hat{\boldsymbol{w}})\theta} = \boldsymbol{1}_{3\times3} + \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})\sin\theta + \boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{w}})^2(1-\cos\theta) \quad (1.24)$$

$(\theta w_x \quad \theta w_y \quad \theta w_z)^{\mathrm{T}}$ 的元素与表1.2中旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的元素相关，称为 $\boldsymbol{R}$ 的指数坐标。

**2. 刚体运动的指数坐标**

正如在1.2.3节所指出的，物体的位置和姿态可以由位置矢量 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ 和旋转矩阵 $\boldsymbol{R} \in SO(3)$ 表示。

$\mathbb{R}^3$ 与 $SO(3)$ 的积空间称为 $SE(3)$ 群，$SE$ 代表特殊欧几里德空间（special Euclidean）。

$$SE(3)=\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{R}):\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{R}\in SO(3)\}$$
$$=\mathbb{R}^3\times SO(3)$$

齐次变换的集合符合一个群的下述4个公理：

闭包性：$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\in SE(3)\quad\forall\boldsymbol{T}_1,\ \boldsymbol{T}_2\in SE(3)$；

一致性：$\mathbf{1}_{3\times3}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\ \mathbf{1}_{3\times3}=\boldsymbol{T}\quad\forall\boldsymbol{T}\in SE(3)$；

可逆性：$\boldsymbol{T}$ 具有唯一的逆，见式（1.11） $\forall\boldsymbol{T}\in SE(3)$；

结合性：$(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2)\boldsymbol{T}_3=\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3)\quad\forall\boldsymbol{T}_1,\ \boldsymbol{T}_2,\ \boldsymbol{T}_3\in SE(3)$。

在1.2.4节的旋量变换表示中，位置和姿态利用绕单位矢量 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 定义的旋量轴旋转的角度 $\theta$、在旋量轴上的点 $\boldsymbol{\rho}$ 和旋量轴的距 $h$ 表示，其中 $\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}=0$。其等价的齐次变换矩阵，见表1.4，也可表示为指数形式

$$\boldsymbol{T}=\mathrm{e}^{\hat{\xi}\theta}=\mathbf{1}_{4\times4}+\hat{\boldsymbol{\xi}}\theta+\frac{(\hat{\boldsymbol{\xi}}\theta)^2}{2!}+\frac{(\hat{\boldsymbol{\xi}}\theta)^3}{3!}+\cdots\tag{1.25}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}=\begin{pmatrix}S(\hat{\boldsymbol{w}}) & \boldsymbol{v}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\tag{1.26}$$

是单位斜对称矩阵的通用化表达式，称为扭曲（twist）。$\hat{\boldsymbol{\xi}}$ 的扭曲坐标记为 $\hat{\boldsymbol{\xi}}=(\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。$\mathrm{e}^{\hat{\xi}\theta}$ 的闭式表达式为

$$\mathrm{e}^{\hat{\xi}\theta}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{S(\hat{\boldsymbol{w}})\theta} & (\mathbf{1}_{3\times3}-\mathrm{e}^{S(\hat{\boldsymbol{w}})\theta})(\hat{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{v})+\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\theta\hat{\boldsymbol{w}}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\tag{1.27}$$

将上述结果与表1.4中的齐次变换和旋量变换之间的转换相比较，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\rho}\times\hat{\boldsymbol{w}}\tag{1.28}$$

且

$$h=\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\tag{1.29}$$

于是，利用扭曲的指数形式，将物体的初始姿态变换到了终点姿态。它给出的是刚体的相对运动。矢量 $\boldsymbol{\xi}\theta$ 含有刚体变换的指数坐标。

对于旋量变换，纯平移的情况是独特的。此时，$\hat{\boldsymbol{w}}=0$，于是

$$\mathrm{e}^{\hat{\xi}\theta}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{3\times3} & \theta\boldsymbol{v}\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\tag{1.30}$$

### 1.2.6 Plücker 坐标

定义一条空间直线最少需要四个坐标。直线的Plücker坐标是一个6维矢量，其冗余数为2。直线的Plücker坐标可以认为是一对3维矢量，一个平行于直线，另一个是矢量对原点的转矩。于是，如果 $\boldsymbol{u}$ 是任一平行于直线的矢量，$\boldsymbol{\rho}$ 是直线上任意点相对于原点的位置，则Plücker坐标（$L$，$M$，$N$，$P$，$Q$，$R$）如下：

$$(\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{N})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}};\ (\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{R})=(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\tag{1.31}$$

对于简单定义的一条直线，$\boldsymbol{u}$ 的幅值既不唯一，$\boldsymbol{\rho}$ 的分量也不平行于 $\boldsymbol{u}$。两个辅助关系是隐含的，它们将Plücker坐标集降低为4个独立坐标。一个辅助关系为：两个3维矢量的标量积恒等于0。

$$\boldsymbol{LP}+\boldsymbol{MQ}+\boldsymbol{NR}\equiv0\tag{1.32}$$

另一个辅助关系为：所有坐标分量同乘以一个系数时指定直线的不变性。

$$(\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{R})\equiv(k\boldsymbol{L},\ k\boldsymbol{M},\ k\boldsymbol{N},\ k\boldsymbol{P},\ k\boldsymbol{Q},\ k\boldsymbol{R})\tag{1.33}$$

该关系也可采用含有单位模长的 $\boldsymbol{u}$ 的形式，此时 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 为方向余弦。

本手册中，常用Plücker坐标表示速度，但与直线的定义不同的是，两个矢量的幅值不是任意的。由此产生了 von Mises[1.9,19] 和 Everett[1.20] 的矢量符号。对于瞬时一致的两个坐标系，一个为固定坐标系，另一个为附着于运动物体的运动坐标系，以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示物体相对于固定坐标系的角速度，以 $\boldsymbol{v}_O$ 表示物体的运动坐标系的原点 $O$ 相对于固定坐标系的速度。这样，就为物体的空间速度 $\boldsymbol{v}$ 提供了Plücker坐标系统。$\boldsymbol{v}$ 的Plücker坐标就是的 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 的笛卡儿坐标。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}_O\end{pmatrix}\tag{1.34}$$

空间速度从Plücker坐标系统 $i$ 到Plücker坐标系统 $j$ 的变换，由空间变换 ${}^j\boldsymbol{X}_i$ 实现。如果利用 $\boldsymbol{v}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_j$ 代表物体相对于坐标系 $i$ 和 $j$ 的空间速度，${}^j\boldsymbol{p}_i$ 和 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 代表坐标系 $i$ 相对于坐标系 $j$ 的位置和姿态，则

$$\boldsymbol{v}_j={}^j\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{v}_i\tag{1.35}$$

其中

$${}^j\boldsymbol{X}_i=\begin{pmatrix}{}^j\boldsymbol{R}_i & \mathbf{0}_{3\times3}\\ S({}^j\boldsymbol{p}_i){}^j\boldsymbol{R}_i & {}^j\boldsymbol{R}_i\end{pmatrix}\tag{1.36}$$

于是

$${}^j\boldsymbol{X}_i^{-1}={}^i\boldsymbol{X}_j=\begin{pmatrix}{}^i\boldsymbol{R}_j & \mathbf{0}_{3\times3}\\ -{}^i\boldsymbol{R}_jS({}^j\boldsymbol{p}_i) & {}^i\boldsymbol{R}_j\end{pmatrix}\tag{1.37}$$

且

$${}^k\boldsymbol{X}_i={}^k\boldsymbol{X}_j\ {}^j\boldsymbol{X}_i\tag{1.38}$$

$S({}^j\boldsymbol{p}_i)$ 是斜对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^jp_i^z & {}^jp_i^y \\ {}^jp_i^z & 0 & -{}^jp_i^x \\ -{}^jp_i^y & {}^jp_i^x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

空间矢量符号，包括此处简要介绍的空间速度和变换，将在2.2节中进行深入探讨。特别地，表2.1给出了一种采用空间变换的高计算效率的算法。

## 1.3　关节运动学

除非明确指出，否则，机器人机构运动学的描述都进行了一系列的理想化假设。构成机构的连杆，假设是严格的刚体，其表面无论位置还是形状在几何上都是理想的。相应地，这些刚体由关节连接在一起，关节也具有理想化的表面，其接触无间隙。这些接触面的相应几何形状决定了两个连杆间的运动自由度，或者关节运动学。

一个运动学意义上的关节是两个物体之间的连接，它限制了两个物体间的相对运动。相互连接的两个物体构成一个运动关节。两个物体相互接触的表面能够相互运动，从而允许两个物体之间的相对运动。简单运动关节分为两类，分别为面接触的低副关节[1.22]和点或线接触的高副关节。

关节模型描述关节的一个物体上的固定坐标系相对于另一个物体上的固定坐标系之间的运动。该运动用关节运动变量和关节模型的其他元素的函数进行表达，关节模型包括了旋转矩阵、位置矢量、自由模数和受限模数等。一个关节的自由模数是其允许运动的方向数，以 $6\times n_i$ 的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 表示，其列为允许运动的 Plücker 坐标。该矩阵建立了通过关节的空间速度 $v_{\text{rel}}$ 与关节速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的联系，

$$v_{\text{rel}} = \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\boldsymbol{q}} \tag{1.40}$$

相应地，一个关节的受限模数是其不允许运动的方向数，以 $6\times(6-n_i)$ 的 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 的补矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$ 表示。表1.5和表1.6给出了本节描述的所有关节的关节模型公式，它们将进一步用于第2章的动力学分析。关于关节的进一步信息参见第3章。

**表1.5　单自由度低副关节模型公式**（缩写 $c_{\theta i}=\cos\theta_i$，$s_{\theta i}=\sin\theta_i$（部分来源于参考文献［1.21］的表4.1））

| 关节类型 | 关节旋转矩阵 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ | 位置矢量 ${}^j\boldsymbol{p}_i$ | 自由模数 $\boldsymbol{\Phi}_i$ | 受限模数 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$ | 姿态状态变量 | $\dot{\boldsymbol{q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 旋转式 R | $\begin{pmatrix} c_{\theta i} & -s_{\theta i} & 0 \\ s_{\theta i} & c_{\theta i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ | $\theta_i$ | $\dot{\theta}_i$ |
| 棱柱式 P | $1_{3\times3}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ | $d_i$ | $\dot{d}_i$ |
| 螺旋式 H | $\begin{pmatrix} c_{\theta i} & -s_{\theta i} & 0 \\ s_{\theta i} & c_{\theta i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h\theta_i \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-h \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ | $\theta_i$ | $\dot{\theta}_i$ |

表1.6 高自由度低副关节模型公式（缩写 $c_{\theta i}=\cos\theta_i$，$s_{\theta i}=\sin\theta_i$（部分来源于参考文献［1.21］的表4.1)，欧拉角 $\alpha_i$，$\beta_i$，$\gamma_i$可用于替换单位四元数 $\varepsilon_i$ 表示姿态）

| 关节类型 | 关节旋转矩阵 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ | 位置矢量 ${}^j\boldsymbol{p}_i$ | 自由模数 $\boldsymbol{\Phi}_i$ | 受限模数 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$ | 姿态变量 | 速度变量 $\dot{\boldsymbol{q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 柱面式 C | $\begin{pmatrix} c_{\theta i} & -s_{\theta i} & 0 \\ s_{\theta i} & c_{\theta i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\theta_i$ $d_i$ | $\begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{d}_i \end{pmatrix}$ |
| 球面式 S | 见表1.1 | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\varepsilon_i$ | $\omega_{i\mathrm{rel}}$ |
| 平面式 | $\begin{pmatrix} c_{\theta i} & -s_{\theta i} & 0 \\ s_{\theta i} & c_{\theta i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} c_{\theta i}d_{xi}-s_{\theta i}d_{yi} \\ s_{\theta i}d_{xi}+c_{\theta i}d_{yi} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\theta_i$ $d_{xi}$ $d_{yi}$ | $\begin{pmatrix} \dot{\theta}_i \\ \dot{d}_{xi} \\ \dot{d}_{yi} \end{pmatrix}$ |
| 平面滚动接触（固定半径 $r$） | $\begin{pmatrix} c_{\theta i} & -s_{\theta i} & 0 \\ s_{\theta i} & c_{\theta i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} r\theta_i c_{\theta i}-rs_{\theta i} \\ -r\theta_i s_{\theta i}-rc_{\theta i} \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\theta_i$ | $\dot{\theta}_i$ |
| 万向节 U | $\begin{pmatrix} c_{\alpha i}c_{\beta i} & -s_{\alpha i} & c_{\alpha i}s_{\beta i} \\ s_{\alpha i}c_{\beta i} & c_{\alpha i} & s_{\alpha i}s_{\beta i} \\ -s_{\beta i} & 0 & c_{\beta i} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -s_{\beta i} & 0 \\ 0 & 1 \\ c_{\beta i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} c_{\beta i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{\beta i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\alpha_i$ $\beta_i$ | $\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \end{pmatrix}$ |
| 六自由度 | 见表1.1 | ${}^0p_i$ | $1_{6\times 6}$ | | $\varepsilon_i$ ${}^0p_i$ | $\begin{pmatrix} \omega_i \\ v_i \end{pmatrix}$ |

### 1.3.1 低副关节

低副关节在机械上具有吸引力，因为其磨损分布于整个表面，而且润滑剂被密封于两个表面的小间隙空间（在非理想化的系统中），能够形成相对较好的润滑。由表面接触的需求可以证明[1.23]，低副关节只有6种可能的形式：旋转式的、棱柱式的、螺旋式的、柱面式的、球面式的和平面式的关节。

**1. 旋转式**

旋转式关节常缩写为“R”，有时也俗称铰链或栓销。其最常见的形式，是由两个全等的旋转表面构成的低副关节。两个旋转表面是相同的，只不过一个

为外表面，法线指向转轴的任意面，且是凸的；另一个为内表面，法线指向转轴的任意面，且是凹的。这些表面并非仅仅是圆柱表面，因为仅靠圆柱表面不能提供轴向的滑动限制。旋转式关节仅允许相互连接的一个物体相对于另一个物体旋转。一个物体相对于另一个物体的位置，可以利用指向关节轴的两条法线的夹角表示，其中，每条法线固定于一个物体。因此，该关节具有一个自由度。当旋转关节轴设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，旋转关节的模型见表1.5。

**2. 棱柱式**

棱柱式关节常缩写为“P”，有时也俗称滑动关节。其最常见的形式，是由两个全等的柱面构成的低副关节。这些表面并非一定是圆柱表面，通常，一个柱面可以由任意曲面沿一定方向挤压而成。同样，棱柱式关节也有一个内表面和一个外表面。棱柱式关节仅允许相互连接的一个物体相对于另一个物体沿挤压方向滑动。沿平行于滑动的方向在两个物体上各选一个固定点，则一个物体相对于另一个物体的位置由这两点间的距离确定。因此，该关节具有一个自由度。当棱柱式关节轴设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，棱柱式关节的模型见表1.5。

**3. 螺旋式**

螺旋式关节常缩写为“H”，有时也俗称螺杆关节。其最常见的形式，是由两个全等的螺旋面构成的低副关节。螺旋面可以由任意曲面沿螺旋路径挤压而成。最简单的例子是螺杆和螺母，其基本母曲线是一对直线。螺旋角 $\theta$ 与一个物体相对于另一个物体沿轴线的偏移量 $d$ 相关，可表示为 $d=h\theta$，常数 $h$ 称为螺距。当螺旋关节轴设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，螺旋关节的模型见表1.5。

**4. 柱面式**

柱面式关节常缩写为“C”，是由两个全等的圆柱面构成的低副关节，其中一个为内表面，另一个为外表面。柱面式关节允许绕柱面轴的旋转和沿平行于柱面轴的平移。因此，它是一个两自由度关节。在运动学上，多于一个自由度的低副关节可以利用复合关节等价替换（参见1.3.3节），即多个单自由度低副关节构成的串联链。在此情况下，柱面式关节可以等价为一个旋转式关节和一个棱柱关节的串联，且棱柱关节的滑动方向平行于旋转轴。采用1.4节讨论的几何表示实现简单，但该方法不利于动态仿真。将柱面式关节作为棱柱关节和旋转关节的结合体进行建模时，需要在棱柱关节和旋转关节之间增加虚拟轴，虚拟轴的长度和质量为零。但无质量连杆会产生计算问题。当柱面式关节轴设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，柱面式关节的模型见表1.6。

**5. 球面式**

球面式关节常缩写为“S”，是由两个全等的球面构成的低副关节。同样，这两个球面的一个为内表面，另一个为外表面。球面式关节允许绕通过球心的任意直线旋转，因此，它允许最多绕3个不同方向的独立旋转，具有3个自由度。在运动学上，球面式关节可等价为由3个旋转式关节构成的复合关节，3个旋转式关节绕有公共点的3个轴旋转。尽管不需要3个轴连续正交，但通常是采用3个轴连续正交的方式。通常，上述排列与球面关节等价，但在旋转式关节的轴线共面时具有奇异性。这与实际的球面关节形成对比，实际的球面关节从不会具有奇异性。类似地，如果将球面式关节仿真建模为3个旋转关节，由于具有3个长度和质量为零的虚拟轴，会导致出现计算困难问题。球面式关节的模型见表1.6。

**6. 平面式**

平面式由含有表面的平面构成。类似于球面式关节，平面式关节是具有3个自由度的低副关节。其运动学等价复合关节，由3个绕平行轴旋转的旋转式关节的串联链构成。与球面式关节的情况类似，复合关节在旋转式关节的轴线共面时具有奇异性。当平面式关节的接触平面的法线设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，平面式关节的模型见表1.6。

### 1.3.2　高副关节

某些高副关节同样具有吸引力，特别是一个物体在另一个物体表面无滑动的滚动副。这在机械上具有吸引力，因为没有滑动意味着没有磨损。但是，理想的接触是一个点或沿着一条线，加载到关节的负载可能会引起很大的局部压力，导致其他形式的材料失效，因而损坏。高副关节可以用于构造具有特殊几何特性的运动关节，如齿轮副或凸轮与从动轮副。

滚动接触实际上包括几种不同的几何形状。平面运动的滚动接触允许一个自由度的相对运动，如滚柱轴承。如上所述，滚动接触具有令人满意的磨损特性，因为没有滑动意味着没有磨损。平面滚动接触为线接触，因此能够稍微分散负载和磨损。三维滚动接触允许绕通过接触点的任意轴旋转，接触点在原理上是唯一的。因此，三维滚动接触副允许3个自由度的相对运动。当将过半径为 $r$ 的滚轴中心的滚动轴线设定为坐标系 $i$ 的 $\hat{z}$ 轴时，对于一个在平面上的滚轴，其平面滚动接触关节的模型见表1.6。

无论滚动接触关节是平面的还是三维的，与滚动

接触关节相关的无滑动条件，要求两个物体上相互接触的点之间的相对瞬时速度为0。如果 $P$ 是两个物体 $i$ 和 $j$ 之间的滚动接触点，则

$$v_{P_i/P_j}=0 \tag{1.41}$$

类似地，相对加速度位于接触点的两个表面的公共法线方向上。由于与关节相关的约束以速度的形式表示，因此，该约束为非限定性约束，参见1.3.6节。关于滚动接触的运动学约束的详细讨论，见第17章17.2.2节。

### 1.3.3 复合关节

复合运动关节是由多个简单运动关节链构成的两个物体间的连接。与简单关节一样，复合关节也可以限制两个物体间的相对运动。在这种情况下，复合关节与简单关节在运动学上是等价的。

万向节常缩写为"U"，又称为卡登或虎克绞，是一个具有两个自由度的关节。它由两轴正交的两个旋转式关节串联链构成。万向节模型见表1.6，其中，欧拉角 $\alpha_i$ 是绕 $Z$ 轴的第一次旋转，$\beta_i$ 是绕 $Y$ 轴的旋转。对于该关节而言，其矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$ 不是常数，通常 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i\neq0$，$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^c\neq0$。在此情况下，外部参考坐标系的姿态随 $\alpha_i$ 而变化。

### 1.3.4 六自由度关节

两个不连接在一起的物体的运动，可以建模为一个无约束的六自由度关节。这对于移动机器人特别有用，例如航空器，最多间歇接触地面，相对于固定坐标系自由运动的物体称为浮动基座。这样一个自由运动的关节模型可使得浮动基座在空间中的位置和姿态表示成六关节变量。六自由度关节模型见表1.6。

### 1.3.5 物理实现

在实际的机器人机构中，关节具有物理限制，超出该限制的运动是被禁止的。机器人机构的工作空间（见1.5节），是在考虑到机构中的所有关节的物理限制和自由度的情况下确定的。旋转式关节易于由旋转式电动机驱动，因而在机器人系统中极为常用。关节也可能以被动的、无驱动的形式呈现，这些形式也非常常见，但没有旋转式关节这么常见。棱柱关节相对来说易于由线性驱动器驱动，如液压缸或气动缸、滚珠丝杠、螺旋千斤顶等。它们也具有运动限制，因为单向滑动在理论上可产生无穷大偏移。螺旋关节在机器人机构中也较常见，尽管线性驱动器如螺旋千斤顶、滚珠丝杠等很少用做运动主关节。具有多于一个自由度的关节，在机器人机构中常用做被动关节，这是因为主动关节的每个自由度需要独立驱动。在机器人机构中，被动球面式关节很常见，但被动平面式关节仅偶有所见。驱动式球关节，利用运动学上等价为三个旋转式关节分别驱动实现。万向节在机器人机构中既用于主动关节，又用于被动关节。

串联链常简记为所含关节的顺序。例如，RPR链含有三个连杆，第一个连杆通过旋转式关节与基座连接，第二个连杆带有棱柱式关节，第二个和第三个连杆采用另一个旋转式关节连接。如果所有关节是相同的，则简记为关节数量和关节类型，例如，6R表示含有6个旋转式关节的六轴串联链操作器。

以硬件实现关节，要比1.3.1节和1.3.2节给出的理想化情况复杂得多。例如，一个旋转式关节由滚珠轴承实现，而滚珠轴承则有一系列封闭于两个轴套之间的轴承滚珠构成。滚珠在轴套上作无滑动的理想滚动，充分利用了滚动接触的特殊特性。一个棱柱关节可由滚轴导轨组合构成。

### 1.3.6 限定性和非限定性约束

除滚动接触之外，上文中讨论的与关节相关的所有约束，可以在数学上表示为仅含有关节位置变量的方程，称为限定性约束。方程的数量即约束的数量为 $6n$，$n$ 为关节自由度的数量。这些约束是轴关节模型的固有部分。

非限定性约束是不能单独利用位置变量表达的约束，但含有一个或多个位置变量对时间的导数。不能通过对这些约束方程积分，以单独获得关节变量之间的关系。机器人系统中，最常见的例子来自于只能滚动不能够滑动的轮子或者滚轴。非限定性约束，特别是其在轮式机器人的应用，将在第17章详细讨论。

### 1.3.7 广义坐标

在由 $N$ 个物体构成的机器人操作器中，需要 $6N$ 个坐标以便指定所有物体相对于一个坐标系的位置和姿态。由于这些物体中有一些是连接在一起的，所以有一系列的约束方程建立了这些坐标之间的关系。在此情况下，$6N$ 个坐标可以表达为一个较小的独立坐标集合 $\boldsymbol{q}$ 的函数。该集合中的坐标称为广义坐标，而与其相关的运动与所有的约束是一致的。机器人操作器的关节变量 $\boldsymbol{q}$，是广义坐标的一个集合[1.24,25]。

## 1.4　几何表示

将参考坐标系附着于每一连杆，可以很方便地定义机器人操作器的几何关系。这些坐标系可以任意设置，但坐标系设置在连杆上这一约定有利于连贯性和计算效率。Denavit 和 Hartenberg[1.26]介绍了用于不同方法的基本约定，其中之一是本手册采用的 Khalil 和 Dombre[1.27]提出的约定。在所有的形式中，该约定采用四参数而不是六参数确定一个坐标系相对于另一个坐标系的位姿。这 4 个参数分别是：连杆长度 $a_i$，连杆扭转角 $\alpha_i$，关节偏移量 $d_i$，关节角 $\theta_i$。上述简约参数集是通过下述方式实现的：通过合理配置参考坐标系的原点和各个轴，使得一个坐标系的 $\hat{x}$ 轴与后续参考坐标系的 $\hat{z}$ 轴相交并垂直。该约定适用于由旋转式关节和棱柱式关节构成的操作器。当存在多自由度关节时，采用旋转式关节和棱柱式关节对其建模，如 1.3 节所述。

在机器人机构中，主要有 4 种不同的参考坐标系配置约定，直观上每一种均有其优势。在 Denavit 和 Hartenberg[1.26]的原创约定中，关节 $i$ 位于连杆 $i$ 和 $i+1$ 之间，在连杆 $i$ 的外侧。同样，关节偏移量 $d_i$ 和关节角 $\theta_i$ 分别是沿着或绕着 $i-1$ 关节轴的，所以关节参数的下标与关节轴不对应。Waldron[1.28] 和 Paul[1.29]修正了原创约定中轴的标号，将关节 $i$ 置于连杆 $i-1$ 和 $i$ 之间，使得串联链的基座标号从 0 开始。这样，关节 $i$ 配置在连杆 $i$ 的内侧，这也是所有其他修正版本的约定采用的方式。Waldron 和 Paul 将 $\hat{z}_i$轴配置在 $i+1$ 关节轴上，进一步解决了关节参数的下标与关节轴不对应的问题。当然，这也重新配置了相应于关节轴和参考坐标系 $\hat{z}$ 轴的下标不对应问题。Craig[1.30]通过将 $\hat{z}_i$轴配置在关节 $i$ 上，删除了所有的不对应下标，但代价是齐次变换矩阵${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ 由下标为 $i$ 的关节参数和下标为 $i-1$ 的连杆参数构成。Khalil 和 Dombre[1.27]给出了另一种版本，分别沿着和绕着 $\hat{x}_{i-1}$ 轴定义 $a_i$ 和 $\alpha_i$，其他类似于 Craig 的版本。在这种情况下，齐次变换矩阵${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ 完全由下标为 $i$ 的参数构成，但下标的不对应体现为另一种形式，$a_i$ 和 $\alpha_i$ 分别代表连杆 $i-1$ 的连杆长度和扭转角，而不是连杆 $i$ 的连杆长度和扭转角。总之，本手册中用的约定与其他约定相比，其优点是参考坐标系的 $\hat{z}$ 轴与关节轴具有相同下标，定义从参考坐标系 $i$ 到参考坐标系 $i-1$ 的空间变换的四参数具有相同的下标 $i$。

本手册中，串联链操作器的约定如图 1.2 所示。

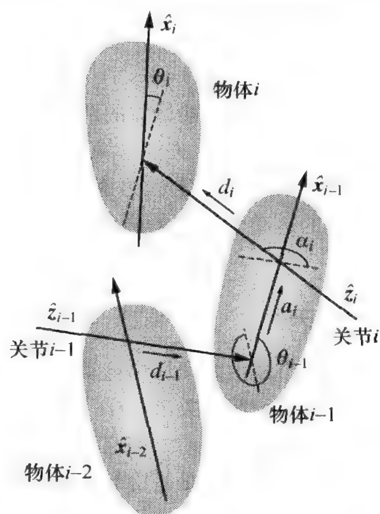



**图 1.2　机器人机构中的物体与关节的编号，物体上坐标系的约定，以及定位一个坐标系相对于另一个坐标系的四参数 $a_i$、$\alpha_i$、$d_i$ 和 $\theta_i$ 的示意图**

物体与关节的编号约定如下：

1）机器人机构中的 $N$ 个运动物体从 1 到 $N$ 编号，基座编号为 0。

2）机器人机构中的 $N$ 个关节从 1 到 $N$ 编号，关节 $i$ 位于连杆 $i-1$ 和 $i$ 之间。

经上述编号后，参考坐标系约定如下：

1）$\hat{z}_i$轴配置在关节 $i$ 的轴线上。

2）$\hat{x}_{i-1}$轴位于 $\hat{z}_{i-1}$轴和 $\hat{z}_i$轴的公垂线上。

采用上述坐标系后，定位一个坐标系相对于另一个坐标系的四参数定义如下：

1）$a_i$ 是沿着 $\hat{x}_{i-1}$轴从 $\hat{z}_{i-1}$轴到 $\hat{z}_i$轴的距离。

2）$\alpha_i$ 是绕着 $\hat{x}_{i-1}$轴从 $\hat{z}_{i-1}$轴旋转到 $\hat{z}_i$轴的转角。

3）$d_i$ 是沿着 $\hat{z}_i$轴从 $\hat{x}_{i-1}$轴到 $\hat{x}_i$轴的距离。

4）$\theta_i$ 是绕着 $\hat{z}_i$轴从 $\hat{x}_{i-1}$轴旋转到 $\hat{x}_i$轴的转角。

图 1.3 所示的六自由度串联链式操作器实例的几何参数见表 1.7。该操作器的所有关节为旋转式关节，关节 1 垂直向上，关节 2 与关节 1 垂直并相交。关节 3 平行于关节 2，连杆 2 的长度为 $a_3$。关节 4 与关节 3 垂直并相交。关节 5 与关节 4 垂直相交，并与关节 3 有关节偏移量 $d_4$。最后，关节 6 与关节 5 垂直相交。

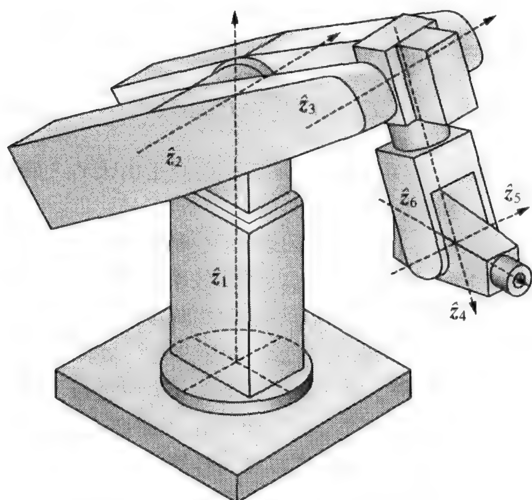



图 1.3 六自由度串联链式操作器实例
（是一个带有无偏移量关节和球面式扭转关节的关节臂）

表 1.7 图 1.3 中串联链式操作器实例的几何参数

| $i$ | $\alpha_i$ | $a_i$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | $\theta_1$ |
| 2 | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | 0 | $\theta_2$ |
| 3 | 0 | $a_3$ | 0 | $\theta_3$ |
| 4 | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $d_4$ | $\theta_4$ |
| 5 | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | 0 | $\theta_5$ |
| 6 | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | 0 | $\theta_6$ |

在该约定下，通过绕 $\hat{x}_{i-1}$ 轴旋转角度 $\alpha_i$，沿 $\hat{x}_{i-1}$ 轴平移 $a_i$，绕 $\hat{z}_i$ 轴旋转角度 $\theta_i$，沿 $\hat{z}_i$ 轴平移 $d_i$，可实现参考坐标系 $i$ 相对于参考坐标系 $i-1$ 的定位。通过这些独立变换的串联，

$\boldsymbol{Rot}(\hat{x}_{i-1},\alpha_i)\boldsymbol{Trans}(\hat{x}_{i-1},a_i)\boldsymbol{Rot}(\hat{z}_i,\theta_i)\boldsymbol{Trans}(\hat{z}_i,d_i)$，

得到的等价齐次变换为

$$ {}^{i-1}\boldsymbol{T}_i=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_i \\ \sin\theta_i\cos\alpha_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & -\sin\alpha_i d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_i & \cos\theta_i\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \cos\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

上述几何参数的辨识在第 14 章给出。

## 1.5 工作空间

通常，机器人操作器的工作空间是指操作器执行所有可能的运动时末端扫过的全部体积，是由操作器的几何形状和关节运动的限位决定的。特别地，可达空间定义为末端能够到达的所有点的集合，而灵巧空间[1.31]为末端能够以任意姿态到达的所有点的集合，灵巧空间是可达空间的子集。灵巧空间仅存在于特定的理想几何构型，真正的工业操作器带有关节限位，几乎从来没有灵巧空间。

许多串联链式机器人操作器是如此设计的，其关节分成区域性结构和方向性结构。区域性结构关节实现末端在空间中的位置定位，而方向性结构关节实现末端的姿态。较典型地，串联链式机器人操作器的内关节由区域性结构构成，而外关节由方向性结构构成。此外，棱柱式关节不能提供旋转能力，所以不能用于方向性结构。

区域性工作空间，可由串联链式机器人操作器的已知几何构型和关节运动限位计算获得。在由区域性结构构成的三个内关节中，首先计算外侧的两个关节（关节 2 和 3）的工作空间面积，然后通过对剩余的内关节（关节 1）的关节变量的积分，计算出区域性工作空间的大小。对于棱柱式关节，仅需将面积乘以棱柱式关节的运动长度。对于更为普遍的旋转式关节，它涉及绕关节轴线的全范围旋转运动的面积[1.32]。根据 Pappus 定理，相关的空间体积为

$$V=A\bar{r}\gamma \tag{1.43}$$

式中，$A$ 是面积，$\bar{r}$ 是面积的质心到旋转轴线的距离，$\gamma$ 是该面积旋转的角度。该面积的边界通过跟踪末端一个参考点的运动确定，较典型的是方向性结构腕部的旋转中心。从两个关节的运动限位位置开始，关节 2 锁定，关节 3 一直运动到其第二个限位位置。然后，关节 3 锁定，关节 2 自由运动到其第二个限位位置。关节 2 再次锁定，关节 3 自由运动到其初始限位位置。最后，关节 3 锁定，关节 2 自由运动到其初始限位位置。在这种方式下，参考点的轨迹是一条封闭曲线，其面积和质心可以通过数学方法计算出来。

操作器空间的更多细节参见第 3 章和第 10 章。

## 1.6 正向运动学

串联链式操作器的正向运动学问题，是在给定所有关节位置和所有连杆几何参数的情况下，求取末端相对于基座的位置和姿态。通常，固定于末端的坐标

系称为工具坐标系，它同时固定于末端连杆 $N$ 上，在位置与姿态上通常与坐标系 $N$ 具有固定偏移。类似地，一个固定坐标系常设置于基座上，以确定被执行任务的位置。该坐标系在位姿上通常相对于坐标系0具有固定偏移，坐标系0也固定于基座上。

正向运动学问题的更一般性描述是，给定操作器的几何结构，以及与机构自由度数量相等的关节数量的关节位置，求取任意两个指定关节之间的相对位置和姿态。正向运动学对于开发操作器坐标算法十分重要，这是因为关节位置常由安装于关节的传感器测量得到，而且有必要计算关节轴相对于固定参考坐标系的位置。

实践中，正向运动学问题通过计算两个坐标系之间的变换来求解，一个是固定于末端的参考坐标系，另一个是固定于基座的参考坐标系，即工具坐标系和工作站坐标系。对于串联链而言，该变换是前向的，因为描述末端相对于基座位置的变换是从链路中固定于相邻连杆坐标系之间的变换串联得到的。1.4节给出的操作器几何表示的约定，将上述变换简化为求取4×4的等价齐次变换矩阵，该矩阵为末端坐标系相对于基座坐标系的空间偏移。

以图1.3所示的串联链式操作器为例，忽略附加的工具和工作站坐标系，其变换为

$$^0\boldsymbol{T}_6={}^0\boldsymbol{T}_1^1\boldsymbol{T}_2^2\boldsymbol{T}_3^3\boldsymbol{T}_4^4\boldsymbol{T}_5^5\boldsymbol{T}_6 \tag{1.44}$$

表1.8中含有 $^0\boldsymbol{T}_6$ 的各个元素，它们是由表1.7和式(1.42)计算出来的。

再次说明，齐次变换提供了一种简洁的符号，但在求解正向运动学问题时其计算效率较低。通过分离变换中的位置和姿态部分，删除矩阵中所有的与0和1的乘法，可以降低计算量。在第2章，利用空间矢量符号进行计算，这些符号在1.2.6节中进行了简要介绍，详细解释见2.2节。该方法不需要齐次变换，但将旋转矩阵和位置分离以提高计算效率。表2.1给出了详细的公式，特别是与正向运动学问题相关的空间变换的积。

运动树是不含闭环的机器人机构的普遍结构，树结构的正向运动学在第2章给出。由于附加的约束，闭链的正向运动学问题要复杂得多。闭链的求解方法见第12章。

**表1.8 图1.3串联链式操作器的正向运动学**

$$^0\boldsymbol{T}_6=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & {}^0p_6^x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & {}^0p_6^y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & {}^0p_6^z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_{11}=c_{\theta1}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})(s_{\theta4}s_{\theta6}-c_{\theta4}c_{\theta5}c_{\theta6})-c_{\theta1}s_{\theta5}c_{\theta6}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})+s_{\theta1}(s_{\theta4}c_{\theta5}c_{\theta6}+c_{\theta4}s_{\theta6})$,

$r_{21}=s_{\theta1}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})(s_{\theta4}s_{\theta6}-c_{\theta4}c_{\theta5}c_{\theta6})-s_{\theta1}s_{\theta5}c_{\theta6}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})-c_{\theta1}(s_{\theta4}c_{\theta5}c_{\theta6}+c_{\theta4}s_{\theta6})$,

$r_{31}=(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})(s_{\theta4}s_{\theta6}-c_{\theta4}c_{\theta5}c_{\theta6})+s_{\theta5}c_{\theta6}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})$,

$r_{12}=c_{\theta1}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})(c_{\theta4}c_{\theta5}s_{\theta6}+s_{\theta4}c_{\theta6})+c_{\theta1}s_{\theta5}s_{\theta6}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})+s_{\theta1}(c_{\theta4}c_{\theta6}-s_{\theta4}c_{\theta5}s_{\theta6})$,

$r_{22}=s_{\theta1}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})(c_{\theta4}c_{\theta5}s_{\theta6}+s_{\theta4}c_{\theta6})+s_{\theta1}s_{\theta5}s_{\theta6}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})-c_{\theta1}(c_{\theta4}c_{\theta6}-s_{\theta4}c_{\theta5}s_{\theta6})$,

$r_{32}=(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})(c_{\theta4}c_{\theta5}s_{\theta6}+s_{\theta4}c_{\theta6})-s_{\theta5}s_{\theta6}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})$,

$r_{13}=c_{\theta1}c_{\theta4}s_{\theta5}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})-c_{\theta1}c_{\theta5}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})-s_{\theta1}s_{\theta4}s_{\theta5}$,

$r_{23}=s_{\theta1}c_{\theta4}s_{\theta5}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})-s_{\theta1}c_{\theta5}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})+c_{\theta1}s_{\theta4}s_{\theta5}$,

$r_{33}=c_{\theta4}s_{\theta5}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})+c_{\theta5}(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})$,

$^0p_6^x=a_3c_{\theta1}c_{\theta2}-d_4c_{\theta1}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})$,

$^0p_6^y=a_3s_{\theta1}c_{\theta2}-d_4s_{\theta1}(c_{\theta2}s_{\theta3}+s_{\theta2}c_{\theta3})$,

$^0p_6^z=-a_3s_{\theta2}+d_4(s_{\theta2}s_{\theta3}-c_{\theta2}c_{\theta3})$.

注：缩写 $c_{\theta i}=\cos\theta_i$，$s_{\theta i}=\sin\theta_i$

## 1.7 逆向运动学

串联链式操作器的逆向运动学问题，是在给定末端相对于基座的位置和姿态，以及所有连杆几何参数的情况下，求取所有关节的位置。再次声明，这只是对串联链的简单描述。更普遍的描述为：给定一个机构两部分的相对位置和姿态，求解所有关节位置的值。这相当于给定感兴趣的两部分之间的齐次变换，求取所有关节的位置。

在一般情况下，对于六自由度串联链式操作器，已知变换为${}^0\boldsymbol{T}_6$。重新审视1.6节中该变换的公式，可以发现串联链式操作器的逆向运动学问题需要求解非线性方程组。对于六自由度操作器，有3个方程与其齐次矩阵中的位置矢量有关，另外3个与旋转矩阵有关。后者中，由于旋转矩阵的独立性问题，这3个方程不能来自相同的行或列。这些非线性方程，可能无解或者存在多解[1.33]。对于一个存在的解，末端的期望位置和姿态一定位于操作器的工作空间。对于确实存在解的情况，这些解常常不能表示为闭式解，所以需要采用数值方法。

### 1.7.1 闭式解

由于闭式解比数值解速度快，而且容易区分所有可能的解，所以希望得到闭式解。闭式解的缺点是不通用，依赖于机器人。求取闭式解的最有效方法，是充分利用特定机构几何特征的专门技术。通常，对于六自由度机器人，仅带有特定运动结构的、大量几何参数（在1.4节定义）为0的机器人，能够获得闭式解。大部分工业操作器具有这种结构，因为该结构允许更加有效的坐标软件。六自由度操作器具有逆运动学闭式解的充分条件为[1.34-36]

1）三个连续的旋转式关节的轴线相交于一点，如球面式腕部。

2）三个连续的旋转式关节的轴线平行。

闭式解方法可分为代数法和几何法。

**1. 代数法**

代数法涉及辨别含有关节变量的有效方程，并将其处理成可解的形式。一种常用的策略是简化为单变量的超越方程，如

$$C_1\cos\theta_i + C_2\sin\theta_i + C_3 = 0 \tag{1.45}$$

式中，$C_1$、$C_2$和$C_3$是常数。式（1.45）的解为

$$\theta_i = 2\arctan\left(\frac{C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_3^2 + C_1^2}}{C_1 - C_3}\right) \tag{1.46}$$

有一个或多个常数为0的特殊情况，也较常见。

简化为具有如下形式的一对方程：

$$\begin{cases} C_1\cos\theta_i + C_2\sin\theta_i + C_3 = 0 \\ C_1\sin\theta_i - C_2\cos\theta_i + C_4 = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

是另一种特别有用的策略，因为它只有一个解

$$\theta_i = \mathrm{Atan2}(-C_1C_4 - C_2C_3,\ C_2C_4 - C_1C_3) \tag{1.48}$$

**2. 几何法**

几何法涉及辨别末端上的点，其位置和（或）姿态可以表达为关节变量的简约集的函数。这相对于将空间问题分解为分离的平面问题，形成的方程采用代数方法求解。上述的六自由度操作器闭式解存在的两个充分条件，使得逆向运动学问题可分解为逆向位置运动学和逆向姿态运动学。这也是1.5节讨论的区域性结构和方向性结构上的分解，重写式（1.44）可获得其解：

$${}^0\boldsymbol{T}_6\,{}^6\boldsymbol{T}_5\,{}^5\boldsymbol{T}_4\,{}^4\boldsymbol{T}_3 = {}^0\boldsymbol{T}_1\,{}^1\boldsymbol{T}_2\,{}^2\boldsymbol{T}_3 \tag{1.49}$$

图1.3中的操作器具有这种结构，其区域性结构常称为铰链式或人形臂，或者肘式操作器。这种结构的逆向位置运动学的解见表1.9。由于$\theta_1$具有两个解，相应地$\theta_2$和$\theta_3$对应于每一个$\theta_1$具有两个解，所以铰链臂式操作器的逆向位置运动学共有4个解。其姿态结构是简单的球式手腕，相应的解见表1.10。表1.10中给出了$\theta_5$的两个解，但$\theta_4$和$\theta_6$对应于每一个$\theta_5$只有一个解。因此，球式手腕的逆向姿态运动学具有两个解。结合区域性结构和姿态结构，图1.3中操作器的逆向运动学解共有8个。

**表1.9 图1.3串联链式操作器中的铰链臂的逆向位置运动学**

| |
|---|
| $\theta_1 = \mathrm{Atan2}({}^0p_6^y, {}^0p_6^x)$ 或者 $\mathrm{Atan2}(-{}^0p_6^y, -{}^0p_6^x)$ |
| $\theta_3 = -\mathrm{Atan2}(D, \pm\sqrt{1-D^2})$，其中，$D = \dfrac{({}^0p_6^x)^2 + ({}^0p_6^y)^2 + ({}^0p_6^z)^2 - a_3^2 - d_4^2}{2a_3d_4}$ |
| $\theta_2 = \mathrm{Atan2}({}^0p_6^z, \sqrt{({}^0p_6^x)^2 + ({}^0p_6^y)^2}) - \mathrm{Atan2}(d_4\sin\theta_3, a_3 + d_4\cos\theta_3)$ |

**表1.10 图1.3串联链式操作器中的球式手腕的逆向姿态运动学**

| |
|---|
| $\theta_5 = \mathrm{Atan2}(\pm\sqrt{1-(r_{13}s_{\theta 1}-r_{23}c_{\theta 1})^2}, r_{13}s_{\theta 1}-r_{23}c_{\theta 1})$ |
| $\theta_4 = \mathrm{Atan2}(\mp(r_{13}c_{\theta 1}+r_{23}s_{\theta 1})s_{(\theta 2+\theta 3)}\mp r_{33}c_{(\theta 2+\theta 3)}, \pm(r_{13}c_{\theta 1}+r_{23}s_{\theta 1})c_{(\theta 2+\theta 3)}\mp r_{33}s_{(\theta 2+\theta 3)})$ |
| $\theta_6 = \mathrm{Atan2}(\pm(r_{12}s_{\theta 1}+r_{22}c_{\theta 1}), \pm(r_{11}s_{\theta 1}-r_{21}c_{\theta 1}))$ |

注：缩写 $c_{\theta i}=\cos\theta_i$，$s_{\theta i}=\sin\theta_i$

### 1.7.2 数值法

不同于求取闭式解的代数法和几何法，数值法不依赖于机器人，故可用于任意运动学结构。数值法的缺点是速度较慢，在某些情况下不能计算出所有可能的解。对于一个仅有旋转式关节和棱柱式关节的六自由度串联链式操作器，其平移和旋转方程总能化简为单变量的多项式，其阶次不超过16阶[1.37]。因此，这样的一个操作器的逆向运动学问题有16个实数解[1.38]。因为只有当一个多项式的阶次不超过4阶时其闭式解是可能得到的，所以许多操作器构型是不能获得闭式解的。通常，较多数量的非零几何参数，对应于化简后较高阶次的多项式。对于这样的操作器，最常用的数值解方法分为符号消元法、延拓法和迭代法。

**1. 符号消元法**

符号消元法涉及从非线性方程系统删除变量的解析操作，以便将其化简为含有较少方程的方程组。Raghavan 和 Roth[1.39]采用析配消元法，将通用六自由度旋转式串联链式操作器的逆向运动学问题化简为一个16阶多项式，并求取所有可能的解。多项式的根提供的是其中一个关节变量的解，而其他的变量通过求解线性系统获得。Manocha 和 Canny[1.40]通过将该问题重新形式化为一般的特征值问题，改进了该项技术的数值特性。另一种消元方法是采用 Gröbner 基[1.41,42]。

**2. 延拓法**

延拓法涉及解的路径跟踪。延拓法从具有已知解的起始系统开始，随起始系统到目标系统的变换，跟踪到求解的目标系统。这些技术已用于逆向运动学问题[1.43]，其多项式系统的特殊特性可用于求取所有可能的解[1.44]。

**3. 迭代法**

许多不同的迭代法可用于解决逆向运动学问题。基于初始猜测，大部分迭代法能够收敛于一个单解。因此，初始猜测的质量对求解时间具有很大影响。Newton-Raphson 法提供了一种对原始方程进行一阶近似的基本方法。Pieper[1.34]是最早将这种方法用于逆向运动学的人之一，其他人随后[1.45,46]。优化方法将逆向运动学问题形式化为非线性优化问题，并采用搜索技术从初始猜测移动到解。求解运动率控制将上述问题转化为一个微分方程[1.49]，而且一种修正的预测——矫正算法可用于对关节速度积分[1.50]。基于控制理论的方法将微分方程归于控制问题[1.51]。间隔分析[1.52]或许是最有前途的迭代方法之一，因为它可以快速收敛到一个解，并能找到所有的可能解。对于复杂机构，阻尼最小二乘法[1.53]特别具有吸引力，更多细节见第11章。

## 1.8 正向微分运动学

串联链式操作器的正向微分运动学问题是：给定链路中所有单元的位置和所有关节的运动速率，求解末端的合速度。此处的关节运动速率，是绕旋转式关节旋转的角速度，或者沿棱柱关节滑动的平移速度。单元的合速度是固定于单元的参考坐标系原点的速度与单元角速度合成的。换言之，合速度有6个独立分量，可以完全代表单元的速度场。值得注意的是，该定义包含了如下假设：机构的姿态是完全已知的。在大部分情况下，这意味着在处理正向微分运动学之前，必须处理正向运动学问题或者逆向运动学问题。在下节中讨论的逆向微分运动学也存在同样情况。当为了研究动力学而进行加速度分析时，正向微分运动学问题是重要的。计算科里奥利（Coriolis）加速度和向心加速度分量，需要单元的合速度。

正向运动学对时间的导数，即为如下形式的方程组

$$\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{1.50}$$

式中，$\boldsymbol{v}_N$ 是末端的空间速度，$\dot{\boldsymbol{q}}$ 是由关节速率构成的 $N$ 维矢量，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 是 $6\times N$ 的矩阵，其值通常是 $\boldsymbol{q}_1$，…，$\boldsymbol{q}_N$ 的非线性函数。$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 称为该代数系统的雅可比矩阵，对应于与空间速度 $\boldsymbol{v}_N$ 相同的坐标系[1.54]。如果关节位置已知，则式（1.50）将形成6个关节速率的线性代数方程。如果给定关节速率，则式（1.50）的一个解就是正向微分运动学问题的一个解。注意，所有关节位置已知的情况下，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 可以认为是一个已知矩阵。

利用在1.2.6节简要介绍并将在2.2节详细解释

的空间矢量符号，雅可比矩阵可很容易地从关节的自由模数 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 和相关的空间变换 ${}^{i}\boldsymbol{X}_i$ 计算出来。与关节速率 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 相关的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 的列为

$$ {}^{k}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\Phi}_i $$

式中，$k$ 代表 $\boldsymbol{v}_N$ 所在的任意坐标系。在本手册中，表1.11包含了有效计算雅可比矩阵各列的算法。关于雅可比矩阵的进一步信息参见第11章。

**表1.11 从关节的自由模式计算雅可比矩阵列的算法**

| | |
|---|---|
| $n_i$ | 关节 $i$ 的自由度的数量 |
| $\boldsymbol{J}$ | ${}^{k}\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$，$k$ 是任意坐标系 |
| $\boldsymbol{J}_{ni}$ | $\boldsymbol{J}$ 的与 $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ 相关的 $n_i$ 列 |
| $\boldsymbol{\Phi}_\omega$ | $\boldsymbol{\Phi}$ 的前三行 |
| $\boldsymbol{\Phi}_v$ | $\boldsymbol{\Phi}$ 的后三行 |
| | $\boldsymbol{J}_{ni}={}^{k}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\Phi}_i$ |
| 表达式 | 计算值 |
| $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2$ | $(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2;\ \boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1)$ |
| $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Phi}$ | $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Phi}_\omega;\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\Phi}_v-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Phi}_\omega))$ |
| $\boldsymbol{X}^{-1}$ | $(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}};\ -\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})$ |
| $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ | $(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\omega;\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_v+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\omega)$ |

## 1.9 逆向微分运动学

从机器人坐标的观点看，逆向微分运动学问题是一个非常重要的问题。关于机器人坐标的更多信息见第5章和第6章。串联链式操作器的逆向微分运动学问题是：给定链路中所有单元的位置和末端的合速度，求解所有关节的运动速率。当控制一台以点对点模式操作的工业机器人的运动时，不仅需要计算与期望的手爪终点位置对应的终点关节位置，而且需要在起点和终点位置之间形成光滑的运动轨迹。当然，会有无限多的可能轨迹符合此要求。但是，最直接最成功的方法采用基于逆向微分运动学问题的解的算法。该项技术起源于Whitney[1.55]和Pieper[1.34]的工作。

当 $\boldsymbol{v}_N$ 已知时，通过将式（1.50）分解为分量方程，可以获得由含有关节速率的多个方程构成的线性系统。为了求解该线性系统，有必要求取雅可比矩阵的逆。于是，式（1.50）变为

$$ \dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}_N \tag{1.51} $$

由于 $\boldsymbol{J}$ 是一个 $6\times6$ 的矩阵，所以在必须以100Hz及以上的速度运行的实时软件中，其数值逆不是很有吸引力。更糟的是，$\boldsymbol{J}$ 很可能变成奇异的（$|\mathrm{J}|=0$），其逆不存在。关于奇异性的进一步信息参见第3章和第12章。即使雅可比矩阵不是奇异的，它也可能是病态的，导致在操作器的大部分工作空间中性能退化。大部分工业机器人的构型比较简单，其雅可比矩阵可以解析求逆，形成关节速率的显式方程组[1.56-58]。与数值求逆相比，这样可极大地降低计算量。对于更加复杂的操作器构型，数值求逆是唯一的方法。冗余操作器的雅可比矩阵不是方阵，所以不能求逆。第11章讨论了在这种情况下如何应用各种伪逆。

## 1.10 静力变换

操作器的静力变换，建立了施加于末端的扭矩与施加于关节的力/力矩之间的关系。这对于控制操作器与其环境的交互作用是十分重要的。交互作用的例子包括涉及固定或伪固定工件的任务，例如，以特定力插件，以特定力矩拧紧螺母等。更多信息见第7章和第27章。利用虚功原理，施加于末端的扭矩与施加于关节的力/力矩之间的关系可表示为

$$ \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_e \tag{1.52} $$

式中，$\boldsymbol{\tau}$ 是施加于 $n$ 自由度操作器关节的 $n$ 维力/力矩矢量，$\boldsymbol{f}_e$ 是空间力矢量

$$ \boldsymbol{f}_e=\begin{pmatrix} n \\ f \end{pmatrix} \tag{1.53} $$

式中，$n$ 和 $f$ 分别是施加于末端的力矩和力矢量，均与雅可比矩阵位于同一个参考坐标系。因此，以与关节速率映射到末端空间速度同样的方式，雅可比矩阵将施加于末端的扭矩映射到施加于关节的力/力矩。在速度方式下，当雅可比矩阵不是方阵时，其逆关系不是唯一的。

## 1.11 结论与扩展阅读

本章简要回顾了如何将运动学的基本原理应用于机器人机构，内容涉及空间中刚体的位置和姿态的各种表示、关节的运动自由度与相应数学模型、描述机器人机构的几何表示、操作器的工作空间、正向和逆

向运动学问题、正向和逆向微分运动学问题（包括雅可比矩阵的定义）、静力变换。当然，本章不能包罗运动学的全部。幸运的是，大量优秀文献对重点研究运动学的机器人学提供了广泛的介绍[1.17,27,29,30,51,59-63]。从历史上看，机器人学从本质上改变了机构运动学领域的性质。在首次出现关于机器人的坐标方程之前[1.34,55]，机构领域的焦点几乎全部集中于单自由度机构。这就是为什么随着数字计算的来临，机器人学给机构运动学带来了新生。更多的细节见第3章。正如该领域从工业机器人的简单串联链的研究（本章分析的重点）中扩展开来一样，该领域还在继续朝着不同方向发展，如并联机器（见第12章）、仿人机器手（第15章）、机器人运输车（第16章和第17章），甚至小型机器人（见第18章）。

## 参考文献


1.1 W. R. Hamilton: On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra, Philos. Mag. **18**, installments July 1844 – April 1850, ed. by D. E. Wilkins (2000)

1.2 E.B. Wilson: *Vector Analysis* (Dover, New York 1960), based upon the lectures of J. W. Gibbs, (reprint of the second edn. published by Charles Scribner's Sons, 1909)

1.3 H. Grassman: *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre* (Wigand, Leipzig 1844)

1.4 J.M. McCarthy: *Introduction to Theoretical Kinematics* (MIT Press, Cambridge 1990)

1.5 W.K. Clifford: Preliminary sketch of bi-quarternions, Proc. London Math. Soc., Vol. 4 (1873) pp. 381–395

1.6 A. P. Kotelnikov: Screw calculus and some applications to geometry and mechanics, Annal. Imp. Univ. Kazan (1895)

1.7 E. Study: *Geometrie der Dynamen* (Teubner, Leipzig 1901)

1.8 G.S. Chirikjian, A.B. Kyatkin: *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis* (CRC, Boca Raton 2001)

1.9 R. von Mises: Anwendungen der Motorrechnung, Z. Angew. Math. Mech. **4**(3), 193–213 (1924)

1.10 J.E. Baker, I.A. Parkin: *Fundamentals of Screw Motion: Seminal Papers by Michel Chasles and Olinde Rodrigues* (School of Information Technologies, The University of Sydney, Sydney 2003), translated from O. Rodrigues: Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système dans l'espace, J. Math. Pures Applicqu. Liouville **5**, 380–440 (1840)

1.11 R.S. Ball: *A Treatise on the Theory of Screws* (Cambridge Univ Press, Cambridge 1998)

1.12 J.K. Davidson, K.H. Hunt: *Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics* (Oxford Univ Press, Oxford 2004)

1.13 K.H. Hunt: *Kinematic Geometry of Mechanisms* (Clarendon, Oxford 1978)

1.14 J.R. Phillips: *Freedom in Machinery: Volume 1. Introducing Screw Theory* (Cambridge Univ Press, Cambridge 1984)

1.15 J.R. Phillips: *Freedom in Machinery: Volume 2. Screw Theory Exemplified* (Cambridge Univ Press, Cambridge 1990)

1.16 G.S. Chirikjian: Rigid-body kinematics. In: *Robotics and Automation Handbook*, ed. by T. Kurfess (CRC, Boca Raton 2005), Chapt. 2

1.17 R.M. Murray, Z. Li, S.S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* (CRC, Boca Raton 1994)

1.18 A. Karger, J. Novak: *Space Kinematics and Lie Groups* (Routledge, New York 1985)

1.19 R. von Mises: Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel in der Mechanik, Z. Angew. Math. Mech. **2**(2), 155–181 (1924), [transl. J. E. Baker, K. Wohlhart, Inst. for Mechanics, T. U. Graz (1996)]

1.20 J.D. Everett: On a new method in statics and kinematics, Mess. Math. **45**, 36–37 (1875)

1.21 R. Featherstone: *Rigid Body Dynamics Algorithms* (Kluwer Academic, Boston 2007)

1.22 F. Reuleaux: *Kinematics of Machinery* (Dover, New York 1963), (reprint of *Theoretische Kinematik*, 1875, in German).

1.23 K.J. Waldron: A method of studying joint geometry, Mechan. Machine Theory **7**, 347–353 (1972)

1.24 T.R. Kane, D.A. Levinson: *Dynamics, Theory and Applications* (McGraw-Hill, New York 1985)

1.25 J.L. Lagrange: *Oeuvres de Lagrange* (Gauthier-Villars, Paris 1773)

1.26 J. Denavit, R.S. Hartenberg: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, J. Appl. Mech. **22**, 215–221 (1955)

1.27 W. Khalil, E. Dombre: *Modeling, Identification and Control of Robots* (Taylor Francis, New York 2002)

1.28 K.J. Waldron: A study of overconstrained linkage geometry by solution of closure equations, Part I: a method of study, Mech. Machine Theory **8**(1), 95–104 (1973)

1.29 R. Paul: *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control* (MIT Press, Cambridge 1982)

1.30 J.J. Craig: *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (Addison-Wesley, Reading 1986)

1.31 K.J. Waldron, A. Kumar: The Dextrous workspace, ASME Mech. Conf. (Los Angeles 1980), ASME paper No. 80-DETC-108

1.32 R. Vijaykumar, K.J. Waldron, M.J. Tsai: Geometric optimization of manipulator structures for working volume and dexterity, Int. J. Robot. Res. **5**(2), 91–103 (1986)

1.33 J. Duffy: *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators* (Wiley, New York 1980)

1.34 D. Pieper: The Kinematics of Manipulators Under Computer Control. Ph.D. Thesis (Stanford University, Stanford 1968)

1.35 C.S.G. Lee: Robot arm kinematics, dynamics, and control, Computer **15**(12), 62–80 (1982)

1.36 M.T. Mason: *Mechanics of Robotic Manipulation* (MIT Press, Cambridge 2001)

1.37 H.Y. Lee, C.G. Liang: A new vector theory for the analysis of spatial mechanisms, Mechan. Machine Theory **23**(3), 209–217 (1988)

1.38 R. Manseur, K.L. Doty: A robot manipulator with 16 real inverse kinematic solutions, Int. J. Robot. Res.

**8**(5), 75–79 (1989)

1.39 M. Raghavan, B. Roth: Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry, 5th Int. Symp. Robot. Res. (1990)

1.40 D. Manocha, J. Canny: *Real Time Inverse Kinematics for General 6R Manipulators* Tech. rep. (University of California, Berkeley 1992)

1.41 B. Buchberger: Applications of Gröbner bases in non-linear computational geometry. In: *Trends in Computer Algebra*, Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 296, ed. by R. Janen (Springer, Berlin 1989) pp. 52–80

1.42 P. Kovacs: Minimum degree solutions for the inverse kinematics problem by application of the Buchberger algorithm. In: *Advances in Robot Kinematics*, ed. by S. Stifter, J. Lenarcic (Springer, New York 1991) pp. 326–334

1.43 L.W. Tsai, A.P. Morgan: Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods, ASME J. Mechan. Transmission Autom. Design **107**, 189–195 (1985)

1.44 C.W. Wampler, A.P. Morgan, A.J. Sommese: Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics, ASME J. Mech. Des. **112**, 59–68 (1990)

1.45 R. Manseur, K.L. Doty: Fast inverse kinematics of 5-revolute-axis robot manipulators, Mechan. Machine Theory **27**(5), 587–597 (1992)

1.46 S.C.A. Thomopoulos, R.Y.J. Tam: An iterative solution to the inverse kinematics of robotic manipulators, Mechan. Machine Theory **26**(4), 359–373 (1991)

1.47 J.J. Uicker Jr., J. Denavit, R.S. Hartenberg: An interactive method for the displacement analysis of spatial mechanisms, J. Appl. Mech. **31**, 309–314 (1964)

1.48 J. Zhao, N. Badler: Inverse kinematics positioning using nonlinear programming for highly articulated figures, Trans. Comput. Graph. **13**(4), 313–336 (1994)

1.49 D.E. Whitney: Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses, IEEE Trans. Man Mach. Syst. **10**, 47–63 (1969)

1.50 H. Cheng, K. Gupta: A study of robot inverse kinematics based upon the solution of differential equations, J. Robot. Syst. **8**(2), 115–175 (1991)

1.51 L. Sciavicco, B. Siciliano: *Modeling and Control of Robot Manipulators* (Springer, London 2000)

1.52 R.S. Rao, A. Asaithambi, S.K. Agrawal: Inverse Kinematic Solution of Robot Manipulators Using Interval Analysis, ASME J. Mech. Des. **120**(1), 147–150 (1998)

1.53 C.W. Wampler: Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least squares methods, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **16**, 93–101 (1986)

1.54 D.E. Orin, W.W. Schrader: Efficient computation of the jacobian for robot manipulators, Int. J. Robot. Res. **3**(4), 66–75 (1984)

1.55 D. E. Whitney: The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators J. Dynamic Sys. Meas. Contr. **122**, 303–309 (1972)

1.56 R.P. Paul, B.E. Shimano, G. Mayer: Kinematic control equations for simple manipulators, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **SMC-11**(6), 339–455 (1981)

1.57 R.P. Paul, C.N. Stephenson: Kinematics of robot wrists, Int. J. Robot. Res. **20**(1), 31–38 (1983)

1.58 R.P. Paul, H. Zhang: Computationally efficient kinematics for manipulators with spherical wrists based on the homogeneous transformation representation, Int. J. Robot. Res. **5**(2), 32–44 (1986)

1.59 H. Asada, J.J.E. Slotine: *Robot Analysis and Control* (Wiley, New York 1986)

1.60 F.L. Lewis, C.T. Abdallah, D.M. Dawson: *Control of Robot Manipulators* (Macmillan, New York 1993)

1.61 R.J. Schilling: *Fundamentals of Robotics: Analysis and Control* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1990)

1.62 M.W. Spong, M. Vidyasagar: *Robot Dynamics and Control* (Wiley, New York 1989)

1.63 T. Yoshikawa: *Foundations of Robotics* (MIT Press, Cambridge 1990 )

# 第2章 动 力 学

Roy Featherstone, David E. Orin

高发荣 译

刚体的动力学方程提供了机器人机构驱动和作用于其上的接触力之间的关系，以及带来的加速度和运动轨迹的关系。动力学在机械设计、控制和仿真计算中都十分重要。在这些应用中，也有许多重要算法，其中包括下列计算：逆向动力学、正向动力学、关节空间惯性矩阵和操作空间惯性矩阵。本章提供的有效算法，用于机器人机构刚体模型上，实现对上述问题的计算。这些算法采用最通用的形式，适用于具有一般连接性、几何形状和关节类型的机器人机构。这些机构包括：固定基座机器人、移动机器人，以及并联机器人机构。

除了计算效率的需要外，算法还应该公式化为一组紧凑方程，以便于开发和实现。空间记法在这方面非常有效，可用于描述动力学算法。空间矢量代数是一种简洁的矢量记法，它采用6维矢量和张量，来描述刚体的速度、加速度、惯性等。

本章的目的在于向读者介绍机器人动力学，并以紧凑形式提供一组丰富的算法，读者可将其应用到他们的特定机器人机构中。为方便随时查阅，这些算法将采用表格形式。

## 2.1 概述

机器人动力学提供了驱动和接触力之间的关系，以及带来的加速度和运动轨迹的关系。运动体的动力学方程是许多算法的基础，这些算法可用于机械设计、控制及仿真模拟。目前增长的应用领域主要是移动系统的计算机动画，特别是用于人体及人型模型方面。本章将提出机器人机构的基本动力学关系，以及最常见计算的有效算法。算法将采用简洁的空间矢量记法——一种6维的矢量和张量记法。

本章针对四种主要的计算类型，提出相应的有效低阶算法：

1）逆向动力学，即通过指定的机器人轨迹（位置、速度和加速度），来计算关节执行器的力矩/力。

2）正向动力学，即用指定的关节执行器的力矩/力，来确定关节加速度。

3）关节空间惯性矩阵，它将关节加速度映射到关节力矩/力。

4）操作空间惯性矩阵，它在操作空间（或笛卡儿空间）上，将任务加速度映射到任务力上。

逆向动力学用于前馈控制，正向动力学则用于模拟仿真。关节空间惯性（质量）矩阵用于反馈控制中的线性化动力学分析，同时也是正向动力学公式的主要部分。操作空间惯性矩阵主要用于任务控制，或者末端执行器的位控制。

### 2.1.1 空间矢量记法

2.2节提出了空间矢量记法，以清楚而简练的方式来表示本章的算法。这种记法最初由 *Featherstone* 提出[2.1]，他采用6维的矢量和张量形式，用简练的矢量记法来描述刚体的速度、加速度、惯性等。2.2节中解释了空间矢量和算子的含义，并通过表格形式，详细说明了6维空间中这些量和算子与标准三维空间的对应关系，以便后面章节中能够理解这些算法。另外还提供了能有效用于计算实现的空间算法公式。作者力图通过空间矢量的讨论，来区别坐标矢量和用它表示的其他量，并阐述空间矢量的一些重要特性。

### 2.1.2 正则方程

2.3节中提出了运动体动力学方程的两种基本形式：关节空间公式和操作空间公式。关节空间公式中的各项一般通过拉格朗日（Lagrangian）方法推导，其不依赖于任何参考坐标系。拉格朗日公式用于描述关节执行器力和机构运动之间的关系，以及系统中动能和势能的基本关系。由于关节空间公式具有许多节点属性，因此被证明可用于开发控制算法。此外，本节还提出了关节空间和操作空间公式中相关项的方程，以及碰撞模型。

### 2.1.3 刚体系统动力学模型

本章中的算法，需要基于这样一种数据结构模型，它能通过其输入参数来描述机器人机构运动。2.4节提供了这种模型的分量描述方式：连接图、连杆几何参数、连杆惯性参数，以及一组关节模型。连接性描述具有一般性，以便能够涵盖运动树和闭环机构。运动树和用于闭环机构的生成树共用通用记法。为了描述连杆和关节的几何学，每个关节上采用两个关联的坐标系，分别放在*前导杆*和*后继杆*上。后继坐标系可定义为与修正 Denavit Hartenberg 约定兼容[2.2]，用于单自由度关节。前导坐标系可定义为一种便捷方式，用于描述一般的多自由度关节。采用 *Roberson-Schwertassek* 通用关节模型来描述连杆间的连接关系[2.3]。作为示例，本节给出了仿人机器人的连杆和关节编号方式，以及用于描述连杆和关节的坐标系配置。该示例包括浮基（底座）和回转关节、万向节和球关节。

### 2.1.4 运动树

用2.5节提出的算法，可对任意机器人机构（即运动树），计算逆向动力学、正向动力学、关节空间惯性矩阵和操作空间惯性矩阵。对于逆向动力学问题采用 $O(n)$ 算法，这里 $n$ 为机构中的自由度数。它利用问题的牛顿-欧拉公式，并基于非常有效的递归牛顿-欧拉算法（RNEA）[2.4]。对于正向运动学问题，主要采用两种算法：一种是 *Featherstone* 提出的 $O(n)$ 关节体算法（ABA）[2.1]，另外一种是 *Walker* 和 *Orin* 提出的 $O(n^2)$ 复合刚体算法（CRBA）[2.5]，用于计算关节空间惯性矩阵（JSIM）。该矩阵连同采用 RNEA 得到的矢量，提供运动方程的系数，用于对加速度的直接求解[2.5]。操作空间惯性矩阵（OSIM）为一类关节体惯量，可采用如下两种算法：第一种方法是采用 OSIM 的基本定义，第二种方法是直接的 $O(n)$算法，它基于正向运动学问题的有效解。为方便随时查阅，对于每一种算法的输入、输出、模型数据及伪代码，都总结在表格中。

### 2.1.5 运动环

上述算法仅适用于具有运动树连接性、无分支运动链的机构。2.6节给出了最终的算法公式，可用于闭环系统的正向动力学，其中包括并联机器人机构。该算法对闭环系统的生成树运用动力学方程，并补充闭环约束方程。本节简要介绍了用于求解线性系统的三种方法，其中方法二对于 $n >> n^c$ 的情况特别有用，这里 $n^c$ 为闭环关节的约束数。该方法还提出可对生成树运用 $O(n)$ 算法[2.6]。在本节最后，提出了一种通过将变量变换到单一坐标系中，来计算闭环约束的有效算法。因为这里闭环约束方程应用在加速度级别，所以采用标准 *Baumgarte* 稳定性条件[2.7]，防止闭环约束中产生位置和速度误差累积。

本章最后一节进行了总结，提出了延伸阅读的建议。机器人动力学领域已经并将持续成为内容丰富的研究领域，本节概述了本领域已取得的主要成果，以及最常引述的相关工作。由于篇幅所限，不能全方位地对本领域内的众多文献加以评述。

## 2.2 空间矢量记法

机器人运动学问题的描述，目前还没有一个统一的数学记法。当前使用的包括3维矢量、4×4矩阵，以及几种类型的6维矢量：旋量、对偶矢量、李代数元素和空间矢量。通常认为6维矢量记法最好，它比3维矢量记法紧凑，又比4×4矩阵功能强大，因此我们在本章中全部采用6维矢量记法，并运用参考文献［2.8］中提供的空间矢量代数学方法。此外，4×4矩阵介绍见参考文献［2.9］，其他6维矢量参阅参考文献［2.10-12］。

在本书中，矢量通常采用粗斜体字母（如：$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{v}$）。然而为了避免命名冲突，我们将采用粗正体字母表示空间矢量（如：$\mathbf{f}$、$\mathbf{v}$）。注意这种表示仅适用于矢量，而不用于张量。同样，仅在本节中，坐标矢量将采用带下划线字母，以区别于用它们表示的那些矢量（如坐标 $\underline{\boldsymbol{v}}$、$\underline{\mathbf{v}}$ 表示 $\boldsymbol{v}$、$\mathbf{v}$）。

### 2.2.1 运动和力

出于数学的原因，区分这两类矢量是有益的，即描述刚体运动的矢量和作用于刚体上的力矢量。因此我们将运动矢量放入称之为 $\mathrm{M}^6$ 的矢量空间，而将力矢量置入 $\mathrm{F}^6$ 空间（这里上标表示维数）。运动矢量用于描述诸如速度、加速度、无穷小位移，以及运动自由的方向，力矢量描述力、动量、接触法线等。

### 2.2.2 基矢量

设 $\boldsymbol{v}$ 是三维矢量，且 $\underline{v}=(v_x, v_y, v_z)^{\mathrm{T}}$ 是笛卡儿坐标矢量，用于表示在正交基 $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ 中的 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\underline{\boldsymbol{v}}$ 之间的关系用公式表示为

$$\boldsymbol{v}=\hat{x}\,v_x+\hat{y}\,v_y+\hat{z}\,v_z$$

这一思想也适用于空间矢量，例外的情况是采用Plücker坐标替代笛卡儿坐标，并用Plücker基矢量替代正交基。

Plücker坐标在1.2.6节中已做过介绍，基矢量表示如图2.1所示。图中总共有12个基矢量：6个运动矢量和6个力矢量。给定的一个笛卡儿坐标系 $Oxyz$，Plücker基矢量定义如下：3个关于有向直线 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 的单位转角，表示为 $\mathbf{d}_{Ox}$、$\mathbf{d}_{Oy}$、$\mathbf{d}_{Oz}$；3个 $x$、$y$、$z$ 方向的单位平移，表示为 $\mathbf{d}_x$、$\mathbf{d}_y$、$\mathbf{d}_z$；3个分别关于 $x$、$y$、$z$ 方向的单位力偶，表示为 $\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$、$\mathbf{e}_z$；3个沿 $Ox$、$Oy$、$Oz$ 方向的单位力，表示为 $\mathbf{e}_{Ox}$、$\mathbf{e}_{Oy}$、$\mathbf{e}_{Oz}$。

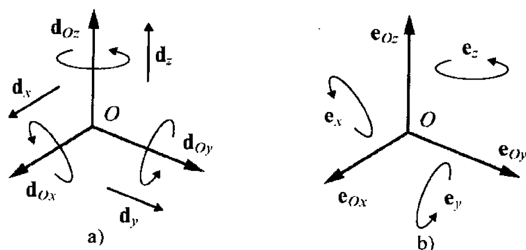



图2.1 Plücker基矢量
a）运动矢量 b）力矢量

### 2.2.3 空间速度和力

给定任意一点 $O$，刚体的速度可通过一对三维矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 描述，$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 分别是刚体（构件）上当前位于 $O$ 点的一个固定点的角速度和线速度。注意 $\boldsymbol{v}_O$ 不是 $O$ 点本身的线速度，而是刚体上正好与 $O$ 点重合的、刚体固定点的瞬时速度。

对同一刚体，其速度也可描述为一个空间运动矢量，$\mathbf{v}\in\mathrm{M}^6$。为了通过 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 得到 $\mathbf{v}$，我们首先介绍笛卡儿坐标系 $Oxyz$，其原点为 $O$ 点。此构型对 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_O$ 定义了笛卡儿坐标系，也对 $\mathbf{v}$ 定义了Plücker坐标系，给定这些坐标系，可以表示为

$$\mathbf{v}=\mathbf{d}_{Ox}\omega_x+\mathbf{d}_{Oy}\omega_y+\mathbf{d}_{Oz}\omega_z+\mathbf{d}_x v_{Ox}+\mathbf{d}_y v_{Oy}+\mathbf{d}_z v_{Oz} \tag{2.1}$$

这里 $\omega_x$，…，$v_{Oz}$是笛卡儿坐标系 $Oxyz$ 中 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $v_O$的坐标。这样，v 的 Plücker 坐标即为 $\boldsymbol{\omega}$ 和$v_O$的笛卡儿坐标。在 $Oxyz$ 中用坐标矢量表示的 v 可以写成：

$$\underline{\mathbf{v}}_O=\begin{pmatrix}\omega_x\\ \vdots\\ v_{Oz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{\omega}}\\ \underline{v}_O\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

式中最右边项为 Plücker 坐标列的缩写记法。

类似地可以定义空间力：给定任意点 $O$，作用在刚体上的力系，可等效为沿通过 $O$ 点作用线的一个集中力$\boldsymbol{f}$，再加上一个纯力偶 $\boldsymbol{n}_O$，它是力系关于 $O$ 点的力矩。这样，用两个矢量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{n}_O$ 描述作用于刚体上的力系，这与用 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $v_O$描述速度相类似。这个力也可用一个空间力矢量来表述，即 $\mathbf{f}\in \mathrm{F}^6$，引入与前面一样的坐标系 $Oxyz$，可得

$$\mathbf{f}=\mathbf{e}_x n_{Ox}+\mathbf{e}_y n_{Oy}+\mathbf{e}_z n_{Oz}+\mathbf{e}_{Ox}f_x+\mathbf{e}_{Oy}f_y+\mathbf{e}_{Oz}f_z \tag{2.3}$$

式中，$n_{Ox}$，…，$f_z$为 $Oxyz$ 中的$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{n}_O$的笛卡儿坐标。在 $Oxyz$ 中用坐标矢量表示的 f 为

$$\underline{\mathbf{f}}_O=\begin{pmatrix}n_{Ox}\\ \vdots\\ f_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{n}}_O\\ \underline{\mathbf{f}}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

即为 $Oxyz$ 中 f 的 Plücker 坐标，上式最右边的项为 Plücker 坐标列的简化记法。

### 2.2.4 加法和数乘

在加法和数乘中，空间矢量表现为显式方式。例如，如果力 $\mathbf{f}_1$和 $\mathbf{f}_2$都作用于刚体，则它们的合力为 $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$。又如两个不同物体分别具有速度 $\mathbf{v}_1$和 $\mathbf{v}_2$，则第二个刚体相对于第一刚体的速度为 $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$。如果 f 表示空间上 1N 的力沿着某一直线作用，则 $\alpha\mathbf{f}$ 表示 $\alpha$N 的力作用于同一直线上。

### 2.2.5 数量积

数量积定义在两个任意的空间矢量上，假设其中一个是运动，另外一个为力，给定任意 $\mathbf{m}\in\mathbf{M}^6$，$\mathbf{f}\in\mathbf{F}^6$，数量积可写成 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{f}$ 或者 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{m}$ 的形式。这表示作用于刚体的力 f 使刚体运动 m 所做的功，像 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}$ 的表达式则无定义。如果 $\underline{\mathbf{m}}$ 和 $\underline{\mathbf{f}}$ 为同一坐标系下，用坐标矢量表示的 m 和 f，则有

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{f}=\underline{\mathbf{m}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{f}} \tag{2.5}$$

### 2.2.6 坐标变换

运动矢量和力矢量服从不同的变换规则：设 $A$ 和 $B$ 为两个坐标构型，每个定义一个同名坐标系；又令 $\underline{\mathbf{m}}_A$，$\underline{\mathbf{m}}_B$，$\underline{\mathbf{f}}_A$，$\underline{\mathbf{f}}_B$ 为 $A$ 和 $B$ 坐标系下坐标矢量表示的空间矢量，$\mathbf{m}\in\mathbf{M}^6$，$\mathbf{f}\in\mathbf{F}^6$，则变换规则为

$$\underline{\mathbf{m}}_B={}^B\boldsymbol{X}_A\underline{\mathbf{m}}_A \tag{2.6}$$

$$\underline{\mathbf{f}}_B={}^B\boldsymbol{X}_A^F\underline{\mathbf{f}}_A \tag{2.7}$$

式中，${}^B\boldsymbol{X}_A$和${}^B\boldsymbol{X}_A^F$分别为对运动和力矢量从 $A$ 到 $B$ 的坐标变换矩阵。这些矩阵通过恒等式相关联

$${}^B\boldsymbol{X}_A^F\equiv({}^B\boldsymbol{X}_A)^{-\mathrm{T}}\equiv({}^A\boldsymbol{X}_B)^{\mathrm{T}} \tag{2.8}$$

设构型 $A$ 相对于构型 $B$ 的位置和姿态通过一个位置矢量${}^B\underline{\boldsymbol{p}}_A$和一个 4×4 的旋转矩阵${}^B\boldsymbol{R}_A$（见 1.2 节）来描述，则${}^B\boldsymbol{X}_A$为

$$\begin{aligned}{}^B\boldsymbol{X}_A&=\begin{pmatrix}1&0\\ \boldsymbol{S}({}^B\boldsymbol{p}_A)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{R}_A&0\\ 0&{}^B\boldsymbol{R}_A\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{R}_A&0\\ \boldsymbol{S}({}^B\boldsymbol{p}_A){}^B\boldsymbol{R}_A&{}^B\boldsymbol{R}_A\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.9}$$

它的逆为

$${}^A\boldsymbol{X}_B=\begin{pmatrix}{}^A\boldsymbol{R}_B&0\\ 0&{}^A\boldsymbol{R}_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\ -\boldsymbol{S}({}^B\boldsymbol{p}_A)&1\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$\boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{p}})$ 为斜对角阵，对于任意的 3 维矢量$\underline{\boldsymbol{v}}$，满足 $\boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{p}})\underline{\boldsymbol{v}}=\underline{p}\times\underline{\boldsymbol{v}}$，用公式表示为

$$\boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{p}})=\begin{pmatrix}0&-p_z&p_y\\ p_z&0&-p_x\\ -p_y&p_x&0\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

### 2.2.7 矢量积

空间矢量的矢量积（叉积）有两种定义，第一种是由两个运动矢量变量得到一个运动矢量结果，用公式表示为

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{m}}_1\times\underline{\mathbf{m}}_2&=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{m}}_1\\ \underline{\boldsymbol{m}}_{10}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{m}}_2\\ \underline{\boldsymbol{m}}_{20}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{m}}_1\times\underline{\boldsymbol{m}}_2\\ \underline{\boldsymbol{m}}_1\times\underline{\boldsymbol{m}}_{20}+\underline{\boldsymbol{m}}_{10}\times\underline{\boldsymbol{m}}_2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.12}$$

第二种是运动矢量为左变量，力矢量为右变量，其积的结果是一个力矢量，即

$$\underline{\mathbf{m}}\times\underline{\mathbf{f}}=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{m}}\\ \underline{\boldsymbol{m}}_O\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{f}}_O\\ \underline{\boldsymbol{f}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{m}}\times\underline{\boldsymbol{f}}_O+\underline{\boldsymbol{m}}_O\times\underline{\boldsymbol{f}}\\ \underline{\boldsymbol{m}}\times\underline{\boldsymbol{f}}\end{pmatrix} \tag{2.13}$$

这些矢量积也可出现在微分公式中。

类似于式（2.11），也可定义这样一个矢量积算子，形式如下：

$$\boldsymbol{S}(\underline{\mathbf{m}})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{m}})&0\\ \boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{m}}_O)&\boldsymbol{S}(\underline{\boldsymbol{m}})\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

在这种情况下，

$$\underline{\mathbf{m}}_1 \times \underline{\mathbf{m}}_2 = \boldsymbol{S}(\underline{\mathbf{m}}_1)\underline{\mathbf{m}}_2 \tag{2.15}$$

而

$$\underline{\mathbf{m}} \times \underline{\mathbf{f}} = -\boldsymbol{S}(\underline{\mathbf{m}})^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{f}} \tag{2.16}$$

可以看出，这里 $\boldsymbol{S}(\underline{\mathbf{m}})$ 映射运动矢量到运动矢量，而 $\boldsymbol{S}(\underline{\mathbf{m}})^{\mathrm{T}}$ 映射力矢量到力矢量。

### 2.2.8 微分

空间矢量的导数定义如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{s}(x) = \lim_{\delta x \to \infty}\frac{\mathbf{s}(x+\delta x) - \mathbf{s}(x)}{\delta x} \tag{2.17}$$

式中，s 为任意空间矢量。导数就是同类空间矢量（运动或力）求其微分。

在动坐标系中，对空间矢量求微分的公式为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}\right)_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{\mathbf{s}}_A + \underline{\mathbf{v}}_A \times \underline{\mathbf{s}}_A \tag{2.18}$$

式中，s 是任意空间矢量；$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}t}$ 表示 s 对时间求导；$A$ 是动坐标系；$\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}t}\right)_A$ 是 $A$ 坐标系下的 $\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}t}$；$\underline{\mathbf{s}}_A$ 是 s 在 $A$ 坐标系中的坐标矢量；$\mathrm{d}\mathbf{s}_A/\mathrm{d}t$ 是 $\underline{\mathbf{s}}_A$ 对时间的导数（这里对各分量求导，因为 $\underline{\mathbf{s}}_A$ 是坐标矢量）；$\underline{\mathbf{v}}_A$ 是 $A$ 坐标系下的速度。

对于运动体的空间矢量，其对时间的导数是变化的，给定如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{s} = \mathbf{v} \times \mathbf{s} \tag{2.19}$$

式中，v 是 s 的速度量。此公式适用于自身的微分量没有变化，而它附在运动刚体上的情况（如关节轴矢量）。

### 2.2.9 加速度

空间加速度定义为空间速度的变化率。然而这里空间加速度的含义不同于传统教科书上的刚体加速度定义（我们称之为经典加速度），其本质差别概括如下：

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix}\dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \\ \dot{\underline{\boldsymbol{v}}}_O\end{pmatrix} \text{与 } \underline{\mathbf{a}}' = \begin{pmatrix}\dot{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \\ \dot{\underline{\boldsymbol{v}}}'_O\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

式中，$\underline{\mathbf{a}}$ 是空间加速度；$\underline{\mathbf{a}}'$ 是经典加速度；$\dot{\underline{\boldsymbol{v}}}_O$ 是将 $O$ 点固定在空间上时对 $\underline{\boldsymbol{v}}_O$ 的导数；$\dot{\underline{\boldsymbol{v}}}'_O$ 是将 $O$ 点固定于构件上时对 $\underline{\boldsymbol{v}}_O$ 的导数，两种加速度的关系为

$$\underline{\mathbf{a}}' = \underline{\mathbf{a}} + \begin{pmatrix}\underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{v}}_O\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

如果 $\boldsymbol{r}$ 是位置矢量，它表示 $O$ 点处刚体固定点相对于任意空间固定点的位置，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_O &= \dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}'_O &= \ddot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_O &= \ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O \end{aligned} \tag{2.22}$$

两种加速度的实际差别在于，空间加速度使用起来更方便。例如：如果构件 $B_1$ 和 $B_2$ 分别具有速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$，且 $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ 是 $B_2$ 关于 $B_1$ 的相对速度，则

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$$

其空间加速度间的关系，只要对上述速度公式求微分即可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}) \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{\mathrm{rel}}$$

可见空间加速度与速度类似，由两项相加构成，不用考虑科氏（Coriolis）项或离心项，这是在公式上对经典加速度的一个重要改进，见参考文献[2.2，13，14]。

### 2.2.10 空间动量

设刚体质量为 $m$，质心为 $C$，且关于 $C$ 点的转动惯量为 $\bar{I}^{\mathrm{cm}}$（如图 2.2 所示）。如果构件运动的空间速度为 $\underline{\mathbf{v}}_C = (\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，则其线性动量为 $\boldsymbol{h} = m\boldsymbol{v}_C$，固有角动量为 $\boldsymbol{h}_C = \bar{I}^{\mathrm{cm}}\boldsymbol{\omega}$。它关于某一点 $O$ 的动量矩为 $\boldsymbol{h}_O = \boldsymbol{h}_C + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{h}$，这里 $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$。我们将这些矢量组合成一个空间动量矢量的形式，表示如下：

$$\underline{\mathbf{h}}_C = \begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{h}}_C \\ \underline{\boldsymbol{h}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{I}^{\mathrm{cm}}\underline{\boldsymbol{\omega}} \\ m\underline{\boldsymbol{v}}_C\end{pmatrix} \tag{2.23}$$

且

$$\underline{\mathbf{h}}_O = \begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{h}}_O \\ \underline{\boldsymbol{h}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \mathbf{S}(\underline{\boldsymbol{c}}) \\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\underline{\mathbf{h}}_C \tag{2.24}$$

空间动量为力矢量及其相应的变换。

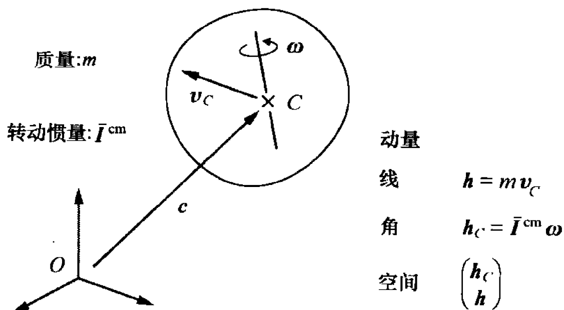



图 2.2 空间动量

### 2.2.11 空间惯量

刚体的空间动量是其空间惯量和速度的积：

$$\mathbf{h}=\boldsymbol{I}\mathbf{v} \tag{2.25}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是空间惯量，在 $C$ 点用 Plücker 坐标表示，可得

$$\mathbf{h}_C=\boldsymbol{I}_C\mathbf{v}_C \tag{2.26}$$

其中

$$\boldsymbol{I}_C=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & m\mathbf{1}\end{pmatrix} \tag{2.27}$$

这就是质心处刚体空间惯量的一般公式。而对另外一点 $O$ 的惯量表达式，由式（2.21）、式（2.26）和式（2.27），求解如下：

$$\underline{\mathbf{h}}_O=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{S}(\underline{c})\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}\underline{\mathbf{v}}_C$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{S}(\underline{c})\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\underline{\mathbf{v}}_O$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}+m\boldsymbol{S}(\underline{c})\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{S}(\underline{c})\\ m\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}\underline{\mathbf{v}}_O$$

而已有 $\underline{\mathbf{h}}_O=\boldsymbol{I}_O\underline{\mathbf{v}}_O$ 故

$$\boldsymbol{I}_O=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}+m\boldsymbol{S}(\underline{c})\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{S}(\underline{c})\\ m\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

这一方程也可写成

$$\boldsymbol{I}_O=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}_O & m\boldsymbol{S}(\underline{c})\\ m\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{I}}_O=\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}+m\boldsymbol{S}(\underline{c})\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} \tag{2.30}$$

为关于点 $O$ 的刚体转动惯量。

空间惯性矩阵为对称正定矩阵。一般情况下，确定一个空间惯量需要21个数（如：对于关节体或者操作空间惯量）；而刚体惯量只需要10个参数：质量、质心坐标，以及 $\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}$（或 $\bar{\boldsymbol{I}}_O$）的6个独立元素。

空间惯量的变换规则为

$$\boldsymbol{I}_B={}^B\boldsymbol{X}_A^F\boldsymbol{I}_A^A\boldsymbol{X}_B \tag{2.31}$$

式中，$A$ 和 $B$ 为任意两个坐标系。在实际运用中，经常需要只给定 ${}^B\boldsymbol{X}_A$，通过 $\boldsymbol{I}_B$ 来计算 $\boldsymbol{I}_A$，这一变换的公式为

$$\boldsymbol{I}_A=({}^B\boldsymbol{X}_A)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_B^B\boldsymbol{X}_A \tag{2.32}$$

如果两个构件，分别具有惯量 $\boldsymbol{I}_1$ 和 $\boldsymbol{I}_2$，将其刚性连接成一个复合体，则复合体惯量 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{tot}}$ 等于原来各部分惯量之和：

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2 \tag{2.33}$$

这个简单的方程代替了传统三维矢量方法中的三个方程：一个计算组合质量，一个计算复合质心，一个计算复合转动惯量。如果刚体具有惯量 $\boldsymbol{I}$ 并以速度 $\mathbf{v}$ 运动，其动能为

$$T=\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{I}\mathbf{v} \tag{2.34}$$

如果刚体 $B$ 是大系统的一部分，则可对 $B$ 定义一个表观惯性矩阵，用于描述在考虑系统中其他构件的影响时，作用于 $B$ 上的力与加速度之间的关系，这个量称作关节体惯量。如果 $B$ 正好是机器人末端执行器，则其表观惯量称为操作空间惯量。

### 2.2.12 运动方程

空间运动方程表明，作用于刚体上的力等于其动量的变化率：

$$\mathbf{f}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}\mathbf{v})=\boldsymbol{I}\mathbf{a}+\dot{\boldsymbol{I}}\mathbf{v}$$

可以证明，表达式 $\dot{\boldsymbol{I}}\mathbf{v}$ 的值为 $(\mathbf{v}\times\boldsymbol{I}\mathbf{v})$[2.8,15]，故运动方程可写为

$$\mathbf{f}=\boldsymbol{I}\mathbf{a}+\mathbf{v}\times\boldsymbol{I}\mathbf{v} \tag{2.35}$$

这一单个方程合并了刚体运动的牛顿方程和欧拉方程。为了验证这一点，我们复述如下：构件质心位置表达式见式（2.35），并运用式（2.14）、式（2.16）及式（2.22），可得

$$\begin{pmatrix}\underline{n}_C\\ \underline{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\underline{\omega}}\\ \dot{\underline{v}}_C\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}(\underline{\omega})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}(\underline{v}_C)^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{S}(\underline{\omega})^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}\underline{\omega}\\ m\underline{v}_C\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\underline{\omega}}\\ \ddot{\underline{c}}-\underline{\omega}\times\underline{v}_C\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{\omega}\times\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}\underline{\omega}\\ m\underline{\omega}\times\underline{v}_C\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}\dot{\underline{\omega}}+\underline{\omega}\times\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}\underline{\omega}\\ m\ddot{\underline{c}}\end{pmatrix} \tag{2.36}$$

### 2.2.13 计算实现

在计算机上实现空间矢量算法的最简单方法，就是首先利用现有的矩阵运算工具，如 MATLAB®，并按照以下步骤编写程序（或从网上下载）：

1）根据式（2.14），通过 $\mathbf{m}$ 求 $\mathbf{S}(\mathbf{m})$。

2）根据式（2.9），通过 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 求 $\boldsymbol{X}$。

3）根据式（2.28），通过 $\mathbf{m}$、$\mathbf{c}$ 和 $\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}$ 求 $\boldsymbol{I}_o$。

其他空间算述运算，都可以使用标准的矩阵运算程序，另外一些附加程序也可以添加到列表中，如：

1）用于通过各种其他转动表示式，来计算 $\boldsymbol{R}$ 的程序。

2）用于空间和 4×4 矩阵量之间转换的程序。

每逢考虑工作效率比计算效率更为重要时，此方法便值得推荐。

如果需要更高的效率，那么就需要使用一个更精细的空间运算库，包括：

1）对每类空间量定义专门的数据结构。

2）借助效率公式，提供一套计算程序，每个程序实现一种空间算术运算。

表 2.1 中列举了一些合适的数据结构和有效的计算公式。可以看到，用于刚体惯量和 Plücker 变换的建议数据结构，包含的个数仅为 6×6 矩阵表示的三分之一。表 2.1 中列出的效率算法公式，比通常使用的 6×6 和 6×1 矩阵算法计算量节省 1.5～6 倍。更多的效率公式可参阅参考文献［2.16］。

**表 2.1 空间矢量记法**

| 空间量 | |
|---|---|
| $\mathbf{v}$ | 刚体速度 |
| $\mathbf{a}$ | 刚体的空间加速度（$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}$） |
| $\mathbf{a}'$ | 6 维矢量表示的刚体经典加速度 |
| $\mathbf{f}$ | 作用于刚体的力 |
| $\boldsymbol{I}$ | 刚体惯量 |
| $\boldsymbol{X}$ | 运动矢量的 Plücker 坐标变换 |
| $\boldsymbol{X}^F$ | 力矢量的 Plücker 坐标变换（$\boldsymbol{X}^F=\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$） |
| ${}^B\boldsymbol{X}_A$ | 从 $A$ 坐标到 $B$ 坐标的 Plücker 变换 |
| $\mathbf{m}$ | 通用运动矢量（$\mathbf{M}^6$的任意元素） |
| 3 维量 | |
| $O$ | 坐标原点 |
| $\boldsymbol{r}$ | $O$ 点处刚体固定点，相对于空间任意固定点的位置 |
| $\boldsymbol{\omega}$ | 刚体角速度 |
| $\boldsymbol{v}_O$ | $O$ 点处刚体固定点的线速度（$\boldsymbol{v}_O=\dot{\boldsymbol{r}}$） |
| $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ | 刚体角加速度 |
| $\dot{\boldsymbol{v}}_O$ | $O$ 点固定于空间上时，$\boldsymbol{v}_O$的导数 |
| $\dot{\boldsymbol{v}}_O'$ | $O$ 点固定于刚体上时，$\boldsymbol{v}_O$的导数；$O$ 点处刚体固定点的经典加速度（$\dot{\boldsymbol{v}}_O'=\ddot{\boldsymbol{r}}$） |
| $\boldsymbol{f}$ | 作用于刚体的力，或力系的合力 |
| $\boldsymbol{n}_O$ | 力或力系对 $O$ 点的矩 |
| $m$ | 刚体质量 |
| $\boldsymbol{c}$ | 刚体质心相对于 $O$ 点的位置 |
| $\boldsymbol{h}$ | 刚体惯性矩 $\boldsymbol{h}=m\boldsymbol{c}$，也可以表示为线性动量 |
| $\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}$ | 关于质心的转动惯量 |
| $\bar{\boldsymbol{I}}$ | 关于 $O$ 点的转动惯量 |
| ${}^B\boldsymbol{R}_A$ | 从坐标系 $A$ 到 $B$ 的正交旋转矩阵变换 |
| ${}^A\boldsymbol{p}_B$ | $B$ 坐标系原点相对于 $A$ 坐标系原点的位置，用 $A$ 坐标系表示 |
| 方程 | |
| $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}_O\end{pmatrix}\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \ddot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}\end{pmatrix}$ | |
| $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_O\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix}\quad \mathbf{a}'=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}_O'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\omega}}\\ \ddot{\boldsymbol{r}}\end{pmatrix}=\mathbf{a}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_O\end{pmatrix}$ | |
| $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}}^{\mathrm{cm}}+m\boldsymbol{S}(\underline{c})\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\boldsymbol{S}(\underline{c})\\ m\boldsymbol{S}(\underline{c})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}$ | |
| ${}^B\boldsymbol{X}_A=\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{R}_A & \boldsymbol{0}\\ {}^B\boldsymbol{R}_A\boldsymbol{S}({}^B\boldsymbol{p}_A)^{\mathrm{T}} & {}^B\boldsymbol{R}_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^B\boldsymbol{R}_A & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{S}({}^B\boldsymbol{p}_A){}^B\boldsymbol{R}_A & {}^B\boldsymbol{R}_A\end{pmatrix}$ | |
| $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_O+\boldsymbol{v}_O\cdot\boldsymbol{f}$ | |
| $\mathbf{v}\times\mathbf{m}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{v}_O\times\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{m}_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_O) & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{m}_O\end{pmatrix}$ | |
| $\mathbf{v}\times\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}_O+\boldsymbol{v}_O\times\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}_O)\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_O\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix}$ | |

紧凑计算表示法

| 数学对象 | 尺度 | 计算表示法 | 尺度 |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}_O\end{pmatrix}$ | 6×1 | $(\boldsymbol{\omega};\ \boldsymbol{v}_O)$ | 3+3 |
| $\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_O\\ \boldsymbol{f}\end{pmatrix}$ | 6×1 | $(\boldsymbol{n}_O;\ \boldsymbol{f})$ | 3+3 |
| $\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{I}} & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}} & m\mathbf{1}\end{pmatrix}$ | 6×6 | $(m;\ \boldsymbol{h};\ \bar{\boldsymbol{I}})$ | 1+3+9 |
| $\begin{pmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}\end{pmatrix}$ | 6×6 | $(\boldsymbol{R};\ \boldsymbol{p})$ | 9+3 |

（续）

| 有效空间算术公式 | |
|---|---|
| 表 达 式 | 计 算 值 |
| $X\mathbf{v}$ | $(R\omega;\ R(v_O - p\times\omega))$ |
| $X^F\mathbf{f}$ | $(R(n_O - p\times f);\ Rf)$ |
| $X^{-1}$ | $(R^{\mathrm{T}};\ -Rp)$ |
| $X^{-1}\mathbf{v}$ | $(R^{\mathrm{T}}\omega;\ R^{\mathrm{T}}v_O + p\times R^{\mathrm{T}}\omega)$ |
| $(X^F)^{-1}\mathbf{f}$ | $(R^{\mathrm{T}}n_O + p\times R^{\mathrm{T}}f;\ R^{\mathrm{T}}f)$ |
| $X_1X_2$ | $(R_1R_2;\ p_2 + R_2^{\mathrm{T}}p_1)$ |
| $I_1 + I_2$ | $(m_1+m_2;\ h_1+h_2;\ \bar{I}_1+\bar{I}_2)$ |
| $I\mathbf{v}$ | $(\bar{I}\omega + h\times v_O;\ m v_O - h\times\omega)$ |
| $X^{\mathrm{T}}IX$ | $(m;\ R^{\mathrm{T}}h + mp;\ R^{\mathrm{T}}\bar{I}R - S(p)S(R^{\mathrm{T}}h) - S(R^{\mathrm{T}}h+mp)S(p))$ |

注：$X^{\mathrm{T}}IX$ 的含义参见式（2.32）。

### 2.2.14 小结

空间矢量为6维矢量，它合并了刚体运动的线度和角度两个方面，这使得紧凑记法非常适合用于描述动力学算法。为避免名称上的冲突，我们采用粗正体字母表示空间矢量，而张量仍然使用斜体表示。在接下来的几节中，将采用正体字母表示空间矢量，以及相联的其他矢量，如 $\dot{\mathbf{q}}$。

表2.1简要列出了本节介绍的各种空间量和算子，以及按照3维量和算子定义的公式。本节还提出了数据结构和效率公式，用于空间算法的计算实现。此表结合表1.5和表1.6，说明如何计算各种关节类型的姿态、位置和空间速度。注意在读取表2.1时，${}^{B}R_{A}^{\mathrm{T}}$和${}^{A}p_{B}$分别对应于第1章表中的${}^{j}R_{i}$和${}^{j}p_{i}$。

## 2.3 正则方程

机器人机构的运动方程，通常表示为以下两种正则形式：

1）关节空间公式：

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \tau_g(\mathbf{q}) = \tau \quad (2.37)$$

2）操作空间公式：

$$\Lambda(x)\dot{\mathbf{v}} + \mu(x,\mathbf{v}) + \rho(x) = \mathbf{f} \quad (2.38)$$

式（2.37）和式（2.38）给出了显式形式的函数关系：$H$ 是 $\mathbf{q}$ 的函数；$\Lambda$ 是 $x$ 的函数等。一旦明白了这些关系，表述时就可以省略。在式（2.38）中，$x$ 为操作空间坐标中的矢量，其中 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{f}$ 为空间矢量，分别表示末端执行器的速度和作用于其上的外力。如果机器人是冗余的，则这些方程的系数必须定义为 $\mathbf{q}$ 和 $\dot{\mathbf{q}}$ 的函数，而不是 $x$ 和 $\mathbf{v}$ 的函数。

这两个方程连同式（2.37）的拉格朗日描述，以及碰撞问题的运动方程，在下面会作进一步解释。

### 2.3.1 关节空间公式

符号 $\mathbf{q}$、$\dot{\mathbf{q}}$、$\ddot{\mathbf{q}}$ 和 $\tau$ 分别表示关节的位置、速度、加速度和力变量的 $n$ 维矢量，这里 $n$ 是机器人机构的运动自由度数；$H$ 为 $n\times n$ 的对称正定矩阵，称为广义（或关节空间）惯性矩阵（JSTM）；$C$ 是 $n\times n$ 矩阵以使 $C\dot{\mathbf{q}}$ 为科氏矢量和离心项（统称为速度积项）；$\tau_g$为重力项的矢量。如果需要考虑其他动力学影响（如黏性摩擦），还可以在此方程中加进更多项。在末端执行器上，施加于机构的作用力 $\mathbf{f}$ 的影响，可以考虑为，在式（2.37）的右边加上 $J^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$ 项，这里 $J$ 为末端执行器的雅克比矩阵（见1.8节）。

$\mathbf{q}$ 为机构构型空间上一点的坐标，如果机构为一运动树（见2.4节），则 $\mathbf{q}$ 包含机构中的每一个关节变量，否则只包含其中独立的子集。$\mathbf{q}$ 的元素为广义坐标，同样地，$\dot{\mathbf{q}}$、$\ddot{\mathbf{q}}$ 和 $\tau$ 的元素分别为广义速度、加速度和力。

### 2.3.2 拉格朗日公式

式（2.37）中各项的推导方法很多，在机器人学中最常用的有牛顿-欧拉公式和拉格朗日公式。前者对于刚体直接用牛顿-欧拉方程，它包含在式（2.35）的空间运动方程中。这个公式特别适合开发动力学计算中的有效递归算法，见2.5节和2.6节。

拉格朗日公式通过机器人机构的拉格朗日函数进行计算：

$$L = T - U \quad (2.39)$$

式中，$T$ 和 $U$ 分别为机构总的动能和势能。动能由下式给出：

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}H\dot{\mathbf{q}} \quad (2.40)$$

则对每个广义坐标，运用拉格朗日方程，动力学方程可展开为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.41)$$

方程结果可写成标量的形式：

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \tau_{gi} = \tau_i \tag{2.42}$$

其显示为速度乘积项的结构，$C_{ijk}$ 称为第一类型的 Christoffel 符号，给定如下：

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\right) \tag{2.43}$$

其仅为未知变量 $q_i$ 的函数，式（2.37）中 $\boldsymbol{C}$ 的元素定义为

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\dot{q}_k \tag{2.44}$$

然而这里对 $\boldsymbol{C}$ 的定义并不唯一，还有其他可能的定义形式。

通过式（2.44）中 $\boldsymbol{C}$ 的选定，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 可给定如下：

$$\boldsymbol{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\boldsymbol{H}}(\mathbf{q}) - 2\boldsymbol{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \tag{2.45}$$

它是一个反对称矩阵[2.17]，因此对任意 $n\times 1$ 维矢量 $\alpha$ 有

$$\alpha^T\boldsymbol{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\alpha = 0 \tag{2.46}$$

这一性质在控制中非常有用，特别是当 $\alpha = \dot{\mathbf{q}}$ 时，有

$$\dot{\mathbf{q}}^T\boldsymbol{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{2.47}$$

由能量守恒定律可以证明，对于任意选定的矩阵 $\boldsymbol{C}$，式（2.47）均成立[2.17,18]。

### 2.3.3 操作空间公式

在式（2.38）中，$\boldsymbol{x}$ 为操作空间坐标的 6 维矢量，它给出了机器人末端执行器的位置和姿态；$\mathbf{v}$ 是末端执行器的速度；$\mathbf{f}$ 为外加的力。$\boldsymbol{x}$ 是典型的笛卡儿坐标列表，也是欧拉角度或四元素分量，且与 $\mathbf{v}$ 有微分关系

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\mathbf{v} \tag{2.48}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ 为操作空间惯性矩阵，是末端执行器的表观惯性，它考虑到了机器人机构其余部分的影响（即它为关节体惯性）；$\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 分别为速度积矢量和重力矢量。

操作空间（也称任务空间）中，能发出和执行高级别的运动和力指令，因此其公式在运动和力控制中特别有价值（见 6.2 节和 7.2 节）。式（2.38）除了用于 6 维空间外，也可以推广到操作空间中，并能应用到一个以上的末端执行器的组合运动中[2.19]。

式（2.37）和式（2.38）中的项和下列公式有关：

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{J}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.49}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{2.51}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{2.52}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\mathbf{q}}) \tag{2.53}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}} \tag{2.54}$$

这些方程都假定 $m\leqslant n$（$m$ 是操作空间坐标的维数），且雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 为满秩。更多详情参见参考文献［2.20］。

### 2.3.4 碰撞模型

如果机器人运行中碰撞了外界刚体，那么接触瞬间产生冲击力，就会引起机器人速度的阶跃变化。假设末端执行器和外界刚体发生了碰撞，且瞬间冲击力作用在末端执行器上，这个冲击力使得末端执行器的速度产生了 $\Delta\mathbf{v}$ 的阶跃，两者通过碰撞运动的操作空间方程相关联[2.21]

$$\boldsymbol{\Lambda}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f}' \tag{2.55}$$

在关节空间中，机器人机构的碰撞方程为

$$\boldsymbol{H}\Delta\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}' \tag{2.56}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}'$ 和 $\Delta\dot{\mathbf{q}}$ 分别表示关节空间中的冲量和速度变化。在涉及机器人末端执行器的碰撞情况下，有

$$\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}' \tag{2.57}$$

及

$$\Delta\mathbf{v} = \boldsymbol{J}\Delta\dot{\mathbf{q}} \tag{2.58}$$

根据式（2.51）和式（2.49），从式（2.55）~式（2.57）中可得到

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \bar{\boldsymbol{J}}\Delta\mathbf{v} \tag{2.59}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{J}}$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的惯性加权伪逆，给定如下：

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda} \tag{2.60}$$

$\bar{\boldsymbol{J}}$ 也称为雅可比矩阵的动态相容性逆矩阵[2.20]。注意出现在式（2.53）和式（2.54）中的表达式 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}$ 等于 $\bar{\boldsymbol{J}}^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 均为对称阵。尽管文中我们是在碰撞动力学问题中引入的 $\bar{\boldsymbol{J}}$，但它亦可用于常规（非碰撞）动力学方程中。

## 2.4 刚体系统动力学模型

机器人机构的基本刚体动力学模型，由四部分组成：连接图、连杆和关节几何参数、连杆惯性参数，以及一组关节模型。对这个模型，可以加上各种产生力的元件，如弹簧、阻尼器、关节摩擦、执行器和驱动器等。特别是对执行器和驱动器，其具有复杂的动力学模型。在关节轴承和连杆上，可添加额外的运动

自由度来模拟弹性问题（第 13 章）。本节只描述基本模型，关于这一主题的更多内容，可以在一些书中找到，见参考文献 [2.3，8，22]。

### 2.4.1 连接性

连接图是一个无向图，其中每个节点代表一个刚体，每条弧线表示一个关节。该图必须连接，且有一个节点代表固定基或参照系。如果图表示的是移动机器人（即机器人没有连接到固定基上），则需要在固定基和移动机器人任意一个构件间，引入一个虚拟的六自由度关节，选定的构件称为浮基。如果一张图上表示的是多个移动机器人的集合，则每个机器人都有自己的浮基，每个浮基都有自己的六自由度关节。注意这里的六自由度关节，没有在两个连接构件间施加约束，因此它的引入只是改变了图的连接性，而没有改变系统的物理属性。

在图论术语中，环表示一个与自身节点相连的弧，回路表示一条闭合路径且不能穿越任意弧一次以上。在机器人机构的连接图中，环是不允许的，回路称为运动环。包含运动环的机构称为闭环机构，不包含运动环的机构称为开环机构或运动树。每个闭环机构有一个生成树，其定义为开环机构，不在生成树上的关节称为闭环关节，树上的关节称为树关节。

固定基用于运动树的根节点，也是闭环机构任意生成树的根节点。如果至少一个节点具有两个子节点，运动树就称为可分支的，否则称为不可分支的。无分支的运动树称为运动链，有分支的运动树称为分支运动链。典型的工业机器人手臂，没有抓手时是一个运动链，而仿人机器人是带有浮基的运动树。

在一个包含 $N_B$个运动构件和 $N_J$个关节的系统中，这里 $N_J$包括前面提到的六自由度关节。运动构件和关节编号规则如下：首先固定基的编号为构件 0(B0)，其他构件按一定次序从 1 到 $N_B$编号，使子构件编号大于其父编号。如果系统包含运动环，则必须首先选择一个生成树，再进行编号选择，因为父构件的识别要由生成树确定。这种编号风格称为规则编号方案。

完成构件的编号后，就要对树关节从 1 到 $N_B$进行编号，以便通过关节 $i$ 连接构件 $i$ 到其父构件上。如果有闭环关节，则以任一次序从 $N_B+1$ 到 $N_J$进行编号。每个闭环关节 $k$ 闭合一个独立运动环，环编号从 1 到 $N_L$（这里 $N_L=N_J-N_B$为独立的环数），以便环 $l$ 由关节 $k=N_B+l$ 来闭合。在图中运动环 $l$ 是唯一回路，且穿越关节 $k$，但不穿越其他任何闭环关节。

对于无分支的运动树，这些规则产生唯一的编号方式，构件的编号为从基底到顶部进行连续单一编号，关节要这样进行编号：关节 $i$ 连接构件 $i$ 和 $i-1$。在其他情况下，规则编号均不唯一。

尽管连接图是无向的，但有必要对每个关节指派一个方向，用于定义关节速度和力，这对于树关节和闭环关节都是必需的。具体地讲，关节用于连接一个构件到另一个构件，我们可以将关节 $i$ 连接的两个构件，分别称为前导构件 $p(i)$ 和后继构件 $s(i)$，则关节速度定义为后继件相对于前导构件的速度，关节力定义为作用于后继构件的力。对于所有树关节，标准做法（但非必需）是从父构件向子件连接。

运动树或者闭环机构生成树的连接性，可通过其父构件数的 $N_B$个元素数组来描述，其中第 $i$ 个元素 $p(i)$ 为构件 $i$ 的父构件。注意对于构件 $i$ 的父构件 $p(i)$，也是关节 $i$ 的前导构件 $p(i)$，因而是通用的记法。许多算法中借助 $p(i)<i$ 的特性来按正确次序完成计算。对于子构件 $i$，所有构件编号的集合 $c(i)$，也在许多递归算法中有用。

对于运动环的连接性数据描述，可采用多种方式。能方便用于递归算法中的表述，它包括如下约定：闭环关节 $k$ 与前续构件 $p(k)$ 和后继构件 $s(k)$ 相连，集合 $LR(i)$ 为构件 $i$ 的环编号，这里构件 $i$ 为根环。在生成树中对构件运用 $p(i)<i$ 特性，根环选为具有最小编号的构件，同时构件 $i$ 的集合 $LB(i)$ 给出了环的编号，构件 $i$ 属于环但不是根。

图 2.3 给出了闭环系统的一个例子，该系统由带有拓扑变接点的人形机器人机构组成，分别与外界及内部机构相连，形成闭环。系统有 $N_B=16$ 个运动构件（连杆）和 $N_J=19$ 个关节，以及 $N_L=N_J-N_B=3$ 个环。主构件（1）作为移动机器人系统的浮基，其与固定基（0）通过一个假定的六自由度关节（1）相连。为完成本例，对一个环的闭环关节、构件数 $p(k)$ 和 $s(k)$，以及根构件等都通过表 2.2 给出，基于构件的集合 $c(i)$ 和 $LR(i)$ 在表 2.3 中给出。注意本例中 $LR(0)=\{1，3\}$、$LR(1)=\{2\}$，其余的 $LR$ 均为零。

### 2.4.2 连杆几何

当两个构件（连杆）通过关节连接，该连接的完整性描述由关节本身以及两个坐标系的定位来表述，每个构件上有一个坐标系，指出关节定位在构件的什么地方。如果系统中有 $N_J$个关节，则总共有 $2N_J$ 个附属的关节坐标系。其中一半的坐标系采用 $1\sim N_J$

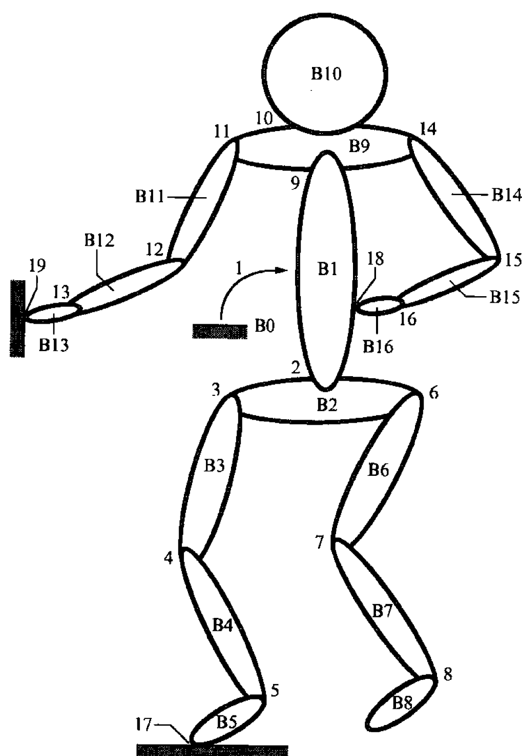



图2.3 仿人机器人实例

注：图中为了区分构件编号和关节编号，在构件编号前面加上字母“B”

表2.2 人形机器人算例中的闭环关节及根环

| 环 $l$ | 闭环关节 $k$ | $p(k)$ | $s(k)$ | 根 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 0 | 5 | 0 |
| 2 | 18 | 16 | 1 | 1 |
| 3 | 19 | 0 | 13 | 0 |

表2.3 人形机器人算例中的构件集

| 构件 $i$ | $c(i)$ | $LB(i)$ | 构件 $i$ | $c(i)$ | $LB(i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 2, 9 | 1, 3 | 9 | 10, 11, 14 | 2, 3 |
| 2 | 3, 6 | 1 | 10 | | |
| 3 | 4 | 1 | 11 | 12 | 3 |
| 4 | 5 | 1 | 12 | 13 | 3 |
| 5 | | 1 | 13 | | 3 |
| 6 | 7 | | 14 | 15 | 2 |
| 7 | 8 | | 15 | 16 | 2 |
| 8 | | | 16 | | 2 |

进行编号，其余的标示为 $J1 \sim JN_J$。每个关节 $i$ 由坐标系 $Ji$ 到坐标系 $i$ 进行连接，对于关节 $1 \sim N_B$（即树关节），坐标系 $i$ 刚性放置于构件 $i$ 上。对于关节 $N_B+1$ 到 $N_J$，用于闭环关节 $k$ 的坐标系 $k$，将刚性放置于构件 $s(k)$ 上。对每个关节 $i$，无论是树关节还是闭环关节，第二个坐标系 $Ji$ 放置在前导构件 $p(i)$ 上。坐标系 $Ji$ 为关节 $Ji$ 提供基坐标，相对于此坐标系定义关节的平动和转动。

图2.4显示的是系统中的坐标系，以及与每个关节有关的坐标变换。对于树关节，从坐标系 $p(i)$ 到坐标系 $i$ 的坐标变换给定如下：

$$^{i}\boldsymbol{X}_{p(i)} = {}^{i}\boldsymbol{X}_{Ji}\,{}^{Ji}\boldsymbol{X}_{p(i)} = \boldsymbol{X}_J(i)\boldsymbol{X}_L(i) \tag{2.61}$$

式中，变换矩阵 $\boldsymbol{X}_L(i)$ 为固定的连杆变换，它设定为关节 $i$ 的基坐标 $Ji$，相对于 $p(i)$ 的变换，可用于将空间运动矢量从 $p(i)$ 变换到 $Ji$ 坐标；$\boldsymbol{X}_J(i)$ 为一可变的关节变换矩阵，其用于完成关节 $i$ 从坐标 $Ji$ 到 $i$ 的坐标变换。

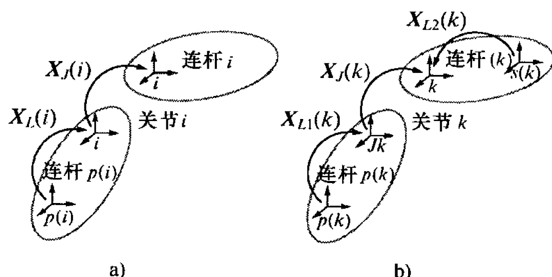



图2.4 坐标构型和变换

a）树关节 b）闭环关节

类似的，对于闭环关节，从坐标系 $p(k)$ 到坐标系 $k$ 的坐标变换如下：

$$^{k}\boldsymbol{X}_{p(k)} = {}^{k}\boldsymbol{X}_{Jk}\,{}^{Jk}\boldsymbol{X}_{p(k)} = \boldsymbol{X}_J(k)\boldsymbol{X}_{L1}(k) \tag{2.62}$$

附加变换 $\boldsymbol{X}_{L2}(k)$ 定义为从坐标系 $s(k)$ 到坐标系 $k$ 的坐标变换，其表示如下：

$$\boldsymbol{X}_{L2}(k) = {}^{k}\boldsymbol{X}_{s(k)} \tag{2.63}$$

连杆和关节数据可以通过多种途径来指定，最常用的方法是使用 D-H（Denavit-Hartenberg）参数[2.23]。然而标准的 D-H 参数不完全具有通用性，不足以对几何特性进行完整描述，如有分支的运动树，或者包含有某些多自由度关节类型的机构。本书中采用了修正形式的 D-H 参数[2.2]，用于单自由度关节（见1.4节）。这些参数已扩展到有分支的运动树及闭环机构上。

### 2.4.3 连杆惯量

连杆惯量数据包括机构中各连杆的质量、质心位

置和转到惯量。在坐标系 $i$ 中，连杆 $i$ 的惯性参数表达式为常数。

### 2.4.4 关节模型

两个连杆之间的连接关系，常采用 Roberson-Schwertassek（R-S）广义关节模型描述[23]。对于运动树或者闭环机构上的生成树，$n_i\times1$ 的矢量 $\dot{\boldsymbol{q}}_i$ 表示连杆 $i$ 相对于其父构件 $p(i)$ 的速度，其中 $n_i$ 为连接两个连杆的关节的自由度数。对于闭环机构的闭环关节，为连杆 $s(i)$（后继杆）和连杆 $p(i)$（前导杆）之间的速度关系，在其他情况下为坐标系 $i$ 和 $Ji$ 间的速度关系。

令 $\mathbf{v}_{rel}$ 和 $\mathbf{a}_{rel}$ 为穿过关节 $i$ 的速度和加速度，即 $s(i)$ 相对于 $p(i)$ 的速度和加速度。关节的自由模式用 $6\times n_i$ 的矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 表示，这样 $\mathbf{v}_{rel}$ 和 $\mathbf{a}_{rel}$ 表示如下：

$$\mathbf{v}_{rel}=\boldsymbol{\Phi}_i\dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{2.64}$$

$$\mathbf{a}_{rel}=\boldsymbol{\Phi}_i\ddot{\boldsymbol{q}}_i+\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i\dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{2.65}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}_i$ 和 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 取决于关节类型[23]，矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 为列满秩，故可定义一个互补矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$，以使 $6\times6$ 的矩阵（$\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^c$）为可逆矩阵，我们可将这个矩阵的列看成 $\mathbf{M}^6$ 上的基，以便将第一个 $n_i$ 基矢量（矩阵第一列）定义为运动的允许方向，且其余的 $6-n_i=n_i^c$ 个矢量定义为运动的不允许方向。这样，$\boldsymbol{\Phi}_i^c$ 表示关节 $i$ 的约束模式。

通过关节 $i$，从前导杆向后继杆传递的力 $\mathbf{f}_i$，给定如下：

$$\mathbf{f}_i=(\boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\psi}_i^c)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}_i\\ \boldsymbol{\lambda}_i\end{pmatrix} \tag{2.66}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}_i$ 为沿自由模式的 $n_i\times1$ 作用力矢量；$\boldsymbol{\lambda}_i$ 为 $(6-n_i)\times1$ 的约束力矢量；$\boldsymbol{\psi}_i$ 和 $\boldsymbol{\psi}_i^c$ 通过下式计算：

$$(\boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\psi}_i^c)=(\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^c)^{-T} \tag{2.67}$$

对于大多数常见的关节类型，可通过选择 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_i^c$，以便矩阵（$\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^c$）数值上正交，从而使（$\boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\psi}_i^c$）在数值上与（$\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{\Phi}_i^c$）相等。注意式（2.67）含有如下关系：$(\boldsymbol{\psi}_i)^T\boldsymbol{\Phi}_i=\mathbf{1}_{n_i\times n_i}$，$(\boldsymbol{\psi}_i)^T\boldsymbol{\Phi}_i^c=\mathbf{0}_{n_i\times(6-n_i)}$，$(\boldsymbol{\psi}_i^c)^T\boldsymbol{\Phi}_i=\mathbf{0}_{(6-n_i)\times n_i}$，$(\boldsymbol{\psi}_i^c)^T\boldsymbol{\psi}_i^c=\mathbf{1}_{(6-n_i)\times(6-n_i)}$。当将其应用于式（2.66）时，可得如下结果：

$$\boldsymbol{\tau}_i=\boldsymbol{\Phi}_i^T\mathbf{f}_i \tag{2.68}$$

式（2.65）中 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 的值取决于关节类型，其一般公式为

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i=\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i+\mathbf{v}_i\times\boldsymbol{\Phi}_i \tag{2.69}$$

式中，$\mathbf{v}_i$ 是连杆 $i$ 的速度；$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 是 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 的表观导数，即观察者随连杆 $i$ 一起运动时所看到的，$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 给定如下：

$$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}_i}{\partial\boldsymbol{q}_i}\dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{2.70}$$

对大多数常见关节类型，$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i=0$。

采用 D-H 约定时，对单自由度关节（$n_i=1$）就特别简单，运动选择为沿 $\hat{z}_i$ 轴横向平移或绕 $\hat{z}_i$ 轴轴向旋转。在这种情况下，对于平移关节 $\boldsymbol{\Phi}_i=(0\,0\,0\,0\,0\,1)^T$，对旋转关节 $\boldsymbol{\Phi}_i=(0\,0\,1\,0\,0\,0)^T$，同样 $\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i=\mathbf{0}$。

对于移动机器人浮基的虚拟六自由度关节来说，也很容易作相关的处理，这种情形下 $\boldsymbol{\Phi}_i=\mathbf{1}$（$6\times6$ 的单位矩阵），且 $\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i=\mathbf{0}$。

旋转关节和浮基关节，以及万向关节（$n_i=2$）和球关节（$n_i=3$），在下一节中将进行举例说明。更多关节运动学的问题，详见 1.3 节。

### 2.4.5 系统算例

为说明连杆及关节模型的规则约定，人形机器人的坐标系分别放在前五根连杆（构件）和固定基上，如图 2.5 所示。注意对 5 个关节，每个关节的坐标系 $Ji$ 放在连杆 $p(i)=i-1$ 上，本例中 $J1$ 的坐标原点放在与坐标系 0 的原点重合位置，且坐标系 $J2$、$J3$、$J4$、$J5$ 的坐标原点分别与坐标系 2、3、4、5 的原点重合。注意 $J1$ 可以设置为固定基（B0）上的任意位置/姿态，以方便表示浮基（B1）相对于固定基的运动，同样 $J2$ 的原点也可以设在沿 $\hat{z}_2$ 的任意位置。

表 2.4 中给出了本例中每个关节的自由度数、基坐标系 $Ji$ 的固定旋转和位置。旋转矩阵 ${}^{Ji}\boldsymbol{R}_{p(i)}$ 将 $p(i)$ 坐标系中的 3 维矢量变换到 $Ji$ 坐标系中。位置矩阵 ${}^{p(i)}\boldsymbol{p}_{Ji}$ 为原点 $O_{Ji}$ 相对于 $O_{p(i)}$ 的位置，用 $p(i)$ 坐标系表示的矢量。空间变换矩阵 $\boldsymbol{X}_L(i)={}^{Ji}\boldsymbol{X}_{p(i)}$ 可通过表 2.1 中的 3 维量对 ${}^BX_A$ 变换构成。人形机构具有浮基、躯干、躯干和骨盆间的旋转关节（关于 $\hat{z}_2$）、髋部的球关节、膝部的旋转关节，以及脚踝处的万向关节。如图 2.5 所示，腿部微弯，脚向外面倾斜（髋部 $\hat{z}_3$ 方向有大约 90°的旋转）。

人形机器人中，对于所有关节类型的自由模式、速度变量，以及位置变量均在表 1.5 和表 1.6 中给出。通过关节变换关系 $\boldsymbol{X}_j(i)={}^i\boldsymbol{X}_{Ji}$，可由这些表中的 ${}^j\boldsymbol{R}_i$ 和 ${}^j\boldsymbol{p}_i$ 分别给出 ${}^j\boldsymbol{R}_{Ji}^T$ 和 ${}^{Ji}\boldsymbol{p}_i$ 的表达式。旋转关节关于 $\hat{z}_i$ 轴的旋转遵循 D-H 约定，紧随关于 $\hat{y}_5$ 轴的滚动旋转角 $\beta_5$，踝关节有关于 $\hat{z}_{J5}$ 轴的俯仰旋转角 $\alpha_5$（见表 1.1 中的 $Z-Y-X$ 欧拉角定义）。髋关节模拟成球窝状的球铰。为避免与欧拉角产生关联奇异性，可用四

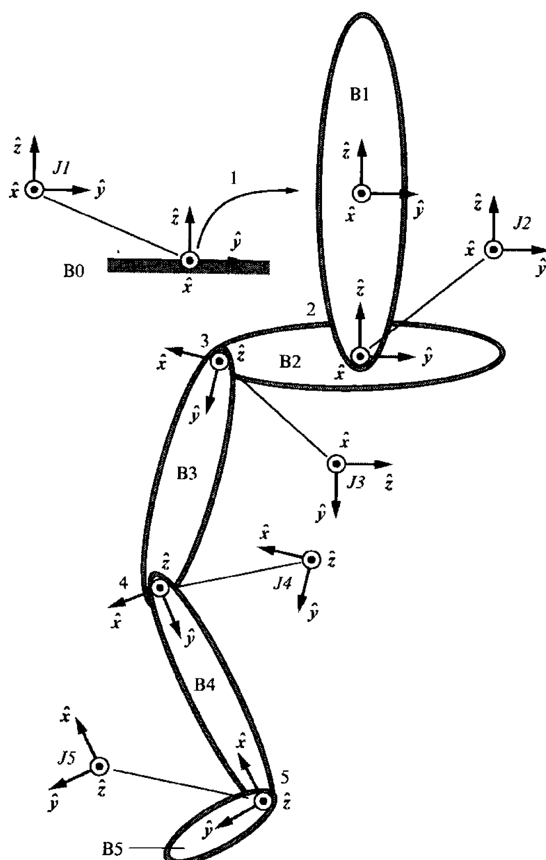



图2.5 人形机器人示例中前5个构件和关节的坐标系示意图

表2.4 系统算例中，关节自由度数、旋转矩阵和位置矩阵

| 关节 | $n_i$ | ${}^{Ji}\boldsymbol{R}_{p(i)}$ | ${}^{p(i)}\boldsymbol{R}_{Ji}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | $\mathbf{1}_{3\times3}$ | $\mathbf{0}_{3\times3}$ |
| 2 | 1 | $\mathbf{1}_{3\times3}$ | $\begin{pmatrix}0\\0\\-l_1\end{pmatrix}$ |
| 3 | 3 | $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\-l_2\\0\end{pmatrix}$ |
| 4 | 1 | $\mathbf{1}_{3\times3}$ | $\begin{pmatrix}0\\2l_3\\0\end{pmatrix}$ |
| 5 | 2 | $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}0\\2l_4\\0\end{pmatrix}$ |

元素$\epsilon_i$表示髋部的姿态，四元素率$\dot{\epsilon}_i$和相对转动率$\boldsymbol{\omega}_{i\,\mathrm{rel}}$的关系在本书的1.7节已给出。

浮基采用躯干${}^0\boldsymbol{p}_i$的位置和四元素$\epsilon_1$分别作为其位置和姿态变量。躯干的位置可通过对连杆的速度进行积分来计算，在固定基坐标中表示为：${}^0\boldsymbol{v}_1={}^0\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{v}_1$，其中，$\boldsymbol{v}_1$为动坐标系中躯干的速度。

注意这里除了万向节外，对于其他关节有$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i=0$。因为连杆5坐标上$\hat{z}_{J5}$的分量随$\beta_5$变化，故$\hat{z}_{J5}\neq0$。更详尽的关节运动学见本书的1.3节。

## 2.5 运动树

与闭环机构的动力学相比，运动树的动力学要简单并易于计算一些。闭环机构的许多算法首先要计算生成树的动力学，然后再加上闭环约束。

本节讲述运动树的如下动力学算法：逆向动力学的递归牛顿-欧拉算法（RNEA）、正向动力学的关节体算法（ABA）、计算关节惯性矩阵（JSIM）的复合刚体算法（CRBA），以及用于计算操作空间惯性矩阵（OSIM）的两种算法。

### 2.5.1 递归牛顿-欧拉算法

这是一种计算复杂度为$O(n)$的算法，用于计算固定基运动树的逆向动力学，它是基于Luh等人的一种非常高效的牛顿-欧拉算法(RNEA)[2.4]。另外有关浮基的算法可在参考文献[2.8，15]中找到。给出关节的位置和速度变量，该算法计算应用关节力矩/力变量时，需要给定一组关节加速度。

首先，连杆的速度和加速度可通过向外递归计算出来，即从固定基向树的叶链（连杆）方向递归。在递归过程中，采用牛顿-欧拉方程式（2.35），计算出每个连杆上的合力。其次，向内递归采用每个连杆上的力平衡方程来计算经过每个关节的空间力，以及每个关节力矩/力变量的值。影响计算效率的关键步骤在于如何把最多的量纳入到连杆局部坐标中。同样，机构向上加速时，每个连杆上的重力影响也应包括在方程中。

计算过程分为如下4步，其中两步中，每步有两次递归。

1）第一步。从固定基的已知速度和加速度开始，依次计算每个连杆的速度和加速度，并朝树顶方向进行，即连接图中的叶节点方向。

运动树上每个连杆的速度由递归公式给出

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i, \quad (\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}) \tag{2.71}$$

式中，$\mathbf{v}_i$为连杆 $i$ 的速度；$\boldsymbol{\Phi}_i$为关节 $i$ 的运动矩阵；$\dot{\boldsymbol{q}}_i$为关节 $i$ 的关节速度变量的矢量。

加速度的等效换算公式可通过对式（2.71）求微分得到

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i, \quad (\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}) \tag{2.72}$$

式中，$\mathbf{a}_i$为连杆 $i$ 的加速度；$\ddot{\boldsymbol{q}}_i$ 为关节加速度变量的矢量。

机构上均匀重力场的影响，可通过将 $\mathbf{a}_0$ 中的零初始化为 $-\mathbf{a}_g$ 来模拟实现，这里 $\mathbf{a}_g$ 为重力加速度矢量。在这种情况下，$\mathbf{a}_i$不是连杆的真实加速度，而是真实加速度与 $-\mathbf{a}_g$的和。

2）第二步。计算每个连杆的运动方程。这一步计算力时需要用到上一步计算得到的加速度。连杆 $i$ 的运动方程为

$$\mathbf{f}_i^{a} = \boldsymbol{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i \tag{2.73}$$

式中，$\boldsymbol{I}_i$为连杆 $i$ 的空间惯量；$\mathbf{f}_i^{a}$ 为作用于连杆 $i$ 的力。

3）第三步。计算通过每个关节的空间力。参照图 2.6，作用于连杆 $i$ 上的力为

$$\mathbf{f}_i^{a} = \mathbf{f}_i^{e} + \mathbf{f}_i - \sum_{j \in c(i)} \mathbf{f}_j$$

式中，$\mathbf{f}_i$为通过关节 $i$ 的力；$\mathbf{f}_i^{e}$为作用于连杆 $i$ 上的所有相关外力之和；$c(i)$ 为连杆 $i$ 的子集。重新整理方程，得到计算关节力系的递归公式如下：

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{a} - \mathbf{f}_i^{e} + \sum_{j \in c(i)} \mathbf{f}_j \tag{2.74}$$

式中，$i$ 从 $N_B$到 1 迭代。

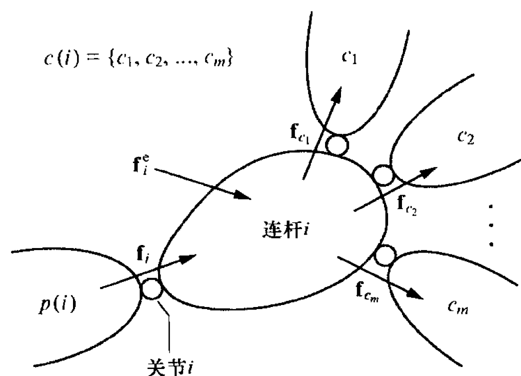



图 2.6 作用于连杆 $i$ 的力系

$\mathbf{f}_i^{e}$可能包括这些因素的贡献，如弹簧、阻尼器、力场、外界接触等，但其值应假设已知，或至少可通过已知量计算出来。如果重力还未通过虚拟基的加速度模拟，则作用于连杆 $i$ 的重力项必须纳入到 $\mathbf{f}_i^{e}$中。

4）第四步。计算关节力变量 $\boldsymbol{\tau}_i$。由定义得

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^{T} \mathbf{f}_i \tag{2.75}$$

**1. 无坐标（Coordinate-Free）算法**

表 2.5 表示的是式（2.71）~式（2.75）所包括的算法，它是牛顿-欧拉算法（RNEA）的无坐标形式。这是该算法的最简单形式，适合于数学分析及相关用途，但不适合用于数值计算，因为数值形式的算法必须采用坐标矢量。

**表 2.5 用于逆向动力学的无坐标递归牛顿-欧拉算法**

$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$
$\mathbf{a}_0 = -\mathbf{a}_g$
**for** $i = 1$ **to** $N_B$ **do**
  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$
  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$
  $\mathbf{f}_i = \boldsymbol{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^{e}$
**end**
**for** $i = N_B$ **to** 1 **do**
  $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^{T} \mathbf{f}_i$
  **if** $p(i) \neq 0$ **then**
    $\mathbf{f}_{p(i)} = \mathbf{f}_{p(i)} + \mathbf{f}_i$
  **end**
**end**

**2. 连杆坐标算法**

一般情况下，如果对每个连杆定义一个坐标系，我们所说的算法就在连杆坐标系中实现，且对于连杆 $i$ 的计算，就在与连杆 $i$ 相关联的坐标系中完成。替代方案是在绝对坐标系中实现算法，在这种情况下，所有的计算都在单一坐标系（通常为基连杆）中完成。在实际中，采用关节坐标来实现牛顿-欧拉算法（RNEA）效率更高，这点也适用于多数其他动力学算法。

为将 RNEA 转换为连杆坐标，首先要检查方程中哪些量来自一个以上的关节。方程式（2.73）和方程式（2.75）中的每个变量都只属于关节 $i$，故不用修正。这样的方程称为关节 $i$ 的局部方程。其余方程中的量来自于一个以上的关节，因而需要插入坐标转换矩阵。这样方程式（2.71）、式（2.72）及式（2.74）修正后的形式为

$$\mathbf{v}_i = {}^{i}\boldsymbol{X}_{p(i)} \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{2.76}$$

$$\mathbf{a}_i = {}^{i}\boldsymbol{X}_{p(i)} \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{2.77}$$

及

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{a} - {}^{i}\boldsymbol{X}_0^{F} {}^{0}\mathbf{f}_i^{e} + \sum_{j \in c(i)} {}^{i}\boldsymbol{X}_j^{F} \mathbf{f}_j \tag{2.78}$$

方程式（2.78）假设外力都作用在绝对坐标系（即连杆0）上。

完整的算法见表2-6。函数jtype返回关节$i$的类型代码；函数xjcalc计算指定类型关节的关节变换矩阵；函数pcalc和pdcalc分别计算$\boldsymbol{\Phi}_i$和$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i$。这里函数应用于各种关节类型公式的情况，见表1.5和表1.6。在一般情况下，pcalc和pdcalc都是需要的，然而，对大多数常见的关节类型，$\boldsymbol{\Phi}_i$在连杆坐标系中为已知常数，因而$\mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i$为零。如果预先知道所有关节都具有这一属性，则可简化相关算法。在关节坐标系中量$\boldsymbol{I}_i$和$\boldsymbol{X}_L(i)$均为已知常数，也都是描述机器人机构数据结构的一部分。

**表2.6 空间矢量递归牛顿-欧拉算法**

```
inputs: q, q̇, q̈, model, ⁰fᵢᵉ
output: τ
model data: N_B, jtype(i), p(i), X_L(i), I_i
v₀ = 0
a₀ = -a_g
for i = 1 to N_B do
    X_J(i) = xjcalc(jtype(i), q_i)
    ⁱX_p(i) = X_J(i) X_L(i)
    if p(i) ≠ 0 then
        ⁱX₀ = ⁱX_p(i) ^p(i)X₀
    end
    Φ_i = pcalc(jtype(i), q_i)
    Φ̊_ci = pdcalc(jtype(i), q_i, q̇_i)
    v_i = ⁱX_p(i) v_p(i) + Φ_i q̇_i
    ζ_i = Φ̊_ci q̇_i + v_i × Φ_i q̇_i
    a_i = ⁱX_p(i) a_p(i) + Φ_i q̈_i + ζ_i
    f_i = I_i a_i + v_i × I_i v_i - ⁱX₀^(-T) ⁰fᵢᵉ
end
for i = N_B to 1 do
    τ_i = Φ_iᵀ f_i
    if p(i) ≠ 0 then
        f_p(i) = f_p(i) + ⁱX_p(i)ᵀ f_i
    end
end
```

在第1次循环中，最后一项任务是将每个$\mathbf{f}_i$初始化为表达式$\mathbf{f}_i^a + {}^iX_0^{T0}\mathbf{f}_i^e$（采用恒等式${}^iX_0^F = {}^iX_0^{-T}$），式（2.78）右边的求和在第2次循环中完成。此算法包括计算${}^iX_0$的代码，它用于将外力变换到连杆坐标上；如果没有外力，此代码可以省略。如果仅有一个集中力，例如：一个作用于机械臂末端执行器上的外力，则此代码可由另外的代码来替代，替代代码采用${}^i\boldsymbol{X}_{p(i)}$，将外力矢量依次从一个连杆坐标系变换到下一个上。

注意：尽管“连杆坐标”一词表明我们正在使用移动坐标系，事实上算法是在静止坐标系中实现的，它刚好在当前时刻与移动坐标系一致。

**3. 三维矢量递归牛顿-欧拉算法**（RNEA）

RNEA的原始版本是采用3维矢量开发和表达的[2.2,4]。表2.7显示了该算法的一个特例，其中关节均假设为旋转关节，且关节轴假设与连杆坐标系的$z$轴一致（没有这些假设，方程会长很多），另外假设外力为零。

**表2.7 三维矢量递归牛顿-欧拉算法（仅对旋转关节）**

```
inputs: q, q̇, q̈, model
output: τ
model data: N_B, p(i), R_L(i), ^p(i)p_i, m_i, c_i, Ī_i^cm
ω₀ = 0
ω̇₀ = 0
v̇₀' = -v̇_g'
for i = 1 to N_B do
    ⁱR_p(i) = rotz(q_i) R_L(i)
    ω_i = ⁱR_p(i) ω_p(i) + ẑ_i q̇_i
    ω̇_i = ⁱR_p(i) ω̇_p(i) + (ⁱR_p(i) ω_p(i)) × ẑ_i q̇_i + ẑ_i q̈_i
    v̇_i' = ⁱR_p(i) (v̇'_p(i) + ω̇_p(i) × ^p(i)p_i +
           ω_p(i) × ω_p(i) × ^p(i)p_i)
    f_i = m_i(v̇_i' + ω̇_i × c_i + ω_i × ω_i × c_i)
    n_i = Ī_i^cm ω̇_i + ω_i × Ī_i^cm ω_i + c_i × f_i
end
for i = N_B to 1 do
    τ_i = ẑ_iᵀ n_i
    if p(i) ≠ 0 then
        f_p(i) = f_p(i) + ⁱR_p(i)ᵀ f_i
        n_p(i) = n_p(i) + ⁱR_p(i)ᵀ n_i + ^p(i)p_i × ⁱR_p(i)ᵀ f_i
    end
end
```

在本算法中，$\dot{\boldsymbol{v}}_g'$是由于重力引起的线加速度，在基坐标系（连杆0）上表示；rotz计算旋转矩阵，该矩阵表示坐标系沿$z$的旋转；$\boldsymbol{R}_L(i)$为$\boldsymbol{X}_L(i)$的

转动分量；${}^{i}\boldsymbol{R}_{p(i)}$ 为 ${}^{i}\boldsymbol{X}_{p(i)}$ 的转动分量；pcalc 和 pdcalc 这里没有用到，因为 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 为已知常数 $(\hat{z}^T\boldsymbol{0}^T)^T$；$\dot{\boldsymbol{v}}_i'$ 是连杆 $i$ 坐标原点（$O_i$）的线加速度，且为关节 $i$ 经典加速度的直线分量；${}^{p(i)}\boldsymbol{p}_i$ 为用 $p_i$ 坐标系表示的，$O_i$ 相当于 $O_{p(i)}$ 的位置。另外 $m_i$、$\boldsymbol{c}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{I}}_i^{cm}$ 为连杆 $i$ 的惯性参数（见表 2.1 中三维量与空间量关系的相关方程）。

初看起来三维矢量算法明显不同于空间矢量算法。然而可以直接通过空间矢量算法方便得到三维矢量。具体实现方法为：通过扩展空间矢量为三维矢量，将关节类型限定为旋转关节，并将空间加速度转换为经典加速度（即，按照式（2.22）将每个 $\dot{\boldsymbol{v}}_i$ 用 $\dot{\boldsymbol{v}}_i' - \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{v}_i$ 替代），再将某些三维矢量恒等式带入表 2.7 所示的方程中。将空间加速度变换为经典加速度，有一个有趣的效应：$\boldsymbol{v}_i$ 抵偿了运动方程，因而不需要计算。因此，三维算法比空间算法具有微弱的速度优势。

### 2.5.2 关节体算法

关节体算法（The Articulated-Body Algorithm, ABA）是一种计算复杂度为 $O(N_B)$ 的算法，主要用于计算运动树的正向运动力学问题。而在正常情况下，$O(N_B)=O(n)$，故我们将其归诸于 $O(n)$ 算法。*Featherstone*[2.1] 提出了 ABA，并将其作为约束传播算法的一个例子。给定关节位置、速度和作用力矩/力变量，这种算法就可以计算出关节加速度。随着关节加速度的确定，又可以用数值积分进行机构运动的模拟。

ABA 的重要概念如图 2.7 所示。在连杆 $i$ 处，根子树与运动树 $i$ 上其他部分的作用仅通过经由关节 $i$ 的力 $\mathbf{f}_i$ 来实现。假设我们在这点将树切断，只考虑受到作用于连杆上的未知力 $\mathbf{f}_i$ 时子树的运动情况。可以发现，连杆 $i$ 的加速度与作用力有如下关系

$$\mathbf{f}_i = \boldsymbol{I}_i^A \mathbf{a}_i + \mathbf{p}_i^A \tag{2.79}$$

式中，$\boldsymbol{I}_i^A$ 为子树（现在可称为关节连接体）中连杆 $i$ 的关节体惯量；$\mathbf{p}_i^A$ 为辅助偏置力（bias force），即让连杆 $i$ 出现零加速度的力。注意在关节体中，$\mathbf{p}_i^A$ 与单个构件的速度有关。方程式（2.79）考虑了子树的完整动力学问题，这样只要知道了 $\mathbf{f}_i$ 的值，式（2.79）就会立刻给出连杆 $i$ 的加速度。

我们对 $\boldsymbol{I}_i^A$ 和 $\mathbf{p}_i^A$ 两个量感兴趣的原因在于，可以通过它们从 $\mathbf{a}_{p(i)}$ 计算得到 $\ddot{\boldsymbol{q}}_i$，依次可以计算出 $\mathbf{a}_i$，

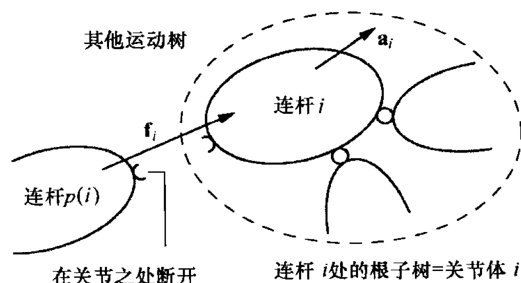



图 2.7 关节体 $i$ 的定义

从而计算出更多关节的加速度。结合式（2.72）、式（2.75）和式（2.79）得到

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{f}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T(\boldsymbol{I}_i^A(\mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i) + \mathbf{p}_i^A)$$

对 $\ddot{\boldsymbol{q}}_i$ 可由下式求解

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{U}_i^T \mathbf{a}_{p(i)}) \tag{2.80}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{I}_i^A \boldsymbol{\Phi}_i$$

$$\boldsymbol{D}_i = (\boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{U}_i)^{-1} = (\boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{I}_i^A \boldsymbol{\Phi}_i)^{-1}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\tau}_i - \boldsymbol{U}_i^T \boldsymbol{\zeta}_i - \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{p}_i^A$$

且

$$\boldsymbol{\zeta}_i = \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i = \mathring{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$$

这样就可通过式（2.72）计算 $\mathbf{a}_i$。

关节体惯量和偏置力都可通过递归公式计算

$$\boldsymbol{I}_i^A = \boldsymbol{I}_i + \sum_{j \in c(i)} (\boldsymbol{I}_j^A - \boldsymbol{U}_j \boldsymbol{D}_j \boldsymbol{U}_j^T) \tag{2.81}$$

和

$$\mathbf{p}_i^A = \mathbf{p}_i + \sum_{j \in c(i)} (\mathbf{p}_j^A + \boldsymbol{I}_j^A \boldsymbol{\zeta}_j + \boldsymbol{U}_j \boldsymbol{D}_j \boldsymbol{u}_j) \tag{2.82}$$

其中

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^e$$

通过检验图 2.7 中 $\mathbf{f}_i$ 和 $\mathbf{a}_i$ 的关系，并在假设 $\boldsymbol{I}_j^A$ 和 $\mathbf{p}_j^A$ 对每个 $j \in c(i)$ 为已知的情况下，就可以得到这些公式。更详细的情况见参考文献 [2.1, 8, 15, 24]。

完整的算法见表 2.8。表中采用连杆坐标表示，并按照表 2.6 的牛顿-欧拉算法（RNEA），通过运动树共进行 3 遍迭代计算。第一遍从基座（底部）向末端（顶部）迭代，分别运用式（2.76）计算连杆速度和速度积项 $\boldsymbol{\zeta}_i = \dot{\boldsymbol{\Phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$，并将变量 $\boldsymbol{I}_i^A$ 和 $\mathbf{p}_i^A$ 初始化为值 $\boldsymbol{I}_i$ 和 $\mathbf{p}_i$（$\boldsymbol{p}_i = \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i - {}^{i}\boldsymbol{X}_0^{F0} \mathbf{f}_i^e$）；第二遍从顶部反向基底迭代，运用式（2.81）和式（2.82）计算关节体惯量和每个连杆的偏置力；第三遍从基底向顶部迭代，运用式（2.80）和式（2.77）计算连杆和关节的加速度。

**表2.8 正向运动学的关节体算法**

```
inputs: q, q̇, τ, model, ⁰f_i^e
output: q̈
model data: N_B, jtype(i), p(i), X_L(i), I_i
v_0 = 0
a_0 = -a_g
for i = 1 to N_B do
    X_J(i) = xjcalc(jtype(i), q_i)
    ^iX_p(i) = X_J(i) X_L(i)
    if p(i) ≠ 0 then
        ^iX_0 = ^iX_p(i) ^p(i)X_0
    end
    Φ_i = pcalc(jtype(i), q_i)
    Φ̊_ci = pdcalc(jtype(i), q_i, q̇_i)
    v_i = ^iX_p(i) v_p(i) + Φ_i q̇_i
    ζ_i = Φ̊_ci q̇_i + v_i × Φ_i q̇_i
    I_i^A = I_i
    p_i^A = v_i × I_i v_i - ^iX_0^-T ⁰f_i^e
end
for i = N_B to 1 do
    U_i = I_i^A Φ_i
    D_i = (Φ_i^T U_i)^-1
    u_i = τ_i - U_i^T ζ_i - Φ_i^T p_i^A
    if p(i) ≠ 0 then
        I_p(i)^A = I_p(i)^A + ^iX_p(i)^T (I_i^A - U_i D_i U_i^T) ^iX_p(i)
        p_p(i)^A = p_p(i)^A + ^iX_p(i)^T (p_i^A + I_i^A ζ_i + U_i D_i u_i)
    end
end
for i = 1 to N_B do
    a_i = ^iX_p(i) a_p(i)
    q̈_i = D_i (u_i - U_i^T a_i)
    a_i = a_i + Φ_i q̈_i + ζ_i
end
```

### 2.5.3 复合刚体算法

复合刚体算法（CRBA）是用于计算运动树的关节空间惯性矩阵（JSIM）的一种方法。CRBA 最常见的应用是作为正向动力学算法的一部分，该方法最先出现在参考文献［2.5］的方法3中。

在关节空间中，正向运动学的任务是通过 $\mathbf{q}$、$\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 计算 $\ddot{\mathbf{q}}$。最常见的进行方式是，从式（2.37）开始，先计算 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$，然后对 $\ddot{\mathbf{q}}$ 求解线性方程

$$\boldsymbol{H}\ddot{\mathbf{q}}=\boldsymbol{\tau}-(\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g) \tag{2.83}$$

如果机构为运动树，则 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$ 的计算复杂度分别为 $O(n^2)$ 和 $O(n)$，且式（2.83）可在 $O(n^3)$ 操作下求解，因而把采用这种方法的算法统称为 $O(n^3)$ 算法。然而 $O(n^3)$ 形式应考虑最坏的计算复杂度，因为实际复杂度取决于树中的分支数。此外，即使在最坏情况下，由于 $n^3$ 项具有小系数，直到当 $n\approx60$ 时这项才会起主导作用。

$\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$ 可通过逆向动力学算法计算，如果 $ID(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})$ 是由自变量 $\mathbf{q}$、$\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}$ 通过逆向动力学计算的结果，则

$$ID(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\ddot{\mathbf{q}})=\boldsymbol{\tau}=\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$$

故有

$$\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g=ID(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{0}) \tag{2.84}$$

这样对于运动树而言，$\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$ 的值可用 $\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ 时的 RNEA 进行计算。

复合刚体算法（CRBA）的一个重要概念就是要注意 JSIM 只取决于关节的位置，而不是速度，CRBA 所作的简化假设是让每个关节的速度为零。如果也假设重力为零，则可从式（2.83）中消除 $\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$。此外对于旋转关节，在第 $j$ 个关节上作用一个单位加速度，就产生 JSIM 中的第 $j$ 列，这样将机构划分成两个复合刚体，彼此通过第 $j$ 个关节相连，此方法就大大简化了动力学问题。这已使 CRBA 推广应用到运动树结构的任意关节类型。

可以证明对于运动树，JSIM 的一般形式为

$$\boldsymbol{H}_{ij}=\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_i^C\boldsymbol{\Phi}_j & \text{如果 } i\in c^*(j)\\ \boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j^C\boldsymbol{\Phi}_j & \text{如果 } j\in c^*(i)\\ \mathbf{0} & \text{其他}\end{cases} \tag{2.85}$$

式中，$c^*(i)$ 是连杆 $i$ 处的根子树上所有连杆集（包括 $i$ 本身），且

$$\boldsymbol{I}_i^C=\sum_{j\in c^*(i)}\boldsymbol{I}_j \tag{2.86}$$

见参考文献［2.8，15］。事实上，$\boldsymbol{I}_i^C$ 为复合刚体的惯量。复合刚体由 $c^*(i)$ 上的所有连杆刚性装配而成，该算法由此而得名。

式（2.85）和式（2.86）为表2.9所示算法的基础，它是在连杆坐标系下的复合刚体算法（CRBA）。该算法假定矩阵 ${}^i\boldsymbol{X}_{p(i)}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 已经计算出来（如在计算

$C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$时已计算)，如果不是这种情况，则可从表2.6中相应行中插入第一个循环；矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为一局部变量；如果在树上没有分支，$\boldsymbol{H}=\mathbf{0}$，第一步可以省略。

**表2.9 复合刚体算法计算JSIM**

```
inputs: model, RNEA partial results
output: H
model data: N_B, p(i), I_i
RNEA data: Φ_i, ^iX_p(i)
H = 0
for i = 1 to N_B do
    I_i^C = I_i
end
for i = N_B to 1 do
    F = I_i^C Φ_i
    H_ii = Φ_i^T F
    if p(i) ≠ 0 then
        I_p(i)^C = I_p(i)^C + ^iX_p(i)^T I_i^Ci X_p(i)
    end
    j = i
    while p(j) ≠ 0 do
        F = ^iX_p(i)^T F
        j = p(j)
        H_ij = F^T Φ_j
        H_ji = H_ij^T
    end
end
```

计算出 $C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$和 $\boldsymbol{H}$ 后，最后一步是在式(2.83)中对 $\ddot{\mathbf{q}}$ 求解，可采用标准的Cholesky分解或 $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解来完成。注意 $\boldsymbol{H}$ 可能具有高病态性[2.26]，这反映了运动树本身潜在具有病态性，故推荐在正向动力学计算中，每一步都采用双精度算法（本建议也适用于ABA)。

式(2.85)表示如果运动树上有分支，则 $\boldsymbol{H}$ 的一些元素自动为零。图2.8为这种影响的例子，可以看出近半数的元素为零，因而有可能利用稀疏性进行分解，其算法描述见参考文献[2.25]。根据树的分支量大小，稀疏算法有时会比标准算法快许多倍。

### 2.5.4 操作空间惯性矩阵

操作空间矩阵(OSIM)可用两种算法计算。第一种是 $O(n^3)$ 算法，它采用OSIM的基本定义，随

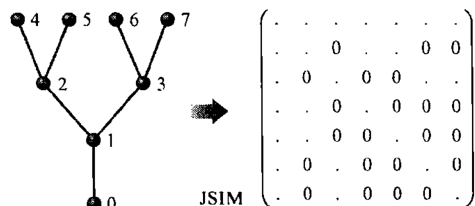



**图2.8 分支引起的稀疏性：运动树上的分支致使JSIM的某些元素为0**

同JSIM一起进行有效的分解；第二种是 $O(n)$ 算法，它是基于正向动力学问题的有效解。

**1. 采用基本定义的算法**

如果机器人具有较少相关自由度（如6个)，则计算OSIM最有效的方法是通过式(2.52)进行，其过程如下：

1) 通过CRBA计算 $\boldsymbol{H}$。
2) 将 $\boldsymbol{H}$ 分解为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$ (Cholesky分解)。
3) 使用回代计算 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$。
4) $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$。
5) 分解 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ (可选)。

最后一步唯一可能是，末端执行器具有完整的6个自由度，且需要用到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 而不是 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$。第二步中，对于有分支的运动树，可用 $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$分解代替 $\boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$分解，或者采用参考文献[2.25]中描述的分解方法。

式(2.38)中的其他项可由式(2.53)和式(2.54)计算得到。特别地，式(2.38)可写成如下形式

$$\dot{v}+\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x},\mathbf{v})+\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{x})\mathbf{f} \tag{2.87}$$

而且，$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\rho})$ 可通过下述公式计算

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}^{-1}(C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g)-\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.88}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\mathbf{q}}$ 项是式(2.50)中末端执行器的速度积形式的加速度，它可由RNEA的式(2.84)计算 $C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$时顺便得到。特别地，$\dot{\boldsymbol{J}}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{a}_{ee}-\mathbf{a}_0$，这里 $\mathbf{a}_{ee}$是计算得到的末端执行器的加速度（在同一个坐标系时用 $\dot{\mathbf{v}}$ 表示)，$\mathbf{a}_0$是基加速度 $-\mathbf{a}_g$。

**2. $O(n)$ 算法**

当 $n$ 值足够大时，采用 $O(n)$ 算法更为有效，这种算法更多详情见参考文献[2.27-29]。本节给出了更简单的算法，它是基于关节空间正向动力学问题的 $O(n)$ 算法（例如通过ABA)。它是单位力方法[2.28]的一种变体，用于计算OSIM的逆。

从式(2.87)中开始，观察到 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$仅是位置的函数，动力学方程中的一些项可以忽略而不影响其值。

特别是当关节速度 $\dot{\mathbf{q}}$、关节力 $\boldsymbol{\tau}$ 以及重力均设为零时，$\boldsymbol{\Lambda}$ 的值将保持不变，在这种条件下：

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{f} \tag{2.89}$$

我们定义一个六维坐标矢量 $\hat{\mathbf{e}}_i$，令其值在第 $i$ 个坐标时为1，其余地方都为零。如果在式（2.89）中令 $\mathbf{f}=\hat{\mathbf{e}}_i$，则 $\dot{\mathbf{v}}$ 将等于 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 的第 $i$ 列。我们同样定义函数 $FD(i, j, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}_0, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{f})$，它执行正向动力学计算，并返回连杆 $i$ 的真实加速度（$\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_0$），它在同一个坐标系时表示为 $\mathbf{f}$（通常是基坐标）。自变量 $\mathbf{q}$、$\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别设为关节位置、速度和力变量的值。这里 $j$ 和 $\mathbf{f}$ 指施加于连杆 $j$ 的外力 $\mathbf{f}$。自变量 $\mathbf{a}_0$ 为包含重力影响的虚拟基的加速度，其值设为 $\mathbf{0}$ 或 $-\mathbf{a}_g$。

通过上述定义，得到

$$(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^i = FD(ee, ee, \mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{e}}_i) \tag{2.90}$$

及

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\rho}) = -FD(ee, ee, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, -\mathbf{a}_g, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{0}), \tag{2.91}$$

式中，$(\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^i$ 是 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 的第 $i$ 列，$ee$ 为末端执行器的构件数。因此式（2.87）的系数可以采用表2.10的算法计算出来，此算法复杂度为 $O(n)$。

**表2.10　用于计算操作空间惯性矩阵的逆及其他项的算法**

**for** $j=1$ **to** 6 **do**

　　$\dot{\mathbf{v}}^j = FD(ee, ee, \mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \hat{\mathbf{e}}_j)$

**end**

$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = [\dot{\mathbf{v}}^1\ \dot{\mathbf{v}}^2 \cdots \dot{\mathbf{v}}^6]$

$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\rho}) = -FD(ee, ee, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, -\mathbf{a}_g, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{0})$

注意当计算 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 有如下情形时，计算效率会显著提高：ABA算法中 $\mathbf{v}_i$、$\boldsymbol{\zeta}_i$ 和 $\boldsymbol{\tau}_i$ 可设为零（见表2.8），且 $\boldsymbol{I}_i^A$ 及一些量（与 $\boldsymbol{U}_i$ 和 $\boldsymbol{D}_i$ 相关）只需计算一次，因为它们不随作用力而改变。此外，该方法可用于多个末端执行器，它通过调节 $FD$ 来接受末端执行器构件数列表，放入第1个自变量中，并返回一个包含所有指定构件加速度的复合矢量。表2.10中的算法附上一个for循环来控制 $FD$ 的第2个自变量，并遍及所有末端执行器构件数进行迭代[2.19]。然而对于只有几个末端执行器的情况，Lilly[2.28]的力传播方法应更适于提高计算效率。如果有 $m$ 个末端执行器，则复杂度为 $O(m\,n)$。

## 2.6　运动环

上节中所有算法都是用于运动树的，本节将最后提供一种算法，用于闭环系统的正向动力学问题。该算法对于闭环系统的生成树问题补充了运动体的动力学方程，以及闭环约束方程，给出了三种不同的方法来求解由此产生的线性方程组，并给出了一种用于计算闭环约束的有效算法。

与运动树相比，带有封闭运动环的系统，具有更复杂的动力学特性，例如：

1）运动树的运动自由度是固定的，而闭环系统的运动自由度可以变化。

2）运动树中，瞬时运动自由度总是与有限运动自由度相同，但它们在闭环系统中可以不同。

3）运动树中每个力均可确定，而闭环系统中的某些力可为不确定。只要闭环系统是过约束的，这种情况就会出现。

图2.9为这种现象的两个例子。在图2.9a的机构中，没有有限运动自由度，但有两个无限小运动自由度。图2.9b所示的机构，当 $\theta\neq0$ 时有一个自由度，而如果 $\theta=0$，则两个臂 $A$ 和 $B$ 能独立运动，机构有两个自由度。此外，在这两个运动的状态边界上，机构具有3个无限小运动自由度。这两种机构都是平面的，均为过约束情况，因此关节约束力的面外分量是不确定的。这类不确定性对机构运动无影响，但它使动力学计算变得复杂。

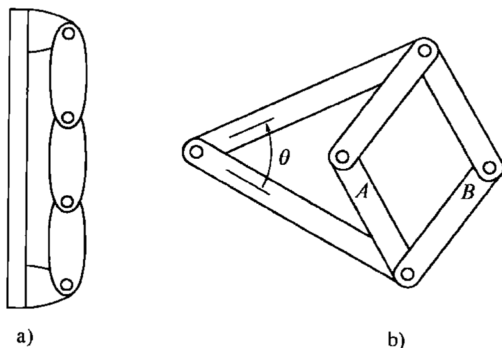



图2.9　病态闭环系统

### 2.6.1　闭环算法公式

一个闭环系统可以模拟为受到一组闭环约束力的生成树，如果

$$\boldsymbol{H}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{\tau}$$

是生成树自身的运动方程，则闭环系统的运动方程为

$$H\ddot{\mathbf{q}}+C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}^a+\boldsymbol{\tau}^c \tag{2.92}$$

式中，$\boldsymbol{\tau}^a$和$\boldsymbol{\tau}^c$分别为用生成树广义力坐标表示的闭环主动力和约束力矢量。$\boldsymbol{\tau}^a$为已知量，而$\boldsymbol{\tau}^c$未知，$\boldsymbol{\tau}^a$来自作用于闭环关节的力元件（弹簧、阻尼器和驱动器），如果没有这类元件，则$\boldsymbol{\tau}^a=\mathbf{0}$。

闭环约束限制了生成树的运动，在加速度级别，这些约束可以表示为线性方程的形式

$$L\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{l} \tag{2.93}$$

式中，$L$为$n^c\times n$的矩阵；$n^c$是缘于闭环关节的约束数，用公式给定如下：

$$n^c=\sum_{k=N_B+1}^{N_J}n_k^c \tag{2.94}$$

式中，$n_k^c$为关节$k$施加的约束数。如果$rank(L)<n^c$，则闭环约束线性相关，且闭环机构为过约束。闭环系统的机动性，即它的自由度，由以下公式给出

$$\text{mobility}=n-rank(L) \tag{2.95}$$

给出了式（2.93）形式的约束方程，接下来约束力可表示为

$$\boldsymbol{\tau}^c=L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{2.96}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}_{N_B+1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\lambda}_{N_J}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$为$n^c\times1$的未知约束变量的矢量（或称拉格朗日乘子）。如果机构为过约束，则$L^{\mathrm{T}}$将为零空间，且$\boldsymbol{\lambda}$位于此零空间的分量将不确定。

通常可以预先确定冗余约束。例如，如果运动环已知为平面，则面外的闭环约束是多余的。在这种情况下，有利于消除相关$L$的行，以及$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{\lambda}$的元素，$\boldsymbol{\lambda}$的移除元素可赋值为零。

对于闭环系统，由式（2.92）、式（2.93）及式（2.96）可得如下运动方程

$$\begin{pmatrix}H & L^{\mathrm{T}}\\ L & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\mathbf{q}}\\ -\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}^a-(C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g)\\ \mathbf{l}\end{pmatrix} \tag{2.97}$$

系统矩阵对称，但为不定。如果$L$为满秩，则系统矩阵为非奇异矩阵；否则将是奇异的，且$\boldsymbol{\lambda}$的一个或多个元素将不确定。

方程式（2.97）可通过下列任一种方法求解：

1）直接对$\ddot{\mathbf{q}}$和$\lambda$求解。

2）先解$\boldsymbol{\lambda}$，再用其结果求解$\ddot{\mathbf{q}}$。

3）由式（2.93）求解$\ddot{\mathbf{q}}$，把结果带入式（2.92），消去未知约束力，再求解剩余的未知量。

方法1）是最简单的，但通常效率最低，此方法适用于当系统矩阵为非奇异的情况。当系统矩阵为$(n+n^c)\times(n+n^c)$时，此方法复杂度为$O((n+n^c)^3)$。

方法2）对于$n\gg n^c$的情况特别有用，并可在生成树上采用$O(n)$算法[2.6]，由式（2.97）得

$$LH^{-1}L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{l}-LH^{-1}[\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}^a-(C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g)] \tag{2.98}$$

通过$O(n)$算法，方程可在$O(n(n^c)^2)$操作中用公式表示，在$O((n^c)^3)$求解。一旦$\boldsymbol{\lambda}$已知，$\boldsymbol{\tau}^c$可由式（2.96）在$O(n\ n^c)$操作中计算，且通过$O(n)$算法在式（2.96）中求解，故总的复杂度为$O(n(n^c)^2+(n^c)^3)$。如果$L$欠秩，则$LH^{-1}L^{\mathrm{T}}$将是奇异的，但仍为半正定矩阵。与式（2.97）中的不定系统矩阵的奇异情况相比，提出的分解方法稍微容易些。

方法3）适用于当$n-n^c$值很小，或者当$L$预期为欠秩的情况。式（2.93）通过高斯消元法的专用版（或类似的程序）求解，它配备了数值秩检验程序，其目的是求解欠确定系统。其解是一个方程的形式

$$\ddot{\mathbf{q}}=Ky+\ddot{\mathbf{q}}_0$$

式中，$\ddot{\mathbf{q}}_0$为式（2.93）的任一特解；$K$为$n\times(n-rank(L))$矩阵，并有$LK=\mathbf{0}$；$\boldsymbol{y}$为具有$n-rank(L)$个未知数的矢量（通常，$\boldsymbol{y}$与$\ddot{\mathbf{q}}$元素的子集线性无关）。将$\ddot{\mathbf{q}}$的表达式带入式（2.92），并两边左乘$K^{\mathrm{T}}$消去$\boldsymbol{\tau}^c$，得到

$$K^{\mathrm{T}}HKy=K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}^a-(C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g)-H\ddot{\mathbf{q}}_0) \tag{2.99}$$

这种方法也具有立方关系的复杂度，但如果$n-n^c$很小时，此方法是最有效的。有报告称此方法比方法1）更稳定[2.30]。

## 2.6.2 闭环算法

计算$H$和$C\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$算法可分别在2.5.3节和2.5.1节中找到，这里只剩下$L$、$\mathbf{l}$和$\boldsymbol{\tau}^a$三个待求值。为简单起见，我们假设所有的闭环关节均为零自由度关节。为不失一般性，假设：将连杆切开用关节代替，简单形成开环（见图2.10）。然而这样做可能会导致损失部分效率。在这个假设下，我们只需要计算$L$和$\mathbf{l}$，因为$\boldsymbol{\tau}^a=\mathbf{0}$。

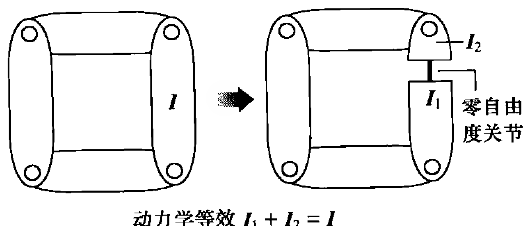



图2.10 在准备将环切开的地方插入一个零自由度关节

**1. 环约束**

一般情况下对于环 $k$，速度约束方程为

$$(\boldsymbol{\psi}_k^c)^T(\mathbf{v}_{s(k)}-\mathbf{v}_{p(k)})=\mathbf{0} \tag{2.100}$$

加速度约束为

$$(\boldsymbol{\psi}_k^c)^T(\mathbf{a}_{s(k)}-\mathbf{a}_{p(k)})+(\dot{\boldsymbol{\psi}}_k^c)^T(\mathbf{v}_{s(k)}-\mathbf{v}_{p(k)})=\mathbf{0} \tag{2.101}$$

然而，如果每个闭环关节均为零自由度，则上述方程简化为

$$\mathbf{v}_{s(k)}-\mathbf{v}_{p(k)}=\mathbf{0} \tag{2.102}$$

$$\mathbf{a}_{s(k)}-\mathbf{a}_{p(k)}=\mathbf{0} \tag{2.103}$$

定义一个环雅可比（loop Jacobian）矩阵 $\boldsymbol{J}_k$，它具有以下特性

$$\mathbf{v}_{s(k)}-\mathbf{v}_{p(k)}=\boldsymbol{J}_k\dot{\mathbf{q}} \tag{2.104}$$

式中，$\boldsymbol{J}_k$为 $6\times n$ 的矩阵，用公式定义为

$$\boldsymbol{J}_k=(e_{1k}\boldsymbol{\Phi}_1\cdots e_{N_Bk}\boldsymbol{\Phi}_{N_B}) \tag{2.105}$$

其中

$$e_{ik}=\begin{cases}+1 & 如果\ s(k)\in c^*(i)，且\ p(k)\notin c^*(i)\\ -1 & 如果\ p(k)\in c^*(i)，且\ s(k)\notin c^*(i)\\ 0 & 其他\end{cases}$$

换言之，如果关节 $i$ 取决于路径 $s(k)$ 而不是 $p(k)$，则 $e_{ik}=+1$；如果关节 $i$ 取决于路径而 $p(k)$ 不是 $s(k)$，则 $e_{ik}=-1$；而当关节 $i$ 同时取决于两条路径或者都不是时，则 $e_{ik}=0$。

环加速度约束可记为

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\mathbf{a}_{s(k)}-\mathbf{a}_{p(k)}\\&=\boldsymbol{J}_k\ddot{\mathbf{q}}+\dot{\boldsymbol{J}}_k\dot{\mathbf{q}}\\&=\boldsymbol{J}_k\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{a}_{s(k)}^{vp}-\mathbf{a}_{p(k)}^{vp}\end{aligned} \tag{2.106}$$

式中，$\mathbf{a}_i^{vp}$是连杆 $i$ 的速度积形式的加速度，这是当 $\ddot{\mathbf{q}}$ 为零时连杆可能具有的加速度。每个连杆的速度积加速度在式（2.84）计算 $\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$时一并计算。如果用 RNEA 计算 $\boldsymbol{C}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\tau}_g$，则 $\mathbf{a}_i^{vp}$将具有 $\mathbf{a}_i$的值，其通过 RNEA 计算时加速度变量设为零。

矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\mathbf{l}$ 现在可表示为如下形式：

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{N_B+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{L}_{N_J}\end{pmatrix},\quad \mathbf{l}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{l}_{N_B+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{l}_{N_J}\end{pmatrix} \tag{2.107}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{J}_k \tag{2.108}$$

$$\boldsymbol{l}_k=\mathbf{a}_{s(k)}^{vp}-\mathbf{a}_{p(k)}^{vp} \tag{2.109}$$

**2. 约束稳定性**

在实际中，因为存在数值积分误差，必须控制闭环约束的稳定性，否则模拟计算中就会发散。这项标准技术应归功于 Baumgarte [2,3,7,31]，他将每个约束方程由 $a_e=0$ 形式替换为

$$a_e+K_v\nu_e+K_pp_e=0$$

式中，$a_e$、$\nu_e$和 $p_e$分别为加速度误差、速度误差和位置误差，且 $K_v$和 $K_p$为正常数。通常选择一个时间常数 $t_c$，它主要根据期望多快到该位置和速度误差的衰减来确定，然后由公式 $K_v=2/t_c$、$K_p=1/t_c^2$ 来给定 $K_v$、$K_p$。然而，选择 $t_c$并没有一个很好的标准。如果 $t_c$时间太长，闭环误差的累积快于衰减；如果 $t_c$太短，则运动方程变硬，造成数值积分精度损失。对于大而速度慢的工业机器人，合理值取为 $t_c=0.1$，而对于小而快的机器人，可以设为 $t_c=0.01$。

将稳定性项代入约束方程，则式（2.109）替换为

$$\boldsymbol{l}_k=\mathbf{a}_{p(k)}^{vp}-\mathbf{a}_{s(k)}^{vp}-K_v(\mathbf{v}_{s(k)}-\mathbf{v}_{s(k)})-K_p\mathbf{p}_{ek} \tag{2.110}$$

式中，$\mathbf{p}_{ek}$为矢量，表示环 $k$ 的位置误差。在绝对坐标系下（即连杆 0 坐标系），$\mathbf{p}_{ek}$给定如下：

$$\mathbf{p}_{ek}=\text{x_to_vec}({}^0\boldsymbol{X}_{p(k)}\boldsymbol{X}_{L1}^{-1}(k)\boldsymbol{X}_{L2}(k)^{s(k)}\boldsymbol{X}_0) \tag{2.111}$$

式中，$\boldsymbol{X}_{L1}(k)$ 和 $\boldsymbol{X}_{L2}(k)$ 变换在式（2.62）和式（2.63）中定义过，对于关节 $k$ 见图 2.4。x_to_vec($^B\boldsymbol{X}_A$) 用于计算从坐标系 $A$ 到 $B$ 的近似位移，假定此位移为无限小。x_to_vec 定义如下：

$$\text{x_to_vec}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}X_{23}-X_{32}\\X_{31}-X_{13}\\X_{12}-X_{21}\\X_{53}-X_{62}\\X_{61}-X_{43}\\X_{42}-X_{51}\end{pmatrix} \tag{2.112}$$

**3. 算法**

作为一个特例，即当所有闭环关节都具有零自由度时，表 2.11 给出了用于计算 $\boldsymbol{L}$ 和 $\mathbf{l}$ 的算法。为实现对每个量进行简单而高效的变换，需要将闭环约束公式放入单一坐标系中。在绝对坐标系下的情形时（连杆 0），则不需要进一步变换。

第一个循环计算绝对坐标到连杆坐标的变换，并将 $\boldsymbol{\Phi}_i$变换到绝对坐标系下，这里 $\boldsymbol{\Phi}_i$仅在闭环约束中才需要变换。

第二个循环根据式（2.105）计算 $\boldsymbol{L}$ 的非零元素，可以为稀疏。内 while 循环在循环的根部终止，它为连杆 $p(k)$ 和 $s(k)$ 的最高编号数（共祖），如果没有其他共祖，则它为固定基。通过方程式（2.110），在绝对坐标系下计算出 $\mathbf{l}$ 后，第二循环终止。

**表 2.11 闭环约束算法**

```
inputs: model, RNEA partial results
output: L, l
model data: N_B, p(i), N_J, p(k), s(k), LB(i),
            X_L1(k), X_L2(k), K_p, K_v
RNEA data: Φ_i, ^iX_p(i), v_p(k), v_s(k), a^vp_p(k), a^vp_s(k)
for i = 1 to N_B do
    if p(i) ≠ 0 then
        ^iX_0 = ^iX_p(i) ^p(i)X_0
    end
    if LB(i) ≠ null then
        ^0Φ_i = ^iX_0^-1 Φ_i
    end
end
L = 0
for k = N_B + 1 to N_J do
    i = p(k)
    j = s(k)
    while i ≠ j do
        if i > j then
            L_k,i = -^0Φ_i
            i = p(i)
        else
            L_k,j = ^0Φ_j
            j = p(j)
        end
    end
    a_e = ^s(k)X_0^-1 a^vp_s(k) - ^p(k)X_0^-1 a^vp_p(k)
    v_e = ^s(k)X_0^-1 v_s(k) - ^p(k)X_0^-1 v_p(k)
    p_e = x_to_vec (^p(k)X_0^-1 X_L1^-1(k) X_L2(k) ^s(k)X_0)
    l_k = -a_e - K_v v_e - K_p p_e
end
```

## 2.7 结论与扩展阅读

本章提出了应用于机器人机构的刚体动力学基本原理，主要包含以下主题：空间矢量代数，它提供了用于描述和实现动力学方程及算法的简明记法；机器人学中最常用的运动正则方程；如何构建机器人的动力学模型；几个基于模型的有效算法，用于计算逆向动力学、正向动力学，以及关节空间和操作空间惯性矩阵。

另外还有许多动力学领域的主题本章没有提及，但会在本书后面章节中讲述。有关弹性连杆和关节的机器人动力学问题见第 13 章；动态模型参数识别问题见第 14 章；第 27 章讲述了机器人与外界目标之间物理接触的动力学问题；第 45 章讲述了具有浮基的机器人动力学问题。

在本章结束之际，做一些阅读提示，机器人运动学简史见参考文献 [2.32]，更多涉及机器人动力学的问题可以从这些书籍中找到，见参考文献 [2.8, 10, 15, 28, 33-35]。最后，对扩展阅读提出如下建议。

### 2.7.1 多体动力学

机器人动力学可视为更为广泛的多体动力学学科的一个子集或一种具体应用。有关多体动力学的书籍包括参考文献 [2.3, 14, 31, 3-41]。当然，多体动力学又是经典力学的一个子集，它的数学基础可以在任意一本经典力学的书中找到，如参考文献 [2.13]。

### 2.7.2 替代表示法

本章采用空间矢量来表示运动方程。另外还有各种可选的替代方法用于空间矢量表示，如其他类型的六维矢量、三维矢量、4×4 矩阵以及空间算子代数等。所有的六维矢量形式是相似的，但又不完全相同。主要的供选方案有：旋量[2.10-12]、对偶矢量[2.42]、李代数[2.12,43]，以及一些特别的记法，其中一种特别记法是将三维矢量都组成对，用以减小代数式的体积。三维矢量形式用于大多数经典力学和多体教科书中，它也是六维矢量和 4×4 矩阵的前身。4×4 矩阵在机器人学领域广受欢迎，因为它非常适用于运动学，但对动力学则没那么有用。4×4 矩阵的动力学公式见参考文献 [2.33, 44, 45]。空间矢量代数由 JPL 实验室（Jet Propulsion Laboratory）的 Rodriguez 等人提出，它采用 $6N$ 维矢量和 $6N\times6N$ 矩阵，后者被当做一个线性算子，这种记法的例子见参考文献 [2.46-48]。

### 2.7.3 替代公式

本章采用的运动方程矢量公式通常称作牛顿-欧拉公式。主要的替代公式为拉格朗日公式，其运动方程通过拉格朗日方程得到，拉格朗日公式的例子见参考文献 [2.9, 10, 17, 49, 50]。另外，凯恩（Kane）方法也可用于机器人学中[2.51,52]。

### 2.7.4 效率

因为实时执行，特别是实时控制的需要，机器

人界非常关注计算的效率问题。对于逆向动力学，Luh等人的 $O(n)$ 递归牛顿-欧拉算法（RNEA）仍然是最重要的算法，该算法的进一步改进见参考文献［2.53，54］。对于正向动力学，本章列举的两种算法，仍可作为计算中的重点考虑：Featherstone提出的 $O(n)$ 关节体算法（ABA）[2.1]，以及Walker和Orin的基于复合刚体算法（CRBA）的 $O(n^3)$ 算法[2.5]。ABA方法经过多年改进[2.15,16,24]，对于 $n$ 值很小的情况，它比CRBA效率更高。然而，随着近年CRBA在有分支的运动树问题[2.25]和机器人运动控制系统的应用[2.55]，CRBA方法的优势逐渐展现。

对于关节空间惯性矩阵，CRBA仍是目前最重要的算法[2.5]，多年来也进行了若干改进和修正，以提高计算效率[2.15,56-58]。对于操作空间惯性矩阵，提出了有效的 $O(n)$ 算法[2.27-29]，并应用于日益复杂的系统[2.19]。

### 2.7.5 精度

精度问题主要涉及动力学算法的数值精度、模拟精度（即数值积分精度），以及动力学模型精度。与效率相比，动力学算法的数值精度很少受到关注。虽然RNEA、CRBA和ABA都已通过了各种刚体系统的精度测试，但还不能说其他算法都能通过测试。刚体系统经常是病态的，在这个意义上，一个小的外力变化（或者模型参数变化），就会导致加速度的很大变化。Featherstone研究了这一现象[2.26]，他发现随着构件数的增加，病态情形会变差，在最坏的情况下，病态增长与 $O(n^4)$ 成正比。关于这一主题的其他文献见参考文献［2.8，30，59，60］。

### 2.7.6 软件包

对于多体系统，特别是机器人系统，已开发了许多软件包，用于动力学问题的仿真。为积分方便，其中一些是用MATLAB® 编写的用于分析、控制及仿真的程序。这些程序大多都是开源的，有些则是以很低的价格提供给用户。这些软件能力上的不同主要体现在计算速度、拓扑及关节模型支持、精度、基本的动力学公式及相关的复杂度、用户界面图形支持、数值积分程序、与其他代码的集成、应用支持、价格等。其中常用的软件包有：Adams[2.61]、Autolev[2.62]、DynaMechs[2.63]、Open Dynamics Engine[2.64]、Robotics Studio[2.65]、Robotics Toolbox[2.66]、SD/FAST[2.67]、SimMechanics[2.68]，以及Webots[2.69]。

### 2.7.7 符号简化

符号简化技术采用通用的动力学算法，经符号处理后用于具体的动力学模型，其结果为一个任务陈述列表。要是该算法以前曾经执行过，列表就会详细列出算法现在将要如何运行，然后检查和修剪所有不必要的计算，余下的有用程序用计算机源代码形式输出到一个文本文件中。这个生成的代码在运行时比采用原始通用算法的代码要快10倍，但这只适用于具体的单个动力学模型。Autolev[2.62]和S/DFAST[2.67]软件都采用这种技术，其他有关动力学符号简化的出版物包括参考文献［2.70-75］。

### 2.7.8 并行计算算法

为加快动力学计算速度，开发了许多算法用于并行计算机和流水计算机。对于逆向动力学，早期的工作集中在将 $O(n)$ RNEA用到 $n$ 个处理器上[2.76,77]，随后出现了 $O(\log_2 n)$ 算法[2.78,79]。对于用 $O(n^2)$ CRBA计算关节空间惯性矩阵，起初是对 $n$ 个处理器，用 $O(\log_2 n)$ 算法计算复合刚体惯量和矩阵的对角元素[2.80,81]，后来对 $O(n^2)$ 个处理器采用 $O(\log_2 n)$ 算法计算整个矩阵[2.82,83]。对于正向动力学，多机械臂系统的加速，主要依靠并行/流水超级计算机获得[2.84]。这方面起初开发了 $n$ 个处理器的 $O(\log_2 n)$ 算法，用于无分支的串行链[2.85]，最近的研究主要集中在用 $O(\log_2 n)$ 算法处理更为复杂的结构[2.60,86,87]。

### 2.7.9 变拓扑系统

许多机器人机构，其拓扑结构会随时间变化，因为接触条件（特别是外界环境）发生了变化，如在有腿车中，采用柔性地面接触模型来计算接触力，可将闭环结构简化为树结构[2.88]，然而遇到接触面很坚硬的情况，就会产生数值积分问题。最近的研究工作[2.35,89]，提出了硬接触约束假设。采用这种方法可大大减少坐标变量的个数，而这些变量数在通用运动分析系统中，则可能是必须的[2.38]。同时，当结构变化时，它们能自动识别变量；在构型改变后，能提出相应的方法，用于计算速度边界条件[2.35,89]。

## 参考文献


2.1 R. Featherstone: The Calculation of Robot Dynamics using Articulated-Body Inertias, Int. J. Robot. Res. **2**(1), 13–30 (1983)

2.2 J.J. Craig: *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd edn. (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 2005)

2.3 R.E. Roberson, R. Schwertassek: *Dynamics of Multibody Systems* (Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1988)

2.4 J.Y.S. Luh, M.W. Walker, R.P.C. Paul: On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, Trans. ASME J. Dyn. Syst. Measur. Control **102**(2), 69–76 (1980)

2.5 M.W. Walker, D.E. Orin: Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, Trans. ASME J. Dyn. Syst. Measur. Control **104**, 205–211 (1982)

2.6 D. Baraff: Linear-Time Dynamics using Lagrange Multipliers, Proc. SIGGRAPH '96 (New Orleans 1996) pp. 137–146

2.7 J. Baumgarte: Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **1**, 1–16 (1972)

2.8 R. Featherstone: *Rigid Body Dynamics Algorithms* (Springer, Berlin, Heidelberg 2007)

2.9 R.M. Murray, Z. Li, S.S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* (CRC, Boca Raton, FL 1994)

2.10 J. Angeles: *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*, 2nd edn. (Springer-Verlag, New York 2003)

2.11 R.S. Ball: *A Treatise on the Theory of Screws* (Cambridge Univ. Press, London 1900), Republished (1998)

2.12 J.M. Selig: *Geometrical Methods in Robotics* (Springer, New York 1996)

2.13 D.T. Greenwood: *Principles of Dynamics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 1988)

2.14 F.C. Moon: *Applied Dynamics* (Wiley, New York 1998)

2.15 R. Featherstone: *Robot Dynamics Algorithms* (Kluwer Academic, Boston 1987)

2.16 S. McMillan, D.E. Orin: Efficient Computation of Articulated-Body Inertias Using Successive Axial Screws, IEEE Trans. Robot. Autom. **11**, 606–611 (1995)

2.17 L. Sciavicco, B. Siciliano: *Modeling and Control of Robot Manipulators*, 2nd edn. (Springer, London 2000)

2.18 J. Slotine, W. Li: On the Adaptive Control of Robot Manipulators, Int. J. Robot. Res. **6**(3), 49–59 (1987)

2.19 K.S. Chang, O. Khatib: Operational Space Dynamics: Efficient Algorithms for Modeling and Control of Branching Mechanisms. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation* (San Francisco 2000) pp. 850–856

2.20 O. Khatib: A Unified Approach to Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation, IEEE J. Robot. Autom. **3**(1), 43–53 (1987)

2.21 Y.F. Zheng, H. Hemami: Mathematical Modeling of a Robot Collision with its Environment, J. Robot. Syst. **2**(3), 289–307 (1985)

2.22 W. Khalil, E. Dombre: *Modeling, Identification and Control of Robots* (Taylor & Francis, New York 2002)

2.23 J. Denavit, R.S. Hartenberg: A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Appl. Mech. **22**, 215–221 (1955)

2.24 H. Brandl, R. Johanni, M. Otter: A Very Efficient Algorithm for the Simulation of Robots and Similar Multibody Systems Without Inversion of the Mass Matrix. In: *Proc. of IFAC/IFIP/IMACS International Symposium on Theory of Robots*, (Vienna 1986)

2.25 R. Featherstone: Efficient Factorization of the Joint Space Inertia Matrix for Branched Kinematic Trees, Int. J. Robot. Res. **24**(6), 487–500 (2005)

2.26 R. Featherstone: An Empirical Study of the Joint Space Inertia Matrix, Int. J. Robot. Res. **23**(9), 859–871 (2004)

2.27 K. Kreutz-Delgado, A. Jain, G. Rodriguez: Recursive Formulation of Operational Space Control. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Sacramento, CA April 1991) pp. 1750–1753

2.28 K.W. Lilly: *Efficient Dynamic Simulation of Robotic Mechanisms* (Kluwer Academic, Norwell, MA 1993)

2.29 K.W. Lilly, D.E. Orin: Efficient O(N) Recursive Computation of the Operational Space Inertia Matrix, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **23**(5), 1384–1391 (1993)

2.30 R.E. Ellis, S.L. Ricker: Two Numerical Issues in Simulating Constrained Robot Dynamics, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **24**(1), 19–27 (1994)

2.31 J. Wittenburg: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies* (B.G. Teubner, Stuttgart 1977)

2.32 R. Featherstone, D.E. Orin: Robot Dynamics: Equations and Algorithms. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, April 2000) pp. 826–834

2.33 C.A. Balafoutis, R.V. Patel: *Dynamic Analysis of Robot Manipulators: A Cartesian Tensor Approach* (Kluwer Academic, Boston 1991)

2.34 L.W. Tsai: *Robot Analysis and Design: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* (Wiley, New York 1999)

2.35 K. Yamane: *Simulating and Generating Motions of Human Figures* (Springer, Berlin 2004)

2.36 F.M.L. Amirouche: *Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications* (Birkhäuser, Boston 2006)

2.37 M.G. Coutinho: *Dynamic Simulations of Multibody Systems* (Springer, New York 2001)

2.38 E.J. Haug: *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems* (Allyn and Bacon, Boston, MA 1989)

2.39 R.L. Huston: *Multibody Dynamics* (Butterworths, Boston 1990)

2.40 A.A. Shabana: *Computational Dynamics*, 2nd edn. (Wiley, New York 2001)

2.41 V. Stejskal, M. Valášek: *Kinematics and Dynamics of Machinery* (Marcel Dekker, New York 1996)

2.42 L. Brand: *Vector and Tensor Analysis*, 4th edn. (Wiley/Chapman and Hall, New York/London 1953)

2.43 F.C. Park, J.E. Bobrow, S.R. Ploen: A Lie Group Formulation of Robot Dynamics, Int. J. Robot. Res. **14**(6), 609–618 (1995)

2.44 M.E. Kahn, B. Roth: The Near Minimum-time Control of Open-loop Articulated Kinematic Chains, J. Dyn. Syst. Measur. Control **93**, 164–172 (1971)

2.45 J.J. Uicker: Dynamic Force Analysis of Spatial Linkages, Trans. ASME J. Appl. Mech. **34**, 418–424 (1967)

2.46 A. Jain: Unified Formulation of Dynamics for Serial Rigid Multibody Systems, J. Guid. Control Dyn. **14**(3), 531–542 (1991)
2.47 G. Rodriguez: Kalman Filtering, Smoothing, and Recursive Robot Arm Forward and Inverse Dynamics, IEEE J. Robot. Autom. **RA-3**(6), 624–639 (1987)
2.48 G. Rodriguez, A. Jain, K. Kreutz-Delgado: A Spatial Operator Algébra for Manipulator Modelling and Control, Int. J. Robot. Res. **10**(4), 371–381 (1991)
2.49 J.M. Hollerbach: A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **SMC-10**(11), 730–736 (1980)
2.50 M.W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar: *Robot Modeling and Control* (Wiley, Hoboken, NJ 2006)
2.51 K.W. Buffinton: Kane's Method in Robotics. In: *Robotics and Automation Handbook*, ed. by T.R. Kurfess (CRC, Boca Raton, FL 2005), 6-1 to 6-31
2.52 T.R. Kane, D.A. Levinson: The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, Int. J. Robot. Res. **2**(3), 3–21 (1983)
2.53 C.A. Balafoutis, R.V. Patel, P. Misra: Efficient Modeling and Computation of Manipulator Dynamics Using Orthogonal Cartesian Tensors, IEEE J. Robot. Autom. **4**, 665–676 (1988)
2.54 X. He, A.A. Goldenberg: An Algorithm for Efficient Computation of Dynamics of Robotic Manipulators. In: *Proc. of Fourth International Conference on Advanced Robotics*, (Columbus, OH, 1989) pp. 175–188
2.55 W. Hu, D.W. Marhefka, D.E. Orin: Hybrid Kinematic and Dynamic Simulation of Running Machines, IEEE Trans. Robot. **21**(3), 490–497 (2005)
2.56 C.A. Balafoutis, R.V. Patel: Efficient Computation of Manipulator Inertia Matrices and the Direct Dynamics Problem, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **19**, 1313–1321 (1989)
2.57 K.W. Lilly, D.E. Orin: Alternate Formulations for the Manipulator Inertia Matrix, Int. J. Robot. Res. **10**, 64–74 (1991)
2.58 S. McMillan, D.E. Orin: Forward dynamics of multilegged vehicles using the composite rigid body method, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (1998) pp. 464–470
2.59 U.M. Ascher, D.K. Pai, B.P. Cloutier: Forward Dynamics: Elimination Methods, and Formulation Stiffness in Robot Simulation, Int. J. Robot. Res. **16**(6), 749–758 (1997)
2.60 R. Featherstone: A Divide-and-Conquer Articulated-Body Algorithm for Parallel $O(\log(n))$ Calculation of Rigid-Body Dynamics. Part 2: Trees, Loops and Accuracy, Int. J. Robot. Res. **18**(9), 876–892 (1999)
2.61 MSC Software Corporation: *Adams*, [On-line] http://www.mscsoftware.com/ (Nov. 12 2007)
2.62 T. Kane, D. Levinson: *Autolev User's Manual* (OnLine Dynamics Inc., 2005)
2.63 S. McMillan, D.E. Orin, R.B. McGhee: DynaMechs: An Object Oriented Software Package for Efficient Dynamic Simulation of Underwater Robotic Vehicles. In: *Underwater Robotic Vehicles: Design and Control*, ed. by J. Yuh (TSI Press, Albuquerque, NM 1995) pp. 73–98
2.64 R. Smith: *Open Dynamics Engine User Guide*, Available online: http://www.ode.org (Nov. 12 2007)
2.65 Microsoft Corporation: *Robotics Studio* [On-line] http:www.microsoft.com/robotics (Nov. 12 2007)
2.66 P.I. Corke: A Robotics Toolbox for MATLAB, IEEE Robot. Autom. Mag. **3**(1), 24–32 (1996)
2.67 M.G. Hollars, D.E. Rosenthal, M.A. Sherman: *SD/FAST User's Manual* (Symbolic Dynamics Inc., 1994)
2.68 G.D. Wood, D.C. Kennedy: *Simulating Mechanical Systems in Simulink with SimMechanics* (MathWorks Inc., 2003)
2.69 Cyberbotics Ltd.: *Webots User Guide*, Available online: http://www.cyberbotics.com (Nov. 8 2007)
2.70 I.C. Brown, P.J. Larcombe: A Survey of Customised Computer Algebra Programs for Multibody Dynamic Modelling. In: *The Use of Symbolic Methods in Control System Analysis and Design*, ed. by N. Munro (The Institute of Engineering and Technology, London 1999) pp. 53–77
2.71 J.J. Murray, C.P. Neuman: ARM: An algebraic robot dynamic modeling program. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Atlanta, Georgia, March (1984) pp. 103–114
2.72 J.J. Murray, C.P. Neuman: Organizing Customized Robot Dynamic Algorithms for Efficient Numerical Evaluation, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **18**(1), 115–125 (1988)
2.73 F.C. Park, J. Choi, S.R. Ploen: Symbolic Formulation of Closed Chain Dynamics in Independent Coordinates, Mech. Machine Theory **34**, 731–751 (1999)
2.74 M. Vukobratovic, N. Kircanski: Real-time Dynamics of Manipulation Robots. In: *Scientific Fundamentals of Robotics*, Vol. 4 (Springer-Verlag, New York 1985)
2.75 J. Wittenburg, U. Wolz: Mesa Verde: A Symbolic Program for Nonlinear Articulated-Rigid-Body Dynamics. In: *ASME Design Engineering Division Conference and Exhibit on Mechanical Vibration and Noise*, Cincinnati, Ohio, ASME Paper No. 85-DET-151, 1-8, September (1985)
2.76 J.Y.S. Luh, C.S. Lin: Scheduling of Parallel Computation for a Computer-Controlled Mechanical Manipulator, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **12**(2), 214–234 (1982)
2.77 D.E. Orin: Pipelined Approach to Inverse Plant Plus Jacobian Control of Robot Manipulators. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, Georgia*, 169–175, March (1984)
2.78 R.H. Lathrop: Parallelism in Manipulator Dynamics, Int. J. Robot. Res. **4**(2), 80–102 (1985)
2.79 C.S.G. Lee, P.R. Chang: Efficient Parallel Algorithm for Robot Inverse Dynamics Computation, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **16**(4), 532–542 (1986)
2.80 M. Amin-Javaheri, D.E. Orin: Systolic Architectures for the Manipulator Inertia Matrix, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **18**(6), 939–951 (1988)
2.81 C.S.G. Lee, P.R. Chang: Efficient Parallel Algorithms for Robot Forward Dynamics Computation, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **18**(2), 238–251 (1988)
2.82 M. Amin-Javaheri, D.E. Orin: Parallel Algorithms for Computation of the Manipulator Inertia Matrix, Int. J. Robot. Res. **10**(2), 162–170 (1991)
2.83 A. Fijany, A.K. Bejczy: A Class of Parallel Algorithms for Computation of the Manipulator Inertia Matrix, IEEE Trans. Robot. Autom. **5**(5), 600–615 (1989)
2.84 S. McMillan, P. Sadayappan, D.E. Orin: Parallel Dynamic Simulation of Multiple Manipulator Systems: Temporal Versus Spatial Methods, IEEE Trans. Syst.

Man Cybern. **24**(7), 982–990 (1994)

2.85 A. Fijany, I. Sharf, G.M.T. D'Eleuterio: Parallel $O(\log N)$ Algorithms for Computation of Manipulator Forward Dynamics, IEEE Trans. Robot. Autom. **11**(3), 389–400 (1995)

2.86 R. Featherstone: A Divide-and-Conquer Articulated-Body Algorithm for Parallel $O(\log(n))$ Calculation of Rigid-Body Dynamics. Part 1: Basic Algorithm, Int. J. Robot. Res. **18**(9), 867–875 (1999)

2.87 R. Featherstone, A. Fijany: A Technique for Analyzing Constrained Rigid-Body Systems and Its Application to the Constraint Force Algorithm, IEEE Trans. Robot. Autom. **15**(6), 1140–1144 (1999)

2.88 P.S. Freeman, D.E. Orin: Efficient Dynamic Simulation of a Quadruped Using a Decoupled Tree-Structured Approach, Int. J. Robot. Res. **10**, 619–627 (1991)

2.89 Y. Nakamura, K. Yamane: Dynamics Computation of Structure-Varying Kinematic Chains and Its Application to Human Figures, IEEE Trans. Robot. Autom. **16**(2), 124–134 (2000)

# 第3章 机构与驱动

Victor Scheinman，J. Michael McCarthy
张文增 译

本章主要关注影响机器人结构设计和制造的指导原则。机器人的运动方程和雅可比矩阵可以描述机器人的运动区间和机械增益，还能影响机器人的尺寸和关节装配。同时，机器人所需要完成的具体任务和运动的综合精度决定了诸如机械结构、传动系统以及驱动系统选择等的具体特性。本文中，我们对在设计机器人结构和原动件形式的过程中所用到的数学工具和实际需要考虑的问题进行了讨论。

本章对影响机器人性能的机构和驱动系统的特性进行了讨论。前面部分介绍了机器人执行部件的基本特性，以及它们与描述机器人运动特征的数学模型之间的关系。之后集中讨论了机器人结构和驱动系统的细节问题，以及它们怎样通过组合来产生不同的机器人种类和形式。最后则将这些设计特性与实际性能联系起来。



## 3.1 概述

通常把诸如横梁、连杆、铸件、轴、滑轨和轴承等能产生可移动骨架的物理结构，称为一个机器人的机械结构或者机械装置。而电动机、液压或气压活塞以及其他可以使这些机械装置的连接部分运动的元素则称之为驱动装置。在本章中，我们主要考虑机器人机械装置以及驱动装置的多种多样的设计，正是它们实现了一整套可以将电脑命令转化为千变万化的物理运动的功能。

早期设计的机器人都具有一般的运动能力，因为设计者们认为如果一个机器人可完成最多样化的任务类型，那么它可找到的市场也最广。然而这种过于强调市场适应性的设计导致了制造和使用的高成本。现在的机器人更多的是仅仅围绕一个特定系列的任务开始进行设计。

机器人设计关注的是关节的数量、外形大小、负载能力和末端执行器所需的运动条件。运动结构的构造和机器人的总体大小是由其所要完成的任务的需

求、工作空间以及其本身的再适应能力决定的。这些特点都影响到了末端执行器路径控制的精度，而此精度在弧焊和喷漆机器人的平滑运动的过程中都需要得到保证。同时，它们也决定了进行装配所必需的完全的定位能力、进行材料处理所必需的可重复能力以及进行精确的、实时的、基于传感装置的运动所必需的高分辨率和精确度。

在进行机器人系统设计时我们所要考虑的一个十分关键的问题就是我们到底想要这个机器人完成多少任务。这个机器人被设计具有的适应性应该可以顺利地完成这一范围内的任务。这决定了这个机器人的机械装置拓扑设计和驱动系统。而几何形状、材料、传感器的选择，包括电缆线路径的设计都要基于这些最根本的决定因素。

## 3.2　系统特征

工作范围和负载能力是赋予一个机器人各种特质的最主要的特征。

### 3.2.1　工作范围

机器人工作范围的定义是机器人自己可以进行操作的空间，其中便包含了工作空间的定义。工作空间通常定义了机器人的位置和方向以便其完成指定的任务，而工作范围在此基础上还包括机器人自己运动时所占据的空间体积。这个范围是由关节的类型、关节运动的区间和连接它们的连杆长度所决定的。在设计机器人的机械结构时，工作范围的大小以及机器人上的负载大小是我们首要考虑的问题。

机器人工作范围的设计必须要考虑到机械结构的运动可能会受到限制的部分。这些约束来源于关节运动范围的有限性、连杆长度、轴间夹角或者这些因素的综合作用。一般来说，转动关节机械臂在工作范围的中间会比在其极限位置有更好的工作效果（见图3.1）。机械臂的长度和关节的移动范围之间应该留出一定的空隙，以便在传感器的引导下形成各种各样的移动路径，并且为末端执行器或工具的更换提供方便，否则偏移量和长度的不同将经常改变工作范围。

### 3.2.2　负载能力

作为机器人最主要的特征之一，负载能力与速度和加速度有着非常密切的关系。对于装配机器人来说，首要任务是保证位置精度，将一个简单的抓取-释放动作循环的时间减到最小，因此机械结构的

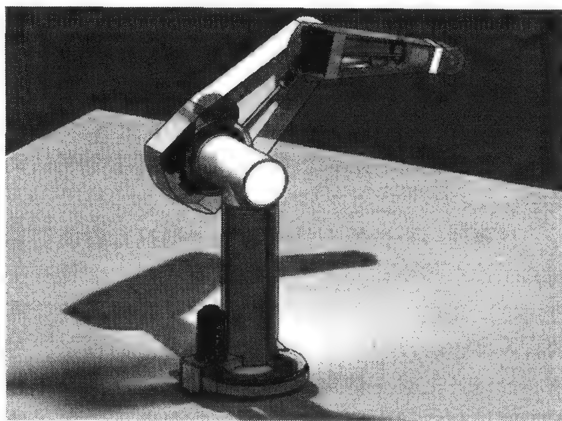


图3.1　PUMA 560 机器人

加速度和刚度（结构和驱动刚度）与峰值速度和最大负载能力相比往往是更为重要的参数。而弧焊时所需要的是在控制路径上缓慢的移动；同时，速度的细微变化和跟踪焊接路径的准确性都十分重要。因此，人们更应当依据一个操作装置的有效载荷特性，而不是最大载荷，来进行操作装置的设计和确定。

规定负载能力时必须将末端执行器的重力和惯性力列入考虑范围。这些因素将对腕关节、末端执行器的设计和驱动部分产生很大影响。一般情况下，负载能力在机械臂加速度和腕关节扭矩的方面相对其他因素更加重要。负载情况也会影响到机械臂静态结构的变形、电动机转矩的稳定性、系统固有频率、衰减，及伺服系统控制变量的选择。这些因素都对机器人是否能够实现最好的运行效果和稳定性起到重要作用。

### 3.2.3　运动骨架

机械臂的形状和大小是由其工作空间的形状、布局，运动的精确程度，速度和加速度及其结构的需求所共同决定的。笛卡儿坐标下的机械臂（腕关节的轴可旋或不可旋）拥有最简单的变形和控制方程。它们移动的（直线运动的）、垂直的轴使运动的规划和计算变得简单且相对直接。因为他们的主运动轴没有进行动力的耦合（在原始设置下），所以他们的控制方程也被大大简化了。具有全部转动关节的机械臂通常更难以控制，但是他们在给定的工作空间中却可使结构更紧凑和高效。一般情况下，设计和制造一个转动关节比一个长时间运动的移动关节更加容易。相比龙门型机器人，具有转动关节机械臂的机器人的工作空间能够更加方便地与经过调节的直角坐标型机器

人装置进行重叠。

机器人结构的最终选择应该基于专门的运动、结构或者任务执行的需要。比如，当需要进行一个非常精确的垂直直线的运动时，我们会选择一个简单的棱柱垂直关节轴而不是两个或三个需要协调控制的转动关节。

想要使一个机器人机械臂的末端执行器能够达到其工作空间中的任意方向和位置，最少需要6个自由度。当然，大多数简单的或预设好的任务所需的自由度也可以少于6个。这是因为他们可以经过精心的设计来减少特定轴的运动，或者这项任务并不需要用到空间中所有的位置。一个典型的例子便是垂直装配机器人使用螺钉旋具时的情况，它仅需要三个自由度。

在有些应用中，我们需要在多于6个自由度的情况下运用机械臂，特别是需要机动性或绕开一些障碍物的时候。例如，一个管道外壁涂料维护机器人不仅需要控制其形状还需要控制末端执行器的精确走位。一般来说，添加自由度会使循环时间增长，减少负载能力并降低给定的机械臂结构和驱动系统的精确程度。

## 3.3　运动学与动力学

机器人的动力系统可以分为两个部分：一部分依赖于其机械结构的几何特征以及作用在其结构上的力，反映了机器人的运动特质，称为运动学；另一部分则通过力对系统产生作用，称为动力学。动力学中的一条基本法则告诉我们：运动机器人能量的改变和外力在其上做的功之间的差异在运动轨迹的细小变化过程中保持不变。这就是虚功和虚状态原理，它要求在所有的虚位移上功与能量的变化相互抵消[3.1,2]。

由于像机器人这样的机械都尽量设计得使能量损失最小化，其能量损失一般源于关节的摩擦和材料的疲劳，所以我们可以认为能量的变化量是很小的。这就意味着驱动装置所输入的功几乎能够全部转化为输出的力所做的功。

如果在一段微小的时间里考虑这种关系，我们可以得到输入功的速率，即功率，近似等于相应的输出功率。因为功率等于力乘以速度，我们便得到了最基本的关系：输入力与输出力的比值和输入速度与输出速度的比值互为倒数。另一种表述方式为，对于理想的机械，机械增益等于其速度比值的倒数。

### 3.3.1　机器人拓扑

铰接的或可滑移的关节与连杆组成链状结构，一系列这样的链状结构又组成了机器人的运动骨架。这种骨架一般具有两种基本形式：如果是由单一连续的链状结构组成，就定义为串联机器人（见图3.1）；而如果是多个连续的链状结构共同支持同一个终端控制装置，如图3.2所示，我们称之为并联机器人。机器人经过设计可以实现并联工作，比如一个行走机器人的腿部（见图3.3和图3.4）[3.3]和一个机器人手的多个手指（见图3.5～图3.7）[3.4]。




图3.2　一个并联机器人，可以有多达6个串联链将一个末端平台连接到基座



图3.3　有自适应能力的悬挂式车型行走机器人

机器人的末端执行器是与环境进行交互的首选工具，而它的定位和定向则需要依赖于机器人的运动骨架。对于一个普通的串联机器人来说，一个具有六关节的链状结构便可以提供对其终端装置的全部控制。而对于一个普通的并联机器人，6个关节往往不够，同时六个驱动装置还需要通过与关节不同的关联方式来实现对于其终端装置运动的控制。

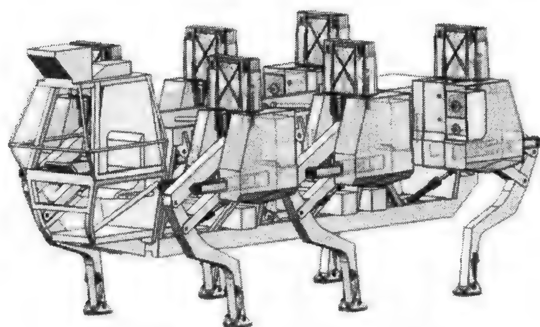


图3.4 具有自适应能力的悬挂式车型行走机器人

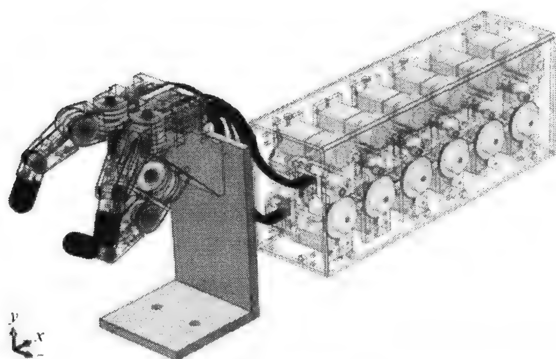


图3.5 Salisbury 三指机器人手和其电缆结构连接平台与基底

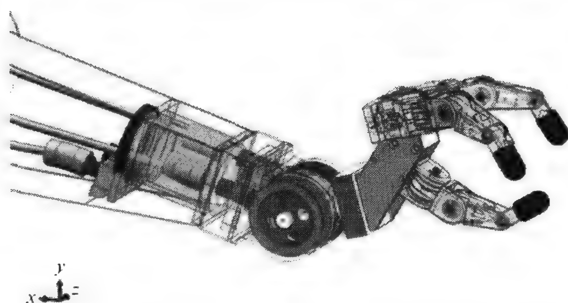


图3.6 Salisbury 手作为 PUMA 机器人的末端执行器（图上未展示驱动系统）

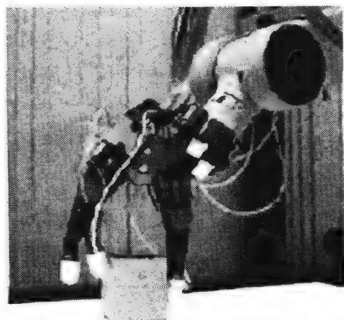


图3.7 Salisbury 三指手在抓取物体时的照片

### 3.3.2 运动学方程

通过其运动学方程，机器人可以用它自己各关节的详细参数，比如旋转关节转过的角度和滑动关节移动的距离，来定义一个机械任意组成部分的位置。要做到这点，我们需要用一系列的线条来描述机器人。这些线条代表着相互等价的旋转或者棱形关节的 $\hat{z}_j$ 轴和公垂线 $\hat{x}_j$，而后两者则组成了整个链状结构的运动骨架（见图3.2）。这样的结构可以使机器人的每个连杆的详细位置信息通过下面的矩阵方程与基准产生联系：

$$T = Z(\theta_1, d_1)X(\alpha_1, a_1)Z(\theta_2, d_2)\ldots \times X(\alpha_{m-1}, a_{m-1})Z(\theta_m, d_m) \tag{3.1}$$

这就是链状结构的运动方程[3.5,6]（参见第1章式(1.44)）。由所有的关节参数所确定的所有末端执行器所能到达的位置 $T$ 的集合被称为机器人的工作空间。

$Z(\theta_j, d_j)$ 和 $X(\alpha_j, a_j)$ 都为 4×4 的矩阵，分别定义了绕着和沿着关节轴 $\hat{z}_j$ 与 $\hat{x}_j$ 的旋转位移量[3.7]。其中的参量 $\alpha_j$，$a_j$ 确定了链中连杆的维度。$\theta_j$ 代表旋转关节的角度变量，而 $d_j$ 则是棱形关节的位置变化量。末端执行器上一点 ${}^M\boldsymbol{p}$ 的轨迹 ${}^F\boldsymbol{p}(t)$ 可以通过关节的轨迹获得，满足如下公式：

$${}^F\boldsymbol{p}(t) = T(\boldsymbol{q}(t))\,{}^M\boldsymbol{p} \tag{3.2}$$

式中，$\boldsymbol{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_m(t))^{\mathrm{T}}$，$q_i$ 为 $\theta_i$ 还是 $d_i$ 则依照具体关节而定。

如果末端执行器与基准框架是通过多于一个的串联链状结构连接的（见图3.2），那么对于每一个链结构来说我们都有一套运动方程，

$$T = B_j T(q_j) E_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

式中，$B_j$ 确定了第 $j$ 个链的基坐标；$E_j$ 定义了它与末端执行器的连接位置。那些能够同时满足所有这些方程的 $T$ 组成的集合就是末端执行器的工作空间。这给关节的变量增加了约束，这些约束必须先被确定下来才能完整地定义末端执行器的工作空间[3.8,9]。

### 3.3.3 构型空间

一个机器人的构型空间指的是可以使用的关节参数值的范围，而运动方程将它与末端执行器的工作空间联系在了一起。这个构型空间是设计机器人躲避障碍路径的基本工具[3.10]。虽然组成机器人的链状结构中的任何一个连杆都有可能与障碍物发生碰撞，但是只有末端执行器是设计来靠近这些障碍物并实现

其功能的，这些障碍物如支撑机器人的桌子和所要抓取工件的夹具等。由于障碍物的存在，工作空间中出现了一些禁止到达的位置和方向。与其对应，机器人的构型空间中也出现了不能实现的关节夹角。所以，机器人工作路径的设计者就必须要在除了这些关节障碍的其他自由空间中来寻找一条能够到达目的地的路径。

### 3.3.4 速度比

机器人的速度比将末端执行器上一点${}^{F}\boldsymbol{p}$ 的速度${}^{F}\dot{\boldsymbol{p}}$ 与关节的速率$\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_m)^{\mathrm{T}}$建立了联系，方程为：

$$ {}^{F}\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times({}^{F}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d}) \tag{3.4} $$

式中，$\boldsymbol{d}$ 为参考点的位置；$\boldsymbol{v}$ 为参考点的速度；$\boldsymbol{\omega}$ 是末端执行器的角速度。

向量$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 可通过下列方程与关节速率 $\dot{q}_j$ 建立联系：

$$ \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_m}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \dot{q}_m\end{pmatrix} \tag{3.5} $$

或者

$$ \mathbf{v}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3.6} $$

式中，系数矩阵$\boldsymbol{J}$称为雅可比矩阵。它作为速度比矩阵，建立起了末端执行器速度与输入的关节旋转速率之间的关系[3.6,9]。

### 3.3.5 机械增益

如果末端执行器在点${}^{F}\boldsymbol{p}$ 上作用$\boldsymbol{f}$的力，那么输出功率为：

$$ P_{\mathrm{out}}=\boldsymbol{f}\cdot{}^{F}\dot{\boldsymbol{p}}=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{f}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_j}\times({}^{F}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})\right]\dot{q}_j \tag{3.7} $$

如果关节 $\mathbf{S}_j$ 处有驱动装置，则上述和式中的每一项都是其中某个驱动装置提供的功率在总输出功率中所占的那部分。

关节 $\mathbf{S}_j$ 处输入的功率是转矩 $\tau_j$ 与角速度 $\dot{q}_j$ 的乘积$\tau_j\dot{q}_j$。对每一个关节运用虚功原理，我们可以得到：

$$ \tau_j=\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_j}+({}^{F}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_j},\quad j=1,\cdots,m. \tag{3.8} $$

我们可以利用此公式在参考点 $\boldsymbol{d}$ 引入力矩矢量 $\mathbf{f}=(\boldsymbol{f},({}^{F}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{f})^{\mathrm{T}}$。

方程式（3.8）可变形为矩阵形式：

$$ \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{3.9} $$

式中，$\boldsymbol{J}$ 为式（3.5）中定义过的雅可比矩阵。对于一个具有六关节的链结构来说，运用这个方程可以解得输出力矩矢量 $\mathbf{f}$，

$$ \mathbf{f}=(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\tau} \tag{3.10} $$

因此，用矩阵定义的这个系统的机械增益为速度比矩阵的逆矩阵。

## 3.4 串联机器人

串联机器人是以底座为开始，以末端执行器为结束的一系列连杆和关节，如图3.8所示。机器人的连杆和关节常常被设计成可以提供独立平移和定方向的结构。通常情况下，前3个关节一般用来在空间定位一个参考点，后3个关节用来组成可以确定这个点附近的末端执行器方向的腕关节[3.12,13]。这个参考点被叫做腕坐标中心。腕坐标中心所能够到达的空间被叫做机器人的可达工作区。到达这些点且可旋转的空间称为灵巧工作空间。

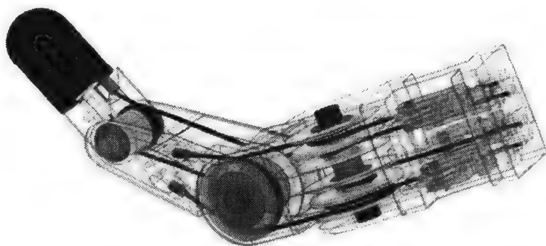


图3.8 Salisbury 的一根手指是一个串联机器人

一个机器人往往设计成它的可达工作区是对称的。从这个角度看，有三种基本形状：矩形、圆柱形和球形。矩形工作区是由3个相互垂直的移动（P）关节组成。这些关节点可构成所谓的笛卡儿型机器人的 PPPS 链，其中 S 指的是一个允许相对于其中心点所有方向转动的球形铰链的腕关节。旋转的底座和两个移动关节点可构成一个具有圆柱工作区的 CPS 链，其中 C 指的是共轴的旋转（R）和滑移（P）关节点。P 关节可被一个作为肘关节的、由提供相同径向运动的转动（R）关节所替代。最后，两个相互垂直的旋转关节在机器人的底座上组成一个 T 形关节，这个关节可支持围绕横向和纵向转轴的旋转。径向移动既可以由 P 关节点提供也可以由作为肘的 R 关节点提供，它便构成了一个具有球形工作空间的 TPS 链

或 TRS 链。

工作区间的完全对称是很少能实现的，因为关节的轴线往往需要为避免连杆的碰撞而偏置，而且还存在与工作区间扭曲变形相关的关节运动限制。

### 3.4.1　设计优化

另一种设计机器人的方法是用机器人工作区间的直接规格参数作为系统的末端执行器的位置集合，我们称之为任务空间[3.14-17]。一般串联机械臂对于其上的5个连杆的每个连杆就有两个设计参数，连杆偏移和扭转，这5个连杆中，每个都具有4个可以指示机器人底座和其末端执行器上工件位置的参数，所以总共有18个设计变量。连杆参数往往都被给定了，以保证工作链有球形的腕和特定的工作空间。设计目标通常是确定工作空间的体积并且指出底座和工件的框架，以便于工作空间能包含特定的任务空间。

任务空间一般由 4×4 矩阵 $\boldsymbol{D}_i$，$i=1, \dots, k$ 定义。利用迭代的方式，通过选择一个设计，并用联合的运动学方程 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q})$ 来求得目标方程

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{k} \|\boldsymbol{D}_i \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{q}_i)\| \quad (3.11)$$

中相关位移的解。最优化技术可以得到使目标函数最小化的设计参数矢量 $\boldsymbol{r}$。

这种优化取决于末端执行器和理想工作空间之间的距离度量的定义。Park[3.18]、Martinez 和 Duffy[3.19]，Zefra[3.20]，lin，Burdick[3.21] 等人已经告诉我们没有距离度量是坐标的结构不变量。这个也就是说，除非这一目标函数可以被化为零，使工作区完全包含任务空间，那么最终的结果将并不能使设计与坐标的选择相互独立，也因此不能被称为几何的设计。

### 3.4.2　速度比

依据式（3.5），六轴机器人是一个 6 × 6 的雅可比矩阵，一个由速度比构成的阵列，此速度比的意义便在于将腕中心速度 $\boldsymbol{v}$ 以及末端执行器角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与每个关节的速度联系起来。方程（3.9）表明，从每个驱动器提供的转矩的角度来看，这个雅可比矩阵定义了施加在腕中心的转矩矢量 $\mathbf{f}$。机器人的连杆参数可以用来确定一个具有特定属性的雅可比矩阵。

一个机器人的驱动转矩的平方和通常被用来作为结果的一个测量标准量[3.22,23]。从式（3.9）我们得到

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \mathbf{f} \quad (3.12)$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$ 是正方形的正定矩阵。因此，它可以被看成是在六维空间内对超椭球体的定义。这个椭球体的半径是这个雅可比矩阵特征值的绝对值的相反数。这些特征值可以被看做确定每个关节速度与放大量的模态速度比。其倒数是相关模态的机械增益，所以这个椭球形状说明了机器人的力的增益性能。

最大特征值与最小特征值的比率，即所谓的条件数，给出了关于椭球的各向异性或失圆的尺度。一个球体的条件数为1，称之为各向同性。当一个机器人的末端执行器所处的位置所对应的雅可比矩阵各向同性时，就不存在速度比率的放大或者机械增益。因为误差是不会被扩大的，所以这个模型被认为可以在输入和输出间提供很好的耦合。因此，条件数在机器人设计中也被作为一个评价准则。

这种情况建立在机器人的基本设计工作区间包含了其任务空间的假设之上。参数优化确定了内部的连杆参数，这些参数可以产生一个具有我们所期望的属性的雅可比矩阵。正如我们的设计与理想工作区间之间的差距的最小化过程中，基于雅可比矩阵的优化也取决于一个能够避免坐标相关性的公式化的过程。

## 3.5　并联机器人

有两个或两个以上串联机器人来支持末端执行器的机器人系统被称作并联机器人。例如，自适应悬架车辆（ASV）（见图3.9），是一种由并联驱动装置驱动的缩放装置。

并联机器人的每一个支撑腿可有多达6个自由度，然而在整个系统中一般只有6个关节受到驱动。一个很好的例子就是 Stewart 平台，它由6个 TPS 机器人组成，而在这些 TPS 机器人的关节中往往只有 P 关节是主动驱动的。

这 TPS 腿的运动学方程是

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\theta}_j) \boldsymbol{E}_j, \quad j=1, \dots, 6 \quad (3.13)$$

式中，$\boldsymbol{B}_j$ 指的是腿的底座；$\boldsymbol{E}_j$ 则定义了底座与末端执行器连接的位置。能同时满足所有这些方程的位置 $\boldsymbol{T}$ 的集合便是并联机器人的工作区。

往往并联机器人的一个工作链可以被几何约束所定义，例如，如果位置 $\boldsymbol{T}$ 满足方程

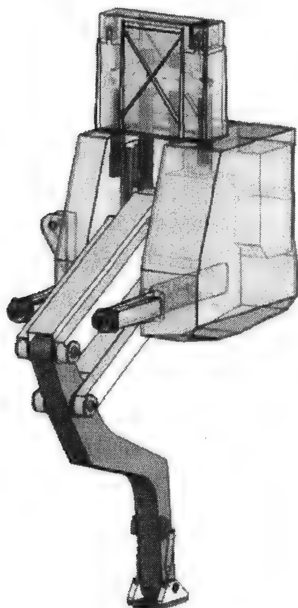


图3.9　ASV步行机器的一条腿就是一个并联机器人

$$(\boldsymbol{T}x_j-\boldsymbol{p}_j)\cdot(\boldsymbol{T}x_j-\boldsymbol{p}_j)=\rho_j^2 \qquad (3.14)$$

那么$\boldsymbol{T}$就是属于第$j$个TPS支撑腿的工作区。因为$\rho_j$的长度受到了驱动关节的控制，所以这个方程定义了基础关节$\boldsymbol{p}_j$到平台上连接点的距离。在这种情况下，工作区就是满足所有6个方程的位置$\boldsymbol{T}$的集合，同时，每个腿都具有这样一个工作区。

### 3.5.1　工作区间

并联机器人的工作区间是单个支撑腿的工作区间的交集。然而，这并不是简单地将可达工作区与灵巧工作区分别独立相交。在并联机器人中，这些工作区都是密切结合的。这些灵巧工作区一般在可达工作区中心附近最大，并且随着参考点向可达工作区的边缘移动而逐渐缩小。通过支撑腿的设计，在运动对称性方面产生了一个新的关注焦点，同时经过很多创新并联设计，这个焦点已经成为一个重要的设计工具[3.30,31]。模拟系统是利用设计参数来评价机器人的工作区间的。

另一种方法是直接指定工作区间中的位置和方向，这些位置和方向均是确定腿的限制的代数方程中的参数，而这些腿的限制又决定了设计参数[3.32,33]。这称为运动合成，同时产生出了不对称并联机器人，但是此机器人具有指定的可达工作区和灵巧工作区，参见*MeCarthy*[3.34]。

### 3.5.2　机械增益

通过考虑单个支撑腿的雅可比矩阵，我们可以得到并联机器人的力的增益特性。利用由6个向量组成的$\mathbf{v}=(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}$来定义平台的线速度和角速度，从每个支撑腿的运动学方程可以得到

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{J}_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_1=\boldsymbol{J}_2\dot{\boldsymbol{\rho}}_2=\cdots=\boldsymbol{J}_6\dot{\boldsymbol{\rho}}_6 \qquad (3.15)$$

在这里假设此平台有6个支撑腿，但也可以更少，比如当机械手的手指抓住一个物体时。

通过虚功原理可得到由每个链提供给平台的力

$$\mathbf{f}_j=(\boldsymbol{J}_j^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\tau}_j,\quad j=1,\ \ldots,\ 6. \qquad (3.16)$$

在系统中只有6个驱动关节，所以我们把这些相关的力矩都列写到矢量$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ \cdots,\ \tau_6)^{\mathrm{T}}$中去。如果$\mathbf{f}_i$是在$\tau_i=1$且富余力矩为0的条件下通过式(3.16)得到的力-力矩矢量，那么最终作用在平台上的力-力矩$\mathbf{w}$为

$$\mathbf{w}=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots,\mathbf{f}_6)\boldsymbol{\tau} \qquad (3.17)$$

或者

$$\mathbf{w}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\tau} \qquad (3.18)$$

系数矩阵$\boldsymbol{\Gamma}$的元素决定了每个驱动关节的机械增益。在Stewart平台的例子中，矩阵中的各列便是沿着各条腿线条的Plücker坐标。

利用虚功原理可以得到用关节速率表达的平台速度函数：

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=\dot{\boldsymbol{\rho}} \qquad (3.19)$$

因此$\boldsymbol{\Gamma}$的逆矩阵确定了驱动关节和末端驱动装置间的速度比。同样的方程可以通过几何约束方程(3.14)的导数的计算得到，并且$\boldsymbol{\Gamma}$是并联机器人系统的雅可比矩阵。

这个雅可比矩阵$\boldsymbol{\Gamma}$被应用在参数优化算法中，以设计出具有各向同性机械增益的并联机器人。行列式$|\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}|$的平方根可测量由列向量$\mathbf{f}_j$限定的六维体积。这个体积与其在工作区间中的最大值的比值的分布也被用作衡量机器人的整体性能[3.37,38]。通过测量可用的最大关节扭矩和最大的期望力和力矩，一个相似的性能衡量方式将雅可比矩阵标准化，然后再寻找一个各向同性的设计。

### 3.5.3　特殊并联机器人

另一种设计并联机器人的方法是将它的功能分成定位和移动两部分。Tsai、Joshi[3.40]、Jin和Yang[3.41]调查设计了一类只产生移动的并联链。Kong和Gosselin和Hess-Coelho[3.43]做了同样的工作，设计了能在空间中提供旋转运动的并联链。

## 3.6 机械结构

为了动态建模，机器人的连杆通常被认为是刚性的，但是机器人并不是刚性结构。像所有的结构一样，机器人将在如自身重力和载荷重力等在加载荷的作用下弯曲，见图3.10和图3.11。这种变形是程度的问题。导致连杆弯曲需要的力越大，机器人就越像一个由刚性结构构成的整体。刚性机器人的连杆被设计得具有一定的硬度，以实现负载所造成的弯曲小于其所需完成的各种任务对精确定位的要求。这样就保证了动态建模和控制算法不需要考虑连杆的变形。大多数商用机器人的手臂都是这种类型的（见参考文献［3.44］）。

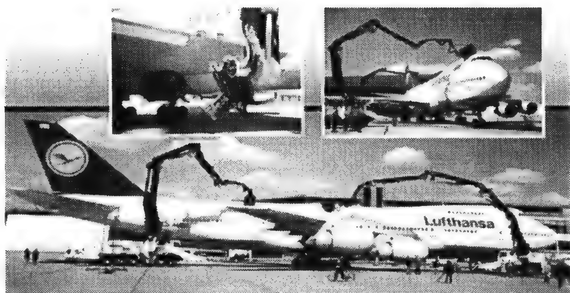



图3.10 Skywash的液压飞机清扫机器人

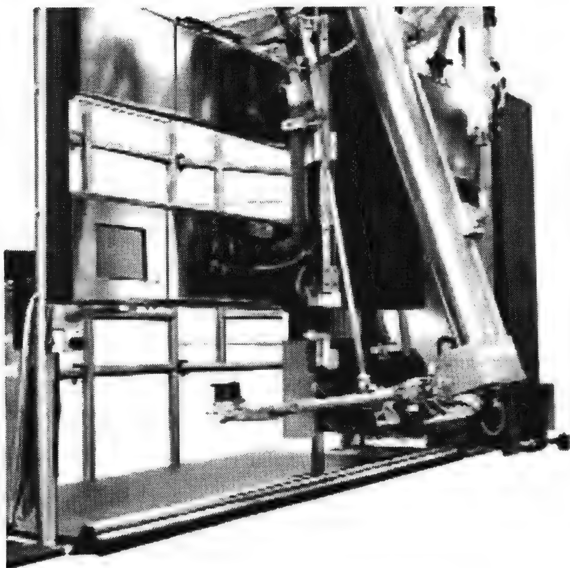


图3.11 DeLaval VMS的挤奶机器人

通过增加控制算法，使其包括由重力产生的连杆变形的模型，我们可以改进一个刚性机器人的定位精度。我们还可以使用压力传感器来衡量载荷和挠度。这些半刚性机器人都假定了小的结构变形与已知的负载呈线性相关的关系。

柔性机器人要求动态模型包括各个关节由重力负载所造成的变形，以及由加速度产生的惯性力带来的载荷，即所谓的惯性负载。机器人控制算法必须同时控制系统的振动以及其总体运动。振动的控制甚至在刚性机器人中也是必需的，以实现高速和对大型有效载荷的操纵。

### 3.6.1 连杆

工业机器人所关注的重点是在弯曲和扭转时的连杆刚度。为了提供这种刚度，机器人的连杆常设计成梁或壳（单体壳）的结构。单体结构拥有低的质量或者高的强度-质量比，但是更加昂贵，也较难制造。铸造、锻造或加工梁的连杆往往具有更低的成本，见Juvinall和Marshek[3.45]和Sigley和Mischke[3.46,47]。

另一个重要考虑是连杆结构是否包括用螺栓、焊接或粘合剂连接的组装件，包括铸件，机械加工件以及制造件等。螺钉和螺栓连接看起来似乎简单，价格低廉，易于维护，但即使在制造过程中都会出现的不可避免的连杆变形给这个由多种零件组装而成的装配件引入了塑性变形，这些变形会造成机器人尺寸和功能的变化。而焊接与铸造结构对于塑性变形和滞后形变都更加不敏感，虽然许多情况下，它们还要二级加工，如去除热应力和精加工。

铸件最低的实际壁厚或网格厚度可能会大于保证刚度所需的厚度。薄壁可以通过薄皮结构（单体结构）来实现，但是这种优势可能被潜在凹痕、永久变形和轻微碰撞的损坏所抵消。因此，当选择机器人的机构和制造细节时，必须考虑性能要求。

特种实用材料和几何学都被用于减少连接结构的质量，从而也减少了与之直接相关的重力和惯性载荷。由镁或铝合金构成的横截面恒定的冲压件对于实现直线运动的结构来说非常方便。对于要求高加速度的机器人（喷涂机器人），碳和玻璃纤维合成物使其轻量化。热塑性塑料提供了廉价的连杆结构，虽然它的负载能力会有所降低。不锈钢经常被用于提供医疗和饮食服务的机器人。因为旋转的关节产生的线加速随着其与轴的距离的增加而增加，所以通过设计，我们常常要减小那些与这种关节相连的连杆的横断面积和壁厚，从而减少相关的惯性负载。

### 3.6.2 关节

对大多数机器人而言，关节只可以旋转或者平移，对应的，这两种关节被定义为旋转关节和移动关节。其他可用的关节有球槽接合的或者球形的关节，还有胡克型通用关节。

包含驱动器和位置传感器的关节结构的综合机械结构是结构灵活性的来源。关节承载区域的变形可以减少轴和齿轮的预载荷，允许间隙和空转，也就减少了精度。结构的灵活性也可以影响齿轮的中心距离，引起力和转矩，同时导致相关的变形，如粘合、堵塞以及磨损。

## 3.7 关节机构

一个机器人关节至少由四个主要部分构成：关节轴、驱动器、传动系统以及状态传感器（通常作为位置反馈，但是速度传感器、力传感器也是常见的）。

对于最大加速度小于0.5倍重力加速度的低性能操作器，系统惯性并没有重力及其转矩重要。这意味着驱动器可以放置在关节附近，它们的悬浮质量补偿了平衡质量、弹力和气压。

对于最大加速度达到甚至超过3~10个重力加速度的高性能机器人，惯性质量的最小化就非常重要了。为了减小惯性质量，驱动器被放置在系列操作器的第一个关节轴附近，并且通过连杆、带、绳索或者传动装置来驱动关节。

更长的传动距离虽然可以减少质量、重力力矩和惯性，但是也引入了挠度，从而降低了系统的刚度。每个关节的驱动器位置和传动设计与重力、惯性、刚度和复杂性是两组此消彼长的矛盾因素，需要我们在其中做出折衷的选择。这个选择就决定了操作器的主要物理特征。

举例说明，例如Adept 1综合机器人，其有四个自由度，每个都拥有不同的结构。第一个轴是由电动机直接驱动，第二个轴由传动带条驱动，第三个由传动带驱动，最后一个由直线型的滚珠丝杠驱动。关于各种有用的关节操作器，请参看Sclater和Chironis[3.48]。

### 3.7.1 关节轴结构

**1. 旋转轴**

旋转关节是被设计用来实现纯旋转。评价一个旋转关节最重要的指标是它的刚度或者说是抵抗其他干扰运动的能力。在刚度设计中所应考虑的关键因素有轴的直径、误差和间隙，轴承的支撑结构，以及在梁上加载合适的预载荷。轴的直径和轴承的尺寸不总是以承载能力为基础的。实际上，它们经常依据刚性的支撑结构而进行选择，并且他们还需要具有一个足够大的可以保证线缆穿过的管道，甚至一个其他单元的控制元件通过的孔洞。因为关节轴经常传递转矩，所以它和它的支撑结构必须被设计用来同时承受弯曲和扭转。PUMA机器人的第一个轴就是一个有大直径管状构造的关节的例子。

选择一个旋转轴的支撑结构是保证刚度的一个重要因素。支撑托架的排列方式和构造必须把制造的偏差、热膨胀以及轴承预紧力考虑在内。通过减少轴承径向和轴向的运动，角接触轴承或圆锥滚子轴承的轴向预紧力提高了系统精确度和刚度。预载荷可以通过选择性的装配、弹性的元件、垫片、垫圈、四点接触轴承、双联式轴承排列、或者紧的制造配合公差来获得。

**2. 移动关节**

移动关节有两种基本类型：单级型和伸缩型。单级型关节由一个可沿另外一个固定表面移动的表面组成。伸缩型关节本质上是由单级型关节嵌套或组合成的。单级型关节具有结构简单和高刚度的优点；而伸缩型关节的主要优点是它的连结紧凑，并且有大的伸缩比。对于一些动作来说，伸缩型关节有更小的惯性，因为其关节的某些部分可能没有移动或者以减小的加速度移动。

移动关节中轴承的主要的功能是促进其在某一方向上的移动，同时防止其他方向的运动。防止那些我们所不希望的移动给我们带来更具挑战性的设计问题。结构的变形对轴承表面构造影响很大，而轴承表面的构造又影响到了机器人的性能。在一些情形中，由于载荷引起的圆筒偏差可能导致会妨碍运动的阻塞。对于高精度的移动关节，在长距离下也要保持路径的直线性。在有摩擦的多重表面要达到要求的精度是十分昂贵的。移动关节的轴承和路径都需要被昂贵并且大面积的护罩所覆盖和密封。

评价大量的（接近或者就在腕关节或末端执行器之上）线性移动关节或轴的主要参数是刚度-质量比值。获得一个好的强度-质量比需要使用空心或者薄壁结构，而不是实心的运动元件。

轴承间距在刚度设计时也至关重要。如果间距太短，无论轴承的刚度多高，系统刚度都会不够。移动关节失效的主要原因是混入了杂质以及表面的

疲劳磨损，引起这些缺陷的主要原因是大的预载荷、力矩载荷以及冲击载荷在滚动体上产成了过大的负载。

由于具有大面积的暴露在外的精密表面，大多数移动关节相对于转动关节而言对于不合理操作和环境因素更加敏感。同时，移动关节也更加难于制造、装配和校直。

移动关节中滑动元件的常见类型主要有铜或热塑性套管。这些套管有成本低、相对的高承载能力和可在未硬化或微硬化表面工作等优点。因为在移动元件上的压力被分散了，从而数值较小，所以它可以由薄壁套管来做成。另外一种常见的套管是球状套管。相对热塑性套管来说，球状套管有低摩擦和高精度等优点。然而，它们需要接触表面被热处理过或热硬化过（通常需要达到55Rc或更高的硬度），而且需要足够的厚度和框架结构，从而能够承载由球的点接触特性而带来的高应力。

球和滚珠导轨在机器人的移动关节中也很常见。此滑动结构包含两种基本类型：循环和非循环。非循环的球和滚珠导轨主要应用于短位移装置上。它们具有高精度以及低摩擦的优点，但另一方面，也因此导致其对冲击敏感，同时对转矩负载的能力较差。相对来说，循环球和滚珠导轨在一定程度上没有那么精确，但是能承载更高的载荷。它们也可以被用来承载相对较大的载荷，其移动区间也可以有几米之长。商业用的可循环球和滚珠导轨已经大大简化了直线轴的设计和结构，特别是在构架和轨道操纵其方面。

另外一种常见的机器人移动关节是由凸轮附件、滚筒或者滚轮组成的，这些滚动体均是在模压、拔模、机加工或者磨光后的表面上进行滚动的。在大载荷装置中，滚动体滚动所在的表面必须在最终精磨之前进行硬化处理。凸轮附件在购买时会带有独特的安装杆，它可以被用来辅助装配和调整，而弹性套管可以使运行更安静和顺畅。

两种较少见的机器人移动关节是以弯板轴承和空气轴承为特点的。使用弯板轴承的关节的运动是由支撑零件的梁结构的弹性变形提供的，因此，它主要应用在高精度、准线性的短距移动上。空气轴承需要光滑的表面，对公差的近距离控制，以及将经过过滤且无油的压缩气体稳定地通入其中。两个或者三个自由度的空气轴承可以用很少的移动结构实现多轴移动，如图3.12所示。



图3.12 Robotworld是一款具有多空气轴承的完整机器人工作单元

**3. 关节运动**

肩部、肘部以及连接件的旋转关节构型决定了机械臂的工作范围。腕部关节构型通常决定了工件在其工作范围内一点处的姿态范围（即灵巧工作空间）。当需要机械臂到达一个在扩大的任务空间中的特定位置时，则关节行程空间会增大，进而将会增加构型参数的范围。比如在可控路径运动，同步运动以及检测运动中，在360°～720°之间的腕部运动范围将能较好地实现功能。在装配旋转机械或者拧螺纹时，连续的末端关节旋转是必需的。

附加关节和连接件虽然有时被布置在机器人本体上，但更多情况下是在其末端执行器上，这些关节和连杆是也能够增加任务空间的专用工具。连续型机器人和可控路径机器人的运动都需要考虑能够避开奇异点的运动设置（奇异点即是指有两个或更多关节共线或者接近共线的区域），以及因此而造成的末端执行器的不稳定运动。一个通过精心控制以及工作单元布局的设计而实现的执行器可以增加有效工作空间，同时利用关键路径设置来避开奇异点区域。例如，一个标准的三轴机器人腕部有两个互成180°的奇异点，而这个角度可以通过一个能够减少奇异点的更加复杂的腕部设计增加到360°。这样的腕部被用在剪羊毛的机器人上，以达到复合、长程、连续、光滑、常速以及具有传感器反馈的设计要求。

### 3.7.2 驱动器

驱动器为机器人提供动力源。大多数机器人驱动器来源于市场上现有的组件，当然，在用于具体的项目时会做出修改以适应要求。三种最常用的驱动器分别为液压式、气动式和电磁式。

**1. 液压式驱动器**

早期的工业机器人选用的是液压式驱动器，因为它能提供非常大的作用力，并有非常可观的功率-质量比。在液压式驱动器中，能量来自于由电动机

或者发动机带动的高压流体泵，见图3.10。驱动器通常有直线气缸，旋转叶轮以及液压电动机三种。驱动控制是通过电磁阀以及一个由低功率的控制电路控制的伺服阀的开闭来实现的。液压式驱动器需要消耗大量的功率，同时快速反应的伺服阀成本也非常高。漏液以及复杂的维护也限制了液压驱动机器人的应用。

**2. 气动式驱动器**

气动式驱动器起初只应用在简单的执行装置上。通常，它们能在机械极限之内提供无级运动。这种驱动器在点到点的运动中表现尤为出色。它们简单易用且成本低。尽管有些小型驱动器可以在工厂原有气源下工作，但大量地使用这种装置需要安装昂贵的空气压缩系统。同时，气动式驱动器的能效比较低。

均衡式闭环伺服气动控制器已经研制成功，并主要被运用在一些由于安全、环境和应用场所导致电驱动不能满足设计要求的场合。DeLaval International AB Tumba 的主动式挤奶系统（Voluntary Milking System）就是一个例子。其中使用的是具有电-气混合驱动阀门关节控制的气动式驱动（见图3.11）。

**3. 电磁式驱动**

当今最常见的驱动莫过于电磁式驱动器了。

1）步进电动机。一些诸如台式胶水分配机器人之类的简单的小型机器人通常就使用永磁混合式或是可变磁阻式的步进和脉冲电动机（见图3.13）。这种机器人使用开环的位置及速度控制。它们的成本相对比较低，并且与电子驱动电路的接口比较容易实现。微步进控制可以产生10000或是更多的独立的机器关节位置。在开环步进模式下，电动机以及机器人的运动有很显著的稳定时间，而这种现象可以通过机械的或是控制算法的方式进行抑制。步进电动机的能重比比其他类型的电动机更小。有闭环控制功能的步进电动机与直流或交流的伺服电动机相似（见图3.14）。

2）永磁式直流电动机。永磁式直流换向器电动机有很多不同的类型。低成本的永磁电动机使用陶瓷（铁基）磁铁。玩具机器人和非专业机器人便常常应用这种电动机。钕铁硼由于其最强的磁性，在同等体积下往往可以产生最大的转矩和功率。

无铁心的转子式电动机通常用在小机器人上，其一般具有嵌入环氧树脂的铜导线电容，复合杯状结构或是盘状转子结构。这种电动机有很多优点，比如电感系数很低，摩擦很小，且没有嵌齿转矩。圆盘电枢式电动机也有如下优点，比如它们的总体尺寸较小。同时，由于有很多换向节，其可以产生具有低转矩的平稳输出。无铁心电枢式电动机的缺点在于热容量很低，因为其质量小同时传热的通道受到了限制。所以，在高功率工作负荷下，它们有严格的工作循环间隙限制以及被动空气散热需求。

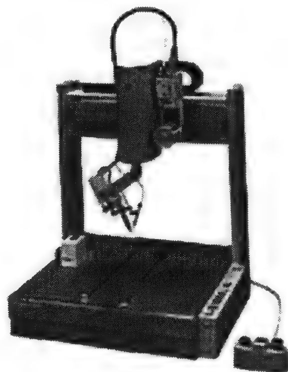


图3.13 Sony机器人使用开环永磁步进电动机

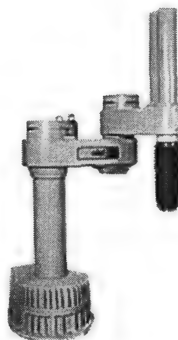


图3.14 Adept机器人使用闭环控制和可变磁阻电动机

3）无刷电动机。无刷电动机，也分交流伺服电动机或是无刷直流电动机，通常是应用在工业机器人上（见图3.15及图3.16）。这种电动机使用光学的或者磁场的传感器以及电子换向电路来代替石墨电刷以及铜条式换向器，因此可以减小摩擦、瞬间放电以及换向器的磨损。无刷电动机在低成本的条件下表现突出，主要归功于其降低了电动机的复杂性。但是，其使用的电动机的控制器要比有刷电动机的控制器更复杂，成本也要更高。无刷电动机的被动式多磁极钕磁铁转子以及铁制绕线定子聚有良好的散热性和可靠性。线性无刷电动机的功用与铺展开的回转马达相似。它们通常有一个又长又重的被动式多磁极定子和又短又轻的电子换向式绕线滑块。

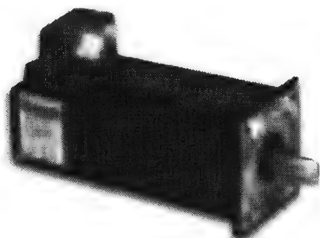


图3.15 Baldor直流伺服电动机

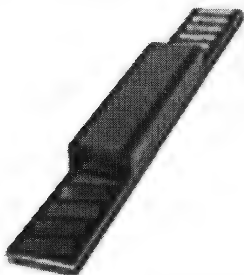


图3.16 Anorad无刷电动机

**4. 其他驱动器**

各种其他类型的驱动器也已应用于机器人。其中一个范例包括应用了热学、形状记忆合金（SMA）、金属、化学、压电、磁致伸缩、电聚合物（EPAM）、弹性容器和微机电系统（MEMS）的驱动器（见图3.17和图3.18）。大多数这些驱动器已应用于研究具有特殊应用的机器人，而不是大量生产的工业机器人。压电陶瓷驱动的机器人的一个例子是PI的压电式六足亚纳米分辨率平台系统（见图3.19）。

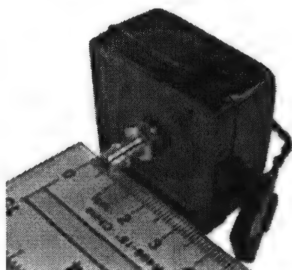


图3.17 人工肌肉EPAM电动机

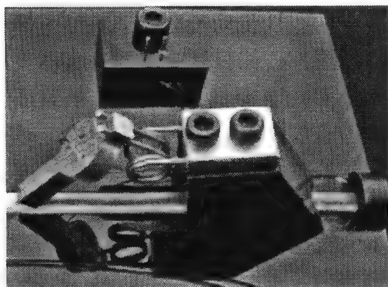


图3.18 Elliptec压电电动机



图3.19 PI的压电式六足亚纳米分辨率平台系统

### 3.7.3 变速器

传动器或传动系统的目的是将机械动力从来源转移到受载荷处。设计和选择一个机器人传动机构时，需要考虑机械装置的运动，负载和电源的要求，以及相对于关节的驱动器放置位置。在传动器设计中，首先要考虑的是传动器的刚度、效率和成本。齿隙和扭转都会影响到驱动器刚度，尤其是当机器人应用在具有连续扭转和载荷剧烈变化的场合中。高传动刚度和低齿隙或者无齿隙均会导致更多的摩擦损失。大多数机器人传动系统当工作在接近其额定功率时，具有良好的效率，但在低载荷时便不一定了。过大的传动系统会增加系统的重量、惯性和摩擦损失。不良传动系统设计会有较低的刚度，在持续的或是高负荷的工作循环下快速磨损，或者在偶然的过载下失效。

机器人的关节驱动基本上是由传动装置来实现的，它以一种高能效的方式通过关节将驱动器和机器人连杆结合起来。各种各样的传动系统形式都被实际机器人所应用。传动机构的传动比决定了驱动器到连杆的转矩、速度和惯性之间的关系。传动系统合理的布置，尺寸以及机构设计决定了机器人的刚度、质量和整体操作性能。大多数现代机器人都应用了高效的、抗过载破坏的、可反向的传动装置。

**1. 直接驱动**

直接驱动是运动学中最简单的驱动机制。对于气动或液压驱动的机器人，驱动器直接连接在连杆之间。直接驱动的电动机器人采用了高转矩、低速的电动机直接连接到连杆。直接驱动是以完全去除了空行程和平稳转矩传动系统为特点的。但是，原动件和连杆间的不良动态匹配（惯性比例）使这种传动方式）需要一个更大的、能源效益较低的驱动器。

**2. 带传动器**

直接驱动的一个变形是带驱动。薄合金钢或钛制履带被固定在驱动器轴和被驱动的连杆之间，用来产生有限的旋转或直线运动。传动装置的传动比可以高达10:1（驱动器转10圈，节点转1圈）。驱动器质

量也从节点处移开了——通常移至基座处，以减少机器人惯性和重力负荷。它相比缆绳或皮带传动而言，是一种更柔顺并且刚性更好的传动系统。

**3. 皮带传动器**

同步（齿）皮带往往应用于较小的机器人的传动机构和一些大机器人的轴上。其功能大致和带传动相同，但具有连续驱动的能力。多级（两个或三个）皮带传动有时会被用来生产大的传动比（高达100:1）。张紧力被惰轮或轴距的调整所控制。长皮带的弹性和质量可能导致驱动不稳定，从而增加机器人的稳定时间。

**4. 齿轮传动**

直齿轮或斜齿轮传动为机器人提供了可靠的、密封的、低维护成本的动力传递。它们应用于机器人手腕，在这些手腕结构中多个轴线的相交和驱动器的紧凑型布置是必需的。大直径的转盘齿轮用于大型机器人的基座关节，用以提供高的刚度来传递高转矩。齿轮传动常用于台座，而且往往与长传动轴联合，实现了驱动器和驱动关节之间的长距离动力传输。例如，驱动器和第一减速器可能被安装在肘部的附近，通过一个长的空心传动轴来驱动另一级布置在腕部的减速器或差速器（见图3.1）。

行星齿轮传动常常被应用在紧凑的齿轮马达中（见图3.20）。为了尽量减少节点齿轮驱动的齿隙游移（空程），齿轮传动系统需要具有仔细的设计、高的精度和刚性的支撑，用来产生一个不以牺牲刚度、效率和精度来实现小时隙的传动机构。机器人的齿隙游移被一些方法所控制，包括选择性装配、齿轮中心调整和专门防游移的设计。

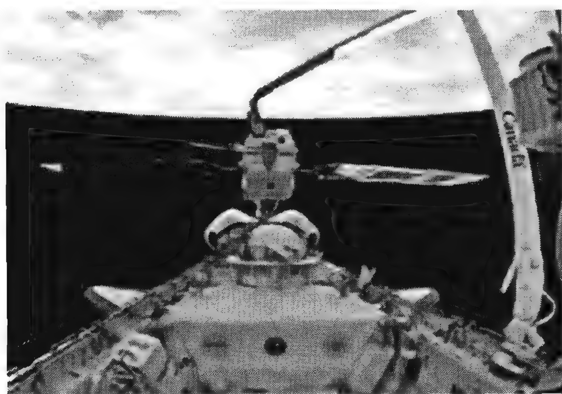


图3.20 航天飞机的机械臂具有行星齿轮驱动器

**5. 蜗轮传动**

蜗轮蜗杆传动偶尔会被应用于低速机器人。他们的特点是可以使动力正交的偏转或者平移，同时具有高的传动比，机构简单，以及具有良好的刚度和承载能力。另一方面，他们的低效率使他们在大传动比时具有反向自锁特性。这使得在没有动力时，关节会自锁在它们的位置，但另一方面，这也使它们容易在试图手动改变机器人位置的过程中被损坏。

**6. 专用传动装置**

专用传动装置被广泛应用于标准工业机器人。谐波传动和旋转矢量（RV）传动器就是两个例子，它们具有紧凑、低齿隙滑移、高转矩传递能力等特点，同时，其使用了特殊齿轮、凸轮和轴承（见图3.21和图3.22）。

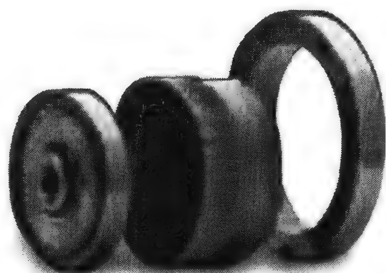


图3.21 谐波传动

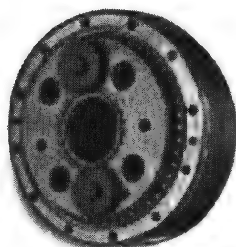


图3.22 Nabtesco旋转矢量传动器

谐波传动器常用在中小型机器人上。这些传动器具有较低的齿隙滑移，但柔轮齿圈在反转运动时会导致弹性翘曲和低的刚度。旋转矢量传动器通常被应用于大型的机器人，特别是受超载和冲击负荷的那些机器人。

**7. 线性传动器**

直接驱动的线性传动器合并了直线电动机与一个直线轴。这种联系往往只是驱动器和机器人连杆之间的一个刚性或柔性连接。另外，一个由直线电动机和其导轨组成的总成被直接连接到线性轴上。直接线性电磁驱动器的特点是：零齿隙滑移，高刚度，高的速度和优良的性能，但是其质量也较大，效率低，成本比其他类型的线性驱动器更高。

**8. 滚珠丝杠**

滚珠丝杠的线性传动器有效和平顺地将原动件的

旋转运动变成直线运动。通常情况下，循环球螺母通过与平面和硬化合金钢丝杠的配合来将旋转运动转换成直线运动。滚珠丝杠可以很容易地与线性轴匹配。紧凑型驱动器/传动系统总成，以及其为了客户组装而设计的零件都已经实现。刚度对短距的和中距的行程比较好，但由于丝杠只能在两端被制成，所以它在长行程中的刚度并不好。通过精确的丝杠可以获得很低或为零的齿隙。运行速度被丝杠的力学稳定性所制约，所以采用旋转螺母的方式可以获得更高的速度。低成本机器人可使用普通丝杠传动装置，它的特点是在光滑的轧制丝杠上采用有热塑性塑料的螺母。

**9. 齿条和齿轮传动系**

这些传统的传动部分在直线，甚至弯曲的导轨上对长距离运动是有益的。刚度是由齿轮/齿条连接处和独立行程长度决定的。齿隙滑移可能难以控制，因为在整个行程长度中控制齿条到齿轮中心的公差。双齿轮驱动有时被用来供主动的预紧力，从而消除齿隙滑移。由于较低的传动比，有效力普遍低于丝杠传动系。小直径（低齿数）齿轮的重合度较低，因而易造成振动。渐开线齿面齿轮需要润滑油来减少磨损。这些列出的台式传动系统经常被应用于大型龙门式机器人和轨道式机器人（见图3.23）。

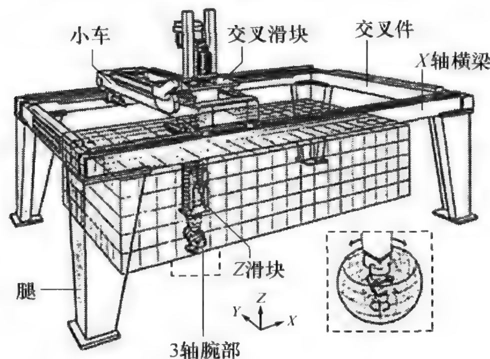



图3.23　NASA龙门式机器人

**10. 其他传动系统组件**

一些其他机械部件的例子，如花键轴，运动间的连接件（四连杆，曲柄滑块机构等），腱绳，柔性联轴器，离合器，制动器，以及限位装置，它们都被用于机器人传动系统中（见图3.8）。Yaskawa Robot-World的装配和过程自动化机器人是由磁力所悬置，在一个两自由度的平面空气轴承上移动，同时采用直接驱动平面电磁马达，并且内部没有运动部件（见图3.12）。

## 3.8　机器人的性能

工业机器人的性能往往用功能运行情况和循环时间来体现。对装配机器人来说，这种评价标准往往是依据每分钟所完成的取放循环次数。弧焊机器人往往被设定了一个缓慢的焊接模式和摆动速度，以及一个快的再定位速度。对于涂装机器人，附着或覆盖的比率和喷雾模式下的速度是很重要的。机器人的峰值速度和加速度列表数据一般只是计算量，由于在机器人移动过程中产生的外形的变化而带来了动态的（惯性）和静态的（重力）耦合，因而其峰值加速度和速度会在工作过程中有所变化。

### 3.8.1　机器人速度

最大的关节速度（角速度或线速度）并不是一个独立的值。对于更长距离的运动，它往往被伺服电动机的总线电压或最大允许的电动机转速所限制。对于大加速度机器人，甚至短的点对点的运动也可能有速度限制。对于低加速机器人，仅仅总体的运动有速度限制。对于大型机器人，典型的末端执行器峰值速度可高达20m/s。

### 3.8.2　机器人加速度

在大多数现代的机械手中，因为和机械臂的质量相比，有效载荷的质量较小，因而更多的动力是被用于加速机器人而不是其负载。加速度既影响总体运动时间，也影响运行周期时间（总体运动时间加稳定时间）。能够承受更大加速度的机械臂往往是刚性更好的机械臂。在高性能机械臂上，比起速度或负载能力来说，加速和稳定时间是更重要的设计参数。对于一些装配和物料装卸的机器人而言，其最大加速度比小有效载荷超过了10g。

### 3.8.3　重复性

这个参量代表了执行器多次返回到同一个位置的能力。由于不同的执行器运行程序设计的影响，大多数制造商更倾向于以一个他们自己定义的参量来评价重复性。这个参量是指，从同样的初始位置开始，采用同样的程序，载荷和安装设定，机械臂能够回到初始位置时的有效运行球形空间的半径。这一空间可能不包括的目标点，因为计算误差、简化的校正、精度的限制、示教和执行模式的不同可能会比摩擦、未解除的关节和传动系空程、伺服系统增益以及结构和机械装配过程中的空隙导致更大的误差。设计者必须认

真考虑所需的重复性评价参量。当进行重复的工作，如盲装配或机器载入时，重复性便非常重要。典型重复性参数的范围从对于大型电焊机器人的1~2mm到对于精确机器人的0.005mm（5μm）。

### 3.8.4 分辨率

这个参数代表的是能够由执行器完成的最小增量距离。在传感器控制的机器人运动和精确定位中，分辨率是很重要的。尽管大多数制造商依据关节位置编码器的分辨率，或伺服电动机和传动装置的步长来计算系统的分辨率，但这是一种误导，因为系统摩擦、扭曲、齿隙游移和运动的配置都影响着系统分辨率。典型的编码器或解析器的分辨率是全轴或节点行程的$10^{14}$~$10^{25}$分之一，但实际物理分辨率可能是介于0.001~0.5mm。多节点串联连接机械臂的有效分辨率不如其单个关节。

### 3.8.5 精度

这个参数代表的是机器人在空间内，将其执行装置定位到程序设定位置的能力。机器人的准确性对于非重复型的任务非常重要，这些任务既可能被数据库中的程序所设定，也可以是一种在安装时已经预设好的，对于可控的变化进行处理的“示教任务”。精度是一个手臂关于运动学模型精确度（节点类型、连杆长度、关节之间的角度，以及所有对于连杆或节点在负载下挠度的核算等），空间、工具、夹具模型的精度，以及机械臂方案解决路径的完整性和准确性的函数。虽然大多数更高级的机器人编程语言支持机械臂解决方案，这些解决方案通常只是建立在简化的刚性结构模型的基础上。因此，机器人精度便成为了一个匹配机器人几何学特性和机器人解决方案的问题，其中，我们需要精确地测量和校准连杆长度、关节角度和安装位置。

典型的工业机器人精度范围从具有低级计算机模型的非标定执行器的±10mm，到精确的机械工具执行器的±0.01mm，此执行器包含了具有精确动态模型和解决方案的控制器、精准的制造工艺，以及动态测量元件。

### 3.8.6 组件寿命与占空比

一个电动机器人中，有最大的失败问题的三个组件是驱动器（伺服电动机）、传动装置以及电源和信号电缆。平均故障间隔时间（MTBF）应至少在2000h，而最好在主要部件所计划的保养维护之间至少有5000个运行h。

最坏情况下的运动周期被假定为用最新机器人装置完成一般性的重复任务。装配机器人的小行程设计循环寿命（小于5%的关节行程范围）应该达到20~100万次完整的双向循环。大行程循环寿命（大于50%的关节最大行程范围）应通常是5~40万次。

短期的满负荷工作往往被传动系统的最大载荷所限制；而长期、持续的工作性能则被电动机发热所限制。对于某一个期望的占空比进行设计，而不是平等程度的同时追求短期和长期性能，可以节约成本和改进性能。这种方案允许我们使用更小、惯性更低、质量更轻的电动机。工业机器人通常在达到设计循环寿命之前就已经因为过时而被替换。

### 3.8.7 碰撞

在工作中，意外或突发情况可能偶尔会产生碰撞，涉及机械臂及其工具、工件或工作空间内的其他物体。这些事故可能会导致各种程度的破坏，其破坏的程度在很大一部分取决于机械臂的设计。如果在这类事故中的时间成本和费用损失很大，那么抵抗碰撞的设计方案就应在设计过程中尽早考虑。由事故造成的典型损害包括齿轮或轴的折断或剪切失效，连杆结构的凹陷或弯曲，齿轮的滑动或轴的窜动，电线、腱绳或者软管的断裂，严重磨损或变形，以及连接器，配件，限位器或开关的损坏。柔性的原件，如超载（滑动）离合器，弹性元件和带软垫的表面可以被用来减少发生碰撞的冲击负荷，从而帮助解耦或这在这类碰撞中隔离驱动器和传动系统。

## 3.9 结论与扩展阅读

机器人的机械设计是一个反复的过程，涉及工程、技术和应用的具体因素的评价和选择。最后的设计方案应反映出对于设计任务的详细要求的仔细考虑，而不是仅仅的广义规范。对于这些设计要求的正确的定义和理解是实现设计目标的一个关键因素。

设计和选择具体的组成部分涉及权衡的考虑。纯静态的，刚体机器人的设计是经常被应用的，但其并不总是充分的。机械系统的刚度、固有频率、控制系统的兼容性，以及期望的机器人应用和安装要求都必须加以考虑。

关于构成机器人系统核心的机构和原动件设计还有许多其他文献。其中一个著名并且正在使用的机器人设计参考资料是Rivin［3.44］。

Craig[3.6]和Tsai[3.9]提供了机器人的机械结构与

其工作空间和机械增益的数学关系。Sclater 和 Chironis[3.48]是对于多种有效的应用装置的宝贵汇编的一次再版，比如关节传动系统和传动装置。McCartney[3.34]包括了设计特定机构的几何技术。

Juvinall 和 Marshek[3.45]，以及 Shigley 和 Mishke[3.46,47]是关于像连杆结构、轴承，以及传动系统这样结构的设计的重要参考资料，而这些都对机器人系统的机械性能效率起到了至关重要的作用。

虽然许多设计决策可以通过应用简单直接的算法和公式获得，但是许多其他重要的因素使得机器人设计成为了一个需要良好的工程判断力的挑战。

## 参考文献


3.1 D.T. Greenwood: *Classical Dynamics* (Prentice-Hall, Upper Saddle River 1977)

3.2 F.C. Moon: *Applied Dynamics* (Wiley-Interscience, New York 1998)

3.3 S.-M. Song, K.J. Waldron: *Machines that Walk: The Adaptive Suspension Vehicle* (MIT Press, Cambridge 1988)

3.4 M.T. Mason, J.K. Salisbury: *Robot Hands and the Mechanics of Manipulation* (MIT Press, Cambridge 1985)

3.5 R.P. Paul: *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control* (MIT Press, Cambridge 1981)

3.6 J.J. Craig: *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (Addison-Wesley, Publ., Reading 1989)

3.7 O. Bottema, B. Roth: *Theoretical Kinematics* (North-Holland, New York 1979), (reprinted by Dover, New York)

3.8 J.M. McCarthy: *An Introduction to Theoretical Kinematics* (MIT Press, Cambridge 1990)

3.9 L.W. Tsai: *Robot Analysis, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* (Wiley, New York 1999)

3.10 T. Lozano-Perez: Spatial Planning: A configuration space approach, IEEE Trans. Comput. **32**(2), 108–120 (1983)

3.11 J.C. Latombe: *Robot Motion Planning* (Kluwer Academic, Boston 1991)

3.12 R. Vijaykumar, K. Waldron, M.J. Tsai: Geometric optimization of manipulator structures for working volume and dexterity. In: *Kinematics of Robot Manipulators*, ed. by J.M. McCarthy (MIT Press, Cambridge 1987) pp. 99–111

3.13 K. Gupta: On the nature of robot workspace. In: *Kinematics of Robot Manipulators*, ed. by J.M. McCarthy (MIT Press, Cambridge 1987) pp. 120–129

3.14 I. Chen, J. Burdick: Determining task optimal modular robot assembly configurations, Proc. IEEE Robot. Autom. Conf. (1995) pp. 132–137

3.15 P. Chedmail, E. Ramstei: Robot mechanisms synthesis and genetic algorithms, Proc. IEEE Robot. Autom. Conf. (1996) pp. 3466–3471

3.16 P. Chedmail: Optimization of multi-DOF mechanisms. In: *Computational Methods in Mechanical Systems*, ed. by J. Angeles, E. Zakhariev (Springer, Berlin 1998), pp. 97–129

3.17 C. Leger, J. Bares: Automated Synthesis and Optimization of Robot Configurations, CD-ROM Proc. ASME DETC'98 (Atlanta 1998), paper no. DETC98/Mech-5945

3.18 F.C. Park: Distance metrics on the rigid body motions with applications to mechanism design, ASME J. Mech. Des. **117**(1), 48–54 (1995)

3.19 J.M.R. Martinez, J. Duffy: On the metrics of rigid body displacements for infinite and finite bodies, ASME J. Mech. Des. **117**(1), 41–47 (1995)

3.20 M. Zefran, V. Kumar, C. Croke: Choice of Riemannian metrics for rigid body kinematics, CD-ROM Proc. ASME DETC'96 (Irvine 1996), paper no. DETC96/Mech-1148

3.21 Q. Lin, J.W. Burdick: On well-defined kinematic metric functions, Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco 2000) pp. 170–177

3.22 C. Gosseli: On the design of efficient parallel mechanisms. In: *Computational Methods in Mechanical Systems*, ed. by J. Angeles, E. Zakhariev (Springer, Berlin, Heidelberg 1998), pp.68–96

3.23 J.V. Albro, G.A. Sohl, J.E. Bobrow, F. Park: On the computation of optimal high-dives, Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco 2000) pp. 3959–3964

3.24 G.E. Shilov: *An Introduction to the Theory of Linear Spaces* (Dover, New York 1974)

3.25 J.K. Salisbury, J.J. Craig: Articulated hands: Force control and kinematic issues, Int. J. Robot. Res. **1**(1), 4–17 (1982)

3.26 J. Angeles, C.S. Lopez-Cajun: Kinematic isotropy and the conditioning index of serial manipulators, Int. J. Robot. Res. **11**(6), 560–571 (1992)

3.27 J. Angeles, D. Chabla: On isotropic sets of points in the plane. Application to the design of robot architectures. In: *Advances in Robot Kinematics*, ed. by J. Lenarčič, M.M. Stanišić (Kluwer Academic, Dordrecht 2000) pp. 73–82

3.28 E.F. Fichter: A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction. In: *Kinematics of Robot Manipulators*, ed. by J.M. McCarthy (MIT Press, Cambridge 1987) pp. 165–190

3.29 J.P. Merlet: *Parallel Robots* (Kluwer Academic, Dordrecht 1999)

3.30 J.M. Hervé: Analyse structurelle des méchanismes par groupe des déplacements, Mechanism Machine Theory **13**(4), 437–450 (1978)

3.31 J.M. Hervé: The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design, Mechanism Machine Theory **34**, 719–730 (1999)

3.32 A.P. Murray, F. Pierrot, P. Dauchez, J.M. McCarthy: A planar quaternion approach to the kinematic synthesis of a parallel manipulator, Robotica **15**(4), 361–365 (1997)

3.33 A. Murray, M. Hanchak: Kinematic synthesis of planar platforms with RPR, PRR, and RRR chains. In: *Advances in Robot Kinematics*, ed. by J. Lenarčič, M.M. Stanišić (Kluwer Academic, Dordrecht 2000) pp. 119–126

3.34 J.M. McCarthy: *Geometric Design of Linkages* (Springer, Berlin, Heidelberg 2000)

3.35 V. Kumar: Instantaneous kinematics of parallel-chain robotic mechanisms, J. Mech. Des. **114**(3),

349–358 (1992)
3.36 C. Gosselin, J. Angeles: The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator, ASME J. Mech. Transmiss. Autom. Des. **110**(3), 35–41 (1988)
3.37 J. Lee, J. Duffy, M. Keler: The optimum quality index for the stability of in-parallel planar platform devices, CD-ROM Proc. 1996 ASME Design Engineering Technical Conferences (Irvine 1996), 96-DETC/MECH-1135
3.38 J. Lee, J. Duffy, K. Hunt: A practical quality index based on the octahedral manipulator, Int. J. Robot. Res. **17**(10), 1081–1090 (1998)
3.39 S.E. Salcudean, L. Stocco: Isotropy and actuator optimization in haptic interface design, Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco 2000) pp. 763–769
3.40 L.-W. Tsai, S. Joshi: Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator, J. Mech. Des. **122**, 439–446 (2000)
3.41 Q. Jin, T.-L. Yang: Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators, J. Mech. Des. **126**(3), 625–639 (2004)
3.42 X. Kong, C.M. Gosselin: Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators, Int. J. Robot. Res. **23**, 237–245 (2004)
3.43 T.A. Hess-Coelho: Topological synthesis of a parallel wrist mechanism, J. Mech. Des. **128**(1), 230–235 (2006)
3.44 E.I. Rivin: *Mechanical Design of Robots* (McGraw-Hill, New York 1988) p. 368
3.45 R.C. Juvinall, K.M. Marshek: *Fundamentals of Machine Component Design*, 4th edn. (Wiley, New York 2005) p. 832
3.46 J.E. Shigley, C.R. Mischke: *Mechanical Engineering Design*, 7th edn. (McGraw-Hill, Upper Saddle River 2004) p. 1056
3.47 J.E. Shigley, C.R. Mischke: *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd edn. (McGraw-Hill, Upper Saddle River 1996) p. 1700
3.48 N. Sclater, N. Chironis: *Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*, 4th edn. (McGraw Hill, Upper Saddle River 2007) p. 512
3.49 J.P. Trevelyan: Sensing and control for shearing robots, IEEE Trans. Robot. Autom. **5**(6), 716–727 (1989)
3.50 J.P. Trevelyan, P.D. Kovesi, M. Ong, D. Elford: ET: A wrist mechanism without singulat positions, Int. J. Robot. Res. **4**(4), 71–85 (1986)

# 第 4 章　传感与估计

Henrik I. Christensen，Gregory D. Hager
伍小军　译

传感与估计是任何机器人系统设计的核心。在底层，反馈控制必须要估计机器人自身的状态。在高层，传感，此处定义为以任务为导向的传感器数据解释，可以在空间和时间领域融合传感器信息来促进规划。

本章概述了在机器人领域广泛应用的常见传感和估计方法。本章内容按照过程模型来组织，包括传感，特征提取，数据关联，参数估计和模型整合。本章介绍和描述了几种常用的传感模式的特征，并讨论线性和非线性系统中常见的估计方法，包括统计学估计、凯尔曼滤波和采样法。本章也简单介绍了鲁棒估计的策略。最后介绍几种常用的估计表示法。



如果有一个完整的环境模型，并且机器人促动器能够相对于该模型完美地执行运动指令，那么控制机器人系统将变得相对简单。很遗憾的是，大多数时候完整的环境模型并不具备，机械构造的理想控制也从来都不现实。在这种情况下，传感和估计方法被用来弥补完整信息的缺失。它们的功能就是提供环境和机器人系统的状态信息，作为控制，决策以及与环境中其他单元（例如人）进行交互的基础。

为便于讨论，我们区分用于还原机器人自身状态的传感和估计为“本体感受”，并区分用于还原外部世界状态的传感和估计为“外感受”。在实际应用中，绝大多数机器人系统设计有本体感受来估计和控制自身的物理状态。另一方面，通过传感器数据来还原外部环境状态通常是一个更广泛也更复杂的问题。

早期的机器人计算感知研究假定我们可以复原出一个完整通用的环境模型，并用它来进行决策和驱动，参见参考文献［4.1］中的范例。最近，该方法已经很明显地不切实际了。事实上，考虑到基于传感器的机器人已经出现在各种领域，例如移动监控、高性能操作和医疗介入，对于一个给定的系统，适合的传感和估计很明显高度依赖于系统的任务。因此，此处的讨论按照以任务为导向的外部世界传感和估计来组织。

传感和估计可被视为一个将物理数量转换为可用于进一步处理的计算机表达的过程。因此传感与将物理存在转换为可被计算机处理的信号的转换器紧密关联。传感也与感知，即在以任务为导向的环境模型中表征传感器信息这一过程，密切相关。然而，传感器数据通常以不同的方式损坏，导致该过程更加复杂。举例而言，转换器环节产生统计学噪声，数字化过程中引入离散化，传感器选择不良引入模糊量等。因此引入估计方法来支持将信息恰当地融合进环境模型，并提高信噪比。

本章介绍传感与估计的通用特征，而本手册的第3篇提供了部分更深入的主题内容。本章4.1节介绍传感/估计的总体过程。4.2节介绍不同种类的传感器以及它们的关键特性。4.3节讨论环境表征的估计，可利用包括参数化和非参数化途径在内的多种不同方法。4.4节描述多种环境表征方法，适用于基于模型的信息融合。

## 4.1 感知过程

感知过程的输入通常有两种，①来源于各种传感器/转换器的数字信号，②不完整的环境模型（世界模型），包含机器人和外部世界中其他相关实体的状态信息。传感器数据本身可以是多种不同的格式，例如标量或者是基于时序 $x(t)$ 获取的向量 $\boldsymbol{x}(\alpha, \beta)$，扫描量 $x_t(\theta_i)$，向量场 $x$ 或者三维容积 $x(\rho, \theta, \phi)$。在许多情况下，系统必须融合来自多个传感器的数据，例如，估计移动机器人的位置需要融合来自于转轴编码器、视觉系统、全球定位系统（GPS）和惯性传感器的数据。

为进一步组织本章讨论，我们采用如图4.1所示的感知过程通用模型。在该模型中，包括了适用于利用世界模型融合传感器数据的最常用操作。针对所讨论的任务，某些模块可能缺席，而另外一些模块自身可能包含复杂的结构。但是，所提供的模型足以用来解释传感与预测中的许多问题。接下来本节将通过一个移动机器人定位的范例来解释这个模型。

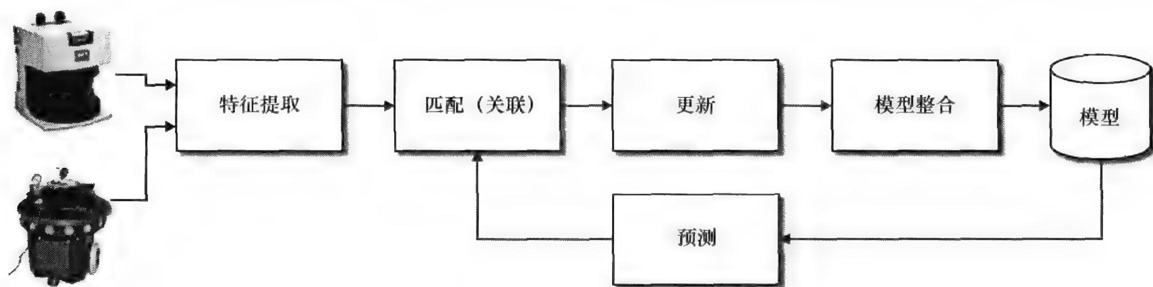



图4.1 本章所讨论的感知过程范例

传感器处理的初始问题是数据预处理和特征提取。预处理的目的是降低转换器的噪声，移除任何系统化误差，优化数据的相关属性。在某些情况下，传感器信息需要在时域或空域进行校准以进行下一步的融合。有很多种方式可用来预处理数据，以优化或者提取特征用于数据融合。常用的一种方法是模型匹配，如图4.2中所示的激光扫描仪。一旦传感器信息可用，通常需要将数据与已有的模型进行匹配（见图4.3）。该模型可能基于一个预知的结构（例如，环境的一个计算机辅助设计（CAD）模型），或者由之前获取的数据所建立。数据关联方法通常用于估计传感器数据与环境模型之间的关系。在我们的移动机

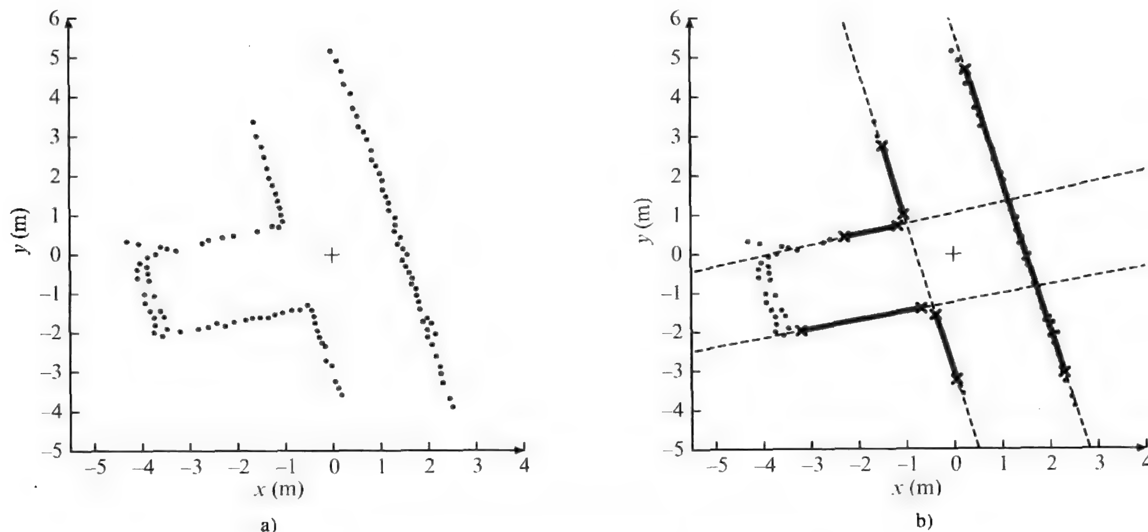



图4.2 从激光扫描进行特征提取的范例（参考文献［4.2］）

器人定位范例中，所提取的直线特征与一个多边形世界模型相匹配。该匹配过程可经由几种不同的方式进行，但是总体上，它是一个以最大化特征与模型之间的校准为目标的优化问题。

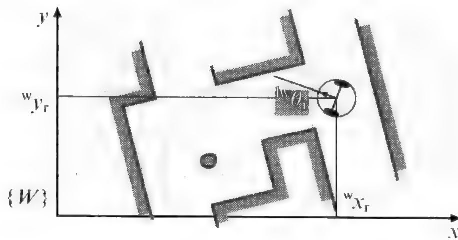



图4.3　用于移动机器人定位的环境模型范例（参考文献［4.2］）

一旦传感器数据与世界模型匹配之后，可利用传感器数据所包含的信息来更新模型。在上述范例中，机器人相对于世界模型的方向和位置可通过匹配的直线段来更新如图4.4所示。

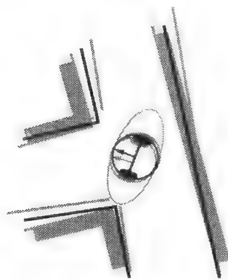


图4.4　估计移动机器人实例的位置和方向（参考文献［4.2］）

最后，设计一个动态系统模型来模拟待估计的相关状态是有可能的。通过这样的系统模型，在获取到新的传感器数据之前预测环境随时间的变化是可能的。该方法可用于前馈型预测过程，并可以反过来简化新的传感器读数的数据关联，见图4.1。

下面我们将详细讨论感知过程的每一个步骤。

## 4.2　传感器

根据测量的对象以及如何测量，有很多种方式来对传感器进行归类。如前所述，本体感受传感器用来测量机器人的内部状态，包括具有不同自由度的位置、温度、关键部件的电压、电动机电流、促动器受力等等。在另一方面，外感受传感器生成外部环境的有关信息，例如与某物体的距离、相互作用力、组织的密度等。

传感器也可以区分为被动或者是主动类型。总体上，主动型传感器将能量释放到环境中，并基于反应来测量环境属性。被动型传感器则不会主动测量。由于主动型传感器对被测信号施加某种控制，所以它们通常比被动型传感器更具鲁棒性。例如，执行特征匹配以进行三角化时，被动型立体相机系统必须依赖于所观察表面的外观（见第22章），然而结构光系统将某种模式光投射入场景，因此对场景的特征不是很敏感。即使如此，所发射信号的吸收、散射或者干扰会影响主动型传感器的性能。

本体感受传感器通常是被动型，用来测量机器人的物理属性，例如关节位置、速度，或者加速度、马达扭矩等。另一方面，外感受传感器可进一步划分为接触式传感型和非接触式传感型。接触式传感器通常与本体感受所使用的传感器是同一类型，而非接触式传感器包含绝大多数以一定距离估计物理属性的传感类型，包括强度、范围、方向、尺寸等。

表4.1列出了按照使用方法和典型应用对典型传感器进行的分类。有关传感方法，传感器特征和常见应用的更多细节可以在诸如现代传感器手册[4.3]和本手册第3篇找到。

表4.1　根据传感对象（本体感受（PC）/外感受（EC））和使用方法（主动式/被动式）对机器人常用传感器的分类

| 分　类 | 传感器类型 | 传感方式 | 主动（A）/被动（P） |
|---|---|---|---|
| 触压式传感器 | 开关/缓冲器 | EC | P |
| | 光垒 | EC | A |
| | 近程传感器 | EC | P/A |
| 触觉传感器 | 接触矩阵 | EC | P |
| | 力/扭矩 | PC/EC | P |
| | 阻抗式传感器 | EC | P |

（续）

| 分　类 | 传感器类型 | 传感方式 | 主动（A）/被动（P） |
|---|---|---|---|
| 马达/转轴传感器 | 电刷编码器 | PC | P |
| | 电压计 | PC | P |
| | 分解器 | PC | A |
| | 光学编码器 | PC | A |
| | 磁性编码器 | PC | A |
| | 电感式编码器 | PC | A |
| | 电容式编码器 | EC | A |
| 方位传感器 | 指南针 | EC | P |
| | 陀螺仪 | PC | P |
| | 倾斜仪 | EC | A/P |
| 基于信标的传感器（相对于某惯性坐标系的位置） | GPS | EC | A |
| | 主动式光学传感器 | EC | A |
| | RF 信标 | EC | A |
| | 超声信标 | EC | A |
| | 反射式信标 | EC | A |
| 范围传感器 | 电容式传感器 | EC | P |
| | 磁性传感器 | EC | P/A |
| | 相机 | EC | P/A |
| | 声呐 | EC | A |
| | 激光测距仪 | EC | A |
| | 结构光 | EC | A |
| 速度/运动传感器 | 多普勒雷达 | EC | A |
| | 多普勒声波 | EC | A |
| | 相机 | EC | P |
| | 加速计 | EC | P |
| 识别传感器 | 相机 | EC | P |
| | 无线射频识别（RFID） | EC | A |
| | 激光测距仪 | EC | A |
| | 雷达 | EC | A |
| | 超声 | EC | A |
| | 声波 | EC | A |

旋转运动的估计是控制机械手和估计移动系统自主运动的基础。测量旋转运动最常见的传感器是正交编码器。它由一个透明盘片组成，具备两种异相的周期性模态，如图4.5所示。通过计数器，可以直接计算位移和方向（图4.5中传感器A和B之间的相位）。而且，盘片外边缘通常刻有小洞来提供标引（规定零位）。图案的密度决定测量的解析度。将该传感器安装至马达减速齿轮的上游，精确度可轻易超过1/1000°。

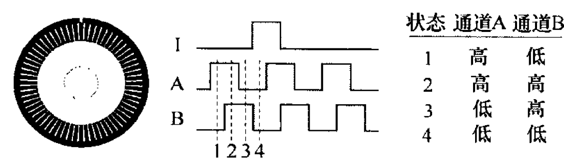
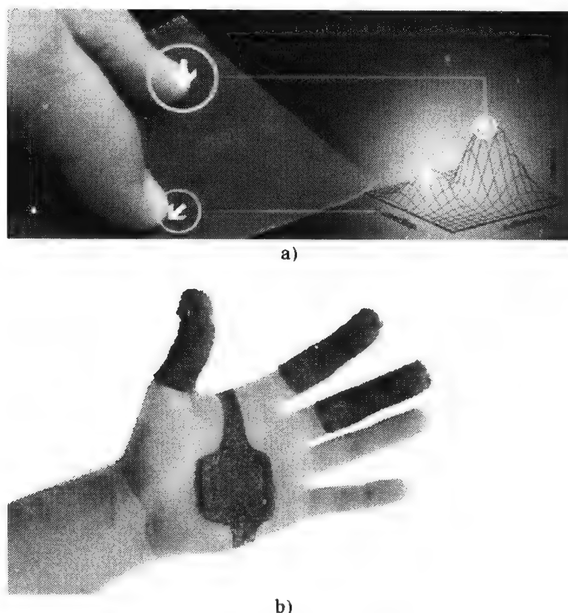



图4.5　正交编码器盘片图，以及光侦测器在两种模式下的输出（相应的状态变化示于图右侧）

末端执行器处的受力和扭矩可以采用压电单元来估计。这些单元产生的电压值与引入的变形量成正比。通过谨慎地布置传感器，可同时测量受力和扭矩。这种传感器用于机器人操纵中估计应力和接触，

作为装配系统的一部分，除飞边等，也用于医疗领域。市面上的力/扭矩传感器有着各种尺寸和动态范围，包括新型的可安装在不同末端执行器上的灵活阵列传感器（见图4.6）。力传感器的潜在问题是初始接触存在不工作区，以及基本传感环节产生干扰信号，需要通过信号处理来清除。



a)

b)

**图4.6 灵活阵列传感器**

a）触觉阵列（由 Pressure Profile Systems 公司所生产的一种灵活的电容性接触式传感器阵列，适用于滑动状态下的接触位置和区域传感） b）触觉阵列传感器可以舒服的戴在人手或者机器人手上（Pressure Profile Systems 公司许可提供）

自主运动的估计是几乎所有机器人系统的重要一环。为此，可应用惯性测量单元（IMU）。IMU 通常包括加速度计和陀螺仪。加速度计对各种类型的加速度都敏感，意味着可一起测量平动和转动（离心力）。IMU 单元可以估计旋转和平动，可通过二重积分来估计系统的速度、方位和位置，参见参考文献[4.4] 中的范例。IMU 使用中存在的一个问题是需要进行二重积分。小的偏移和干扰可造成最终结果的严重偏离，因此需要详细的传感器模型，并对传感器进行谨慎矫正和特征识别。图4.7 给出了行驶于沙土路面的汽车上所装配的十字弓形 DMU-6x 型单元的数据范例。

最早期的移动机器人、水下机器人以及某些医疗机器人的研究依赖于超声测距。通用的此类传感器常被称为声波导航与测距仪（声呐）。一般原理是系统

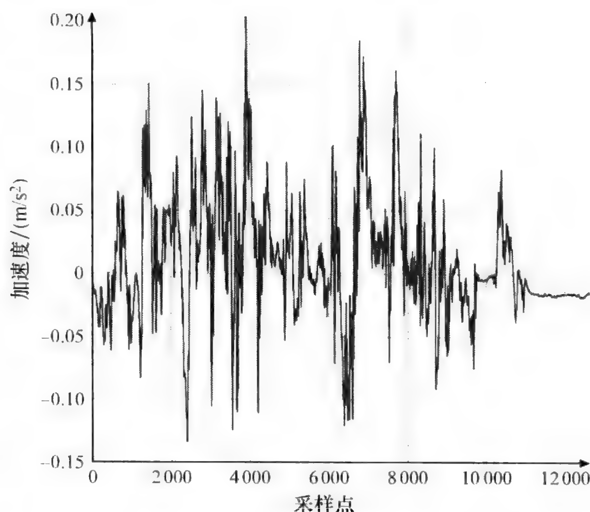



**图4.7 用于沙土路面驾驶的 IMU 单元的数据范例**

释放出声波脉冲，并等待其碰到环境中的物体之后反弹回来。已知介质中的传递速度和声波传递所用的时间，可以计算出距离。因为这种低成本的传感器可以提供适中的性能，所以该方法广泛应用于早期机器人。目前，声呐仍然是水下机器人采用的主要传感器类型。第21章将详细讨论这种传感器。

近期的机器人进展，特别是环境模拟和导航，在许多方面都归功于低成本高灵敏度激光扫描系统的出现。SICK 系列激光扫描仪属于渡越时间型扫描仪。扫描仪放出光脉冲，并测量返回所需时间，如图4.8 所示。在厘米或者毫米级精确度下，标准扫描仪测量距离可高达80m。扫描仪在一个平面上以0.5°~1°的角分辨率测量距离。可视角度180°，产生181~361次测量。均匀分布干扰会污染传感器数据，这一点在特征识别或者将数据融合为原始传感器地图时必须加以考虑。




**图4.8 广泛用于移动机器人的激光测距传感器示例（SICK LMS291）**

对传感和估计来说，图像传感器是丰富的信息来源。图像传感器有多种不同的配置，例如不同的几何成像、图像解析度、传感器技术以及传感频谱。大部分读者一定都很熟悉传统的3CCD透视彩色相机。该设备含有3组电荷耦合探测器（CCD）阵列，分别接受对应人眼视觉的红、绿和蓝色的可见光谱部分。更常见且较便宜的一种替代设备称为单芯片CCD相机。该设备采用一组空间特别排列的滤色镜，通称为拜尔滤镜，因它的发明人布赖斯·拜尔而得名。滤镜组再进一步处理（称为去马赛克处理），以提供每一个像素点的色彩信息。

在美国，根据为电视信号模拟传输制定的NTSC标准，图像传感器传统上包含480行，每行640个像素点。对应的欧洲标准PAL包含576线，每线768个像素点。最近，数字式接口的演化，例如IEEE 1394和USB 2.0已经允许相机系统的解析度达到百万像素的范围。与此同时，成本较低廉的红外（IR）和紫外光（UV）照相机也出现了，因此可以开发更高等的多谱段图像处理系统。

传统图像传感器含有一个光学系统，将光汇聚在一个平面图像阵列上。大多数时候，该系统可以用经典的针孔相机模型（见图4.9）来模拟。给定欧几里德空间中的一个点$(x, y, z)^T$，对应的照相机像素坐标$(u, v)^T$为

$$(u-u_c)=\frac{f}{s_x}\frac{x}{z}$$

$$(v-v_c)=\frac{f}{s_y}\frac{y}{z} \tag{4.1}$$

式中，$f$是镜头系统的焦距；$u_c$和$v_c$是投影中心点的像素坐标；$s_x$和$s_y$是图像阵列上单个像素点的尺寸。实际应用中，这些模型也可用低阶图像失真模型来加以补充。对于一个给定的相机系统，这些参数值可通过多种试验方法来确定[4.5]。

将传统的透视相机与反光镜组合成所谓的反射折射光学系统，生成的图像几何可将宽度达半球体的视野映射至单幅图像。该系统有很多用处，譬如监控系统，该系统的几何属性可为移动导航提供稳定的定位参考[4.6]。图4.10给出了一幅图像示例，以及该图像映射到圆柱体表面所生成的图像。

上述讨论涉及最常用的机器人传感设备。在特定的应用中会用到很多专用传感器，它们在制药（第52章）领域、超声、X射线、计算机断层扫描和磁共振成像中被广泛应用；在矿坑制图中使用穿地雷达[4.7]。水下机器人利用多种声学传感

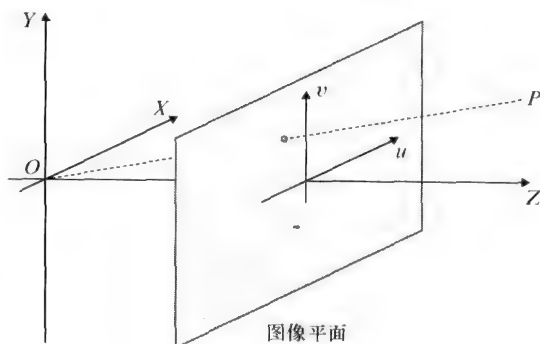



图4.9 针孔相机模型

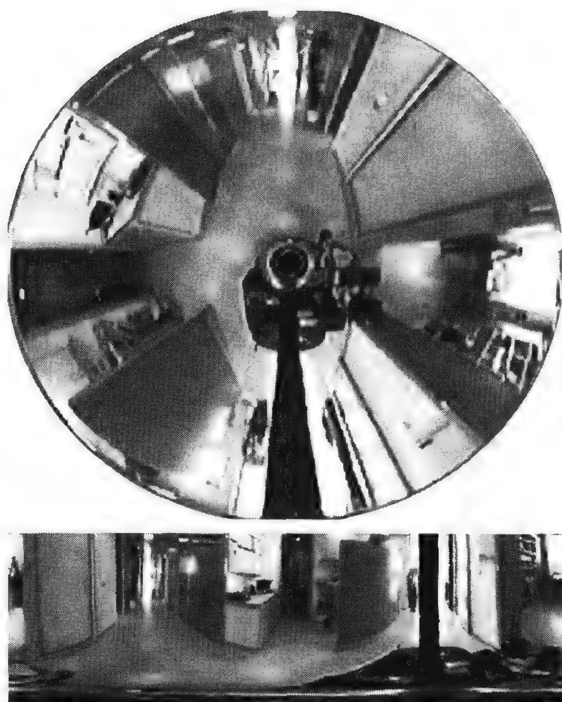


图4.10 反射折射图像和将其映射到圆柱体表面生成的图像

器。关于这些更具有目标指向性的传感形式的更深层讨论，可以参考本手册第3篇的应用章节。

## 4.3 估计过程

简介部分提到可用多种不同的方法对来自传感器的信息进行综合。哪一种方法更适合很大程度上依赖于对环境的事先了解程度，何种信息是当前任务所必需的，以及哪种模型更适合传感系统。常见方法包括

基于表决的简单方法，参数型和非参数型统计估计法，模糊逻辑系统和 Dempster-Shafer 证据理论。

为说明这一点，让我们再考虑 4.1 节介绍的机器人定位问题。如果一开始对环境一无所知，机器人可能接收激光扫描信号并试图用直线段来产生初始环境模型。因为事先一无所知，系统必须估计线段的数量、线段与数据观测值之间的数据关联以及线段本身的参数。这个问题具有挑战性，可采用简单表决技术求解，例如霍夫变换[4.8]或者随机抽样一致（RANSAC）法[4.9]或者更复杂的无监督型集群方法，例如 k 均值[4.10]，最大期望值（EM）[4.11]，或者全局主成分分析（GPCA）方法[4.12]，在许多情况下，这是一个演算密集的迭代过程。

相反，如果已知环境的 CAD 模型，问题演变为生成少数几个模型参数（平动和转动）以匹配数据。该问题可通过特征匹配来求解，利用迭代最近点算法（ICP）[4.13]或者其他有效的组合匹配算法例如蒙特卡洛法[4.14]，将观察点与模型比对。何种方法最适合很大程度上仍然依赖于环境的结构和事先所知。

对环境有了初始了解之后，新的数据可以利用这些已有知识。特别是当机器人移动时，传感器数据应该以可预知的方式变化。因此，如果传感系统合适的统计特征可用，可以采用预测修正子方法例如凯尔曼滤波[4.15,16]或者连续关键取样[4.17]。如果存在数据关联问题，可以采用一系列通用技术例如 EM[4.10]或者前述的预测修正子方法的变种[4.18]。

偶尔无意义的数值往往造成传感器数据损坏，例如，因为反射的存在，我们范例中的激光测距仪可能偶尔会返回错误的范围度数。许多常用的估计技术对所谓的数据离群值并不具鲁棒性。在这种情况下，鲁棒统计类方法[4.19]可以用来提高传感和估计系统的性能。

最后，我们可能要考虑对当前的任务而言哪些信息是重要的。上述方法中大多数都假定目标是要产生与当前数据本身密切相关的一系列连续参数的准确估计。然而，在某些任务中，我们对参数值本身可能并不感兴趣。例如，假设我们机器人的目标是通过一个门口，虽然这明显取决于估计门宽度（一个连续参数）的能力，最终的决策具有二分性。该问题可整理为一个决策问题。而决策问题可以使用决策理论[4.20]的概念来进行模拟，包括零一损失函数，似然比，或概率比率。例如，在机器人通过门口问题中，如果任务的优先级低，与其试图通过一个太小的缺口（冒着损坏机器人或门，或两者的危险），不通过该特定的门（需要重新寻找替代路线）相对成本可能更低。反之，如果任务紧急，可以容许机器人采取更加危险的行为。

对于任何给定的任务（或决策），决策所需要的信息量可能会有所不同，例如，如果门口很宽，机器人只需要相对少量信息就可以安全地通过。反之，如果门口很窄，机器人作出决定前需要仔细检查。确定作出某项判断所需的信息类型和数量这一问题有不同的称谓，顺序抽样问题[4.20]，传感器控制问题，或传感器规划问题[4.21-23]。

### 4.3.1 点估计

在我们的机器人定位范例中，有几种情况下问题的关键是要估计出一个可表示为向量空间中的一个点的未知数量。例如二维（2-D）或者三维（3-D）点的位置或者机器人的位置。还有的情况下，问题是确定机器人的姿势（位置和方向），或者一条线段的参数。后者的不同点在于其参数空间不属于向量空间，这会引入一些额外的独特问题。进一步的讨论我们推荐读者阅读文献［4.24，25］，在本章剩余的部分我们将只讨论向量空间上的点估计问题。在我们的讨论中，我们假设读者熟悉多元高斯分布[4.26]和初等线性代数[4.27]。

本节余下部分中，我们考虑如下基本问题。

给定：观察模型：

$$y=f(x,\ \eta) \tag{4.2}$$

估计：$x\in\mathbf{Re}(n)$，基于观察 $y\in\mathbf{Re}(m)$，$\eta$ 为未知干扰，其值为 $\mathbf{Re}(k)$；$f$ 为从 $\mathbf{Re}(k+n)$ 至 $\mathbf{Re}(m)$ 的已知映射。

我们的讨论分为两个主题区域：

1）当 $f$ 为线性时，对成批和顺序数据的估计方法。

2）当 $f$ 为非线性时，对顺序数据的估计方法。

**1. 当 $f$ 为线性时，对成批和顺序数据的估计方法**

本节我们讨论对顺序数据的线性和非线性估计方法，包括凯尔曼滤波及其扩展。我们的目的是提供现有方法的概述。更多信息，读者可参考更深入的相关文献，例如文献［4.16，28，29］和第 25 章。

我们首先考虑式（4.2）中 $f$ 为线性的情况。在该情况下

$$y=\boldsymbol{F}x+\boldsymbol{B}\eta \tag{4.3}$$

$\boldsymbol{F}\in\mathbf{Re}(m\times n)$ 定义未知量 $x$ 与观察量 $y$ 之间的（线性）关系，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{Re}(m\times n)$。我们暂时略过 $\boldsymbol{B}$ 并假设 $\eta$ 代表系统的完整干扰模型。

用最小二乘方法由 $y$ 来估计 $x$，需要求解下列优

化问题

$$\min_x \|Fx - y\|^2 \tag{4.4}$$

当且仅当矩阵 $F$ 为满秩，该优化问题存在唯一解 $\hat{x}$。此时，求解如下线性系统可得到优化问题的解：

$$F^T F\hat{x} = F^T y \tag{4.5}$$

在某些情况下，有理由相信部分观测元素比另外的元素更可靠，因此对最终的估计应该贡献更多。可以修改式（4.4），包含一个对角正定加权矩阵来整合这类信息

$$\min_x (Fx - y)^T W(Fx - y) \tag{4.6}$$

求解下列等式可得到解

$$(F^T WF)\hat{x} = F^T Wy \tag{4.7}$$

虽然式（4.3）包含了干扰项（用 $\eta$ 表示），式（4.5）或者式（4.7）并没有直接用到该数量。但是，我们通常可以用统计模型来模拟传感器的噪声特征，调整原本的估计问题来整合该信息。常见的一种方法是极大似然估计（MLE）法，得到的 $\hat{x}$ 值，满足

$$p(y|\hat{x}) = \max_x p(y|x) \tag{4.8}$$

对于式（4.3）代表的线性附加模型，似然函数可用特别简单的形式表达。假设 $\eta$ 用固定已知的概率密度函数 $D$ 来表示，似然函数可表示为

$$p(y|x) = D(y - Fx) \tag{4.9}$$

MLE 与前面提到的最小二乘方法相关联。假设 $\eta \sim N(0, \Lambda)$，$N$ 代表均值为 0，方差为 $\Lambda$ 的多元高斯密度函数。观察可知，最大化似然函数的值等效于最小化似然函数的负自然对数，一系列简短的计算表明，取 $W = \Lambda^{-1}$ 时的加权最小平方可计算得到优化的最大似然估计。

最后，有些参数比其他的更容易预知。例如，当观察一辆汽车在高速公路上行使时，每小时 60mile 的速度比 20mile 或者 300mile 更可能发生。该信息可通过对未知变量 $x$ 的预先统计来获取。

给定 $x$ 上的先验概率密度 $p(x)$，由贝叶斯理论可知

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)dx} \tag{4.10}$$

最大后验概率（MAP）值 $\hat{x}$ 满足

$$p(\hat{x}|y) = \max_x p(x|y) \tag{4.11}$$

一般而言，该优化问题的解可以非常复杂。与其进一步探求该过程，我们考虑一种替代方案。也就是说，如果 $p(x|y)$ 的二阶矩存在，通过求解下列包含未知函数 $\delta$ 的优化问题有可能以统计学方式生成最小二乘估计

$$\min_\delta E\|\delta(y) - x\|^2 \tag{4.12}$$

也就是说，最优函数 $\delta$ 是由 $y$ 产生的具有最小均方误差（MMSE）的 $x$ 估计。因此估计子 $\delta$ 通常也称为最小均方误差估计子。

可以证明，在一般情况下，优化决策法则 $\delta^*$ 为条件均值[4.20]。

$$\delta^*(y) = E[x|y] \tag{4.13}$$

遗憾的是，如同上面定义的 MAP 估计，该表达式在一般情况下计算极其困难。稍后我们考虑计算式（4.13）的近似值。现在我们再次考虑之前式（4.3）所代表的线性观察模型（去除 $B$）。并且，我们假设 $x$ 和 $\eta$ 为二阶矩有限的独立随机变量，均值都为 0。请注意后者并不是真正的约束，因为它可以通过简单定义一个新变量 $x' = x - E[x]$ 来实现。最后，我们只考虑线性函数 $\delta$，也就是说，我们可以写 $\hat{x} = \delta(y) = Ky$。式（4.12）可以扩展为

$$\begin{aligned} E\|\delta(y) - x\|^2 &= E\|Ky - x\|^2 \\ &= E\|K(Fx + \eta) - x\|^2 \\ &= E\|(KF - I)x\|^2 + E\|K\eta\|^2 \\ &= \mathrm{tr}[(KF - I)\Lambda(KF - I)^T + K\Sigma K^T] \end{aligned} \tag{4.14}$$

此处，因为 $x$ 和 $\eta$ 彼此独立，并且它们的均值都为零，所以有几项被消除。最后一步推导利用了 $\|x\|^2 = tr(xx^T)$。

对 $K$ 求导数，并设其等于零，可得以下结果

$$K = \Lambda F^T(F\Lambda F^T + \Sigma)^{-1} \tag{4.15}$$

因此，在这种情况下，最优估计是观测值的线性函数，线性项只依赖于随机变量以及定义观测系统的线性项的方差。

如果 $x$ 的均值 $\mu$ 不为零，不难得到优化估计为

$$\hat{x} = Ky + (I - KF)\mu \tag{4.16}$$

估计的方差 $\Lambda^+$ 为

$$\Lambda^+ = (I - KF)\Lambda \tag{4.17}$$

感兴趣的读者可能希望得到一些简化情况下的解，例如，如果 $\Lambda = \Sigma$，$F = I$，$K = 1/2I$，那么 $\hat{x} = y + \mu$ 为简单均值，方差为 $\Lambda^+ = 1/2\Lambda$。

**2. 卡尔曼滤波**

有了上述背景，我们接下来定义线性系统的离散时域卡尔曼-布西滤波[4.30]。考虑下述时序模型

$$x_{t+1} = Gx_t + w_t \tag{4.18}$$

$$y_t = Fx_t + \eta_t \tag{4.19}$$

式中，$G$ 是描述系统时间变化的 $n \times n$ 矩阵；$x_0$ 服从均值为 $\hat{x}_0$，方差为 $\Lambda_0$ 的高斯分布。并且，$w_t$ 和 $\eta_t$ 相

对于所有时间 $t$ 均为零均值高斯独立随机变量，对于所有 $t\neq t'$，$w_t$独立于 $w_{t'}$，与之类似，对于所有 $t\neq t'$，$\eta_t$独立于 $\eta_{t'}$。最后，$\eta_t$方差为$\Sigma_t$，$w_t$方差为 $\boldsymbol{\Omega}_t$。给定一个观测 $y_1$，根据前面章节的推导，可以计算出方差为 $\Lambda_1$的新的估计 $\hat{x}_1$。注意，解为两个高斯随机变量的线性组合：观测值 $y_1$以及之前的估计值 $\hat{x}_0$。因为任何高斯随机变量的线性组合仍为高斯随机变量，所以更新后的估计仍服从高斯分布。

现在我们通过动态模型进行投影。为便于描述，用上角标减号和加号分别代表估计步骤之前与之后。因此，给定方差为 $\Lambda_t^+$ 的估计 $\hat{x}_t^+$，往前一步时间的投影结果为

$$\hat{x}_{t+1}^- = \boldsymbol{G}x_t^+ \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{t+1}^- = \boldsymbol{G}\Lambda_t^+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Omega}_t \tag{4.21}$$

此时，系统获取到一次新的观测 $y_{t+1}$，上述步骤开始循环重复。图4.11总结了线性系统完整的卡尔曼滤波算法。

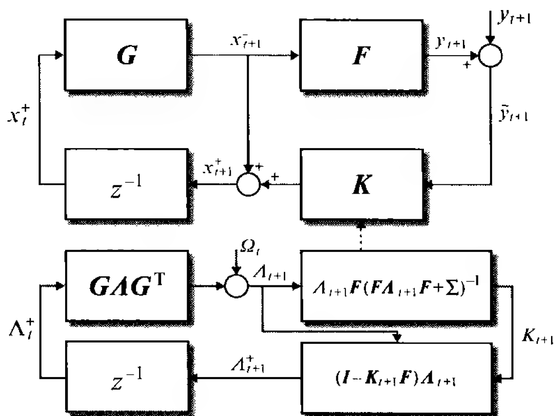



**图4.11 卡尔曼滤波算法小结**

可以证明在给定假设条件下，卡尔曼滤波为均方优化滤波。在其中一个或者两个高斯分布假设不成立的情况下卡尔曼滤波仍为优化线性滤波。

**3. 连续数据的非线性估计方法**

上一节的结果假设观测值与系统状态，附加噪声之间的关联为线性形态，系统的状态变化也可用线性关系来表述。并且，对于观测值服从高斯分布，噪声具传递性的系统，该结果为全局最优；如果噪声源为非高斯分布，则该解仅为最优线性估计子。

正如一开始提到的，更通用的非线性（离散时间）系统描述为

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= g_t(x_t) + w_t \\ y_t &= f_t(x_t) + \eta_t \end{aligned} \tag{4.22}$$

这里，噪声模型暂为附加项。

虽然该模型含有非线性项，对当前估计的非线性项进行泰勒级数展开，仍可能应用卡尔曼滤波的变体形式，即扩展卡尔曼滤波（EKF）。用 $J_f$代表函数 $f$ 的雅可比矩阵。假设时步为 $t-1$ 时估计存在，式(4.22）在该点的一阶扩展为

$$x_{t+1} = g_t(\hat{x}_{t-1}) + J_{g_t}(\hat{x}_{t-1})(x_t - \hat{x}_{t-1}) + w_t \tag{4.23}$$

$$y_t = f_t(\hat{x}_{te-1}) + J_{f_t}(x_t - \hat{x}_{t-1}) + \eta_t \tag{4.24}$$

加以整理可得到适合之前定义的卡尔曼滤波的线性形式

$$\tilde{x}_{t+1} = x_{t+1} - g_t(\hat{x}_{t-1}) + J_{g_t}\hat{x}_{t-1} = J_{g_t}\hat{x}_t + w_t \tag{4.25}$$

$$\tilde{y}_t = y_t - f_t(\hat{x}_{t-1}) + J_{f_t}\hat{x}_{t-1} = J_{f_t}x_t + \eta_t \tag{4.26}$$

式（4.25）和式（4.26）中，$\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 为新的合成状态和观测变量，$J_{g_t}$扮演 $\boldsymbol{G}$ 的角色，$J_{f_t}$扮演 $\boldsymbol{F}$ 的角色。

值得注意的是，EKF 迭代在本质上是一种加权牛顿迭代，即一种循环非线性估计方法。因此，保持方差固定，对同一观测进行多次循环是有用的。这样，当大的干扰或者严重的非线性存在时，估计子可以收敛得到解。只有收敛以后，才会更新方差项。这种卡尔曼滤波被称为迭代扩展卡尔曼滤波（IEKF）。

## 4.3.2 其他估计方法

在前一节，我们回顾了最常见和广泛应用的估计方法。然而，还有几种替代方法可求解参数估计问题。这里我们简单介绍两种：连续关键取样和图形模型。

**1. 连续关键取样**

在此之前的讨论都集中在用估计的均值和方差来近似计算系统状态。有一种利用贝叶斯定理的替代方法，其一般表达式为

$$p(x_n \mid y_1, y_2\cdots y_n) = \frac{p(y_1, y_2\cdots y_n \mid x_n)p(x_n)}{p(y_1, y_2\cdots y_n)} \tag{4.27}$$

假设 $y_n$独立于之前的所有观测与给定的系统状态 $x_n$，给定 $x_{n-1}$的情况下，当 $k>1$，$x_n$独立于 $x_{n-k}$，该表达式可简化为

$$p(x_n \mid x_{n-1}, y_n) = \frac{p(y_n \mid x_n)p(x_n \mid x_{n-1})}{p(y_n \mid x_{n-1})} \tag{4.28}$$

另外，由条件均值可得到最优均方估计，即

$$\delta^*(y_n) = E[x_n \mid y_n] \tag{4.29}$$

实际上，我们充分证明了卡尔曼滤波是该结果在含高斯干扰的线性系统情况下的特例。

通常情况下实现该过程的难点最终转化为在非线性、非高斯形态的情况下进行表征和计算分布的问

题。但是，如果假设之前的连续变量 $x_n$ 取值仅为离散数集，那么计算贝叶斯定理和其他相关统计量就简化为基于该离散数集的直接计算。这对于任何分布和任意转换都可简单实现。

连续关键取样（也称为粒子滤波，凝聚等其他名字）是用统计学来处理该问题的一种方法。为进行连续关键取样，作如下假设：

1）可从似然函数 $p(y_n|x_n)$ 进行取样。

2）可从动态模型 $p(x_n|x_{n-1})$ 进行取样。

注意取样的重点：不需要显式地展示似然函数或者动态模型的解析形式。

给定以上假设，连续关键取样的最简单形式可以写为：

1）用 $\pi_{n-1}=\{<x_{n-1}^k, w_{n-1}^k>, k=1, 2, \cdots N\}$ 代表一系列样本点 $x_{n-1}^k$，权重为 $w_{n-1}^k$ 且满足 $\sum w_{n-1}^k=1$。

2）计算 $N$ 个新的采样 $\pi_{n-1}^-=\{<x_n^k, 1/N>, k=1, 2, \cdots N\}$。

① 按照与权重 $w^{k-1}$ 成正比的概率选取采样点 $x_{n-1}^{k-1}$。

② 给定 $x_n^k$，权重为 $1/N$，从 $P(x_n|x_{n-1}^k)$ 取样。

3）计算 $\pi_n=\{<x_n^k, P(y_n|x_n^k)>, k=1, 2, \cdots N\}$。

很容易看出以上步骤为循环滤波的形式。而且，在任意时刻，相关分布的任何统计量可从样本集和相关权重来近似计算。

这种形式的基于取样的滤波广泛应用于用线性估计技术不足以处理的各种挑战性领域。这些线性估计技术对于低状态维度（通常 $n\leqslant 3$）和动力学约束完备的问题特别有效。对于高维问题或者展现高动态变化的系统，要获得好的近似所需要的粒子数量会太大以至于实际上不可能实现。然而，即便是这样，有时还是可以应用基于采样的系统来产生可以接受的结果。

**2. 图形模型**

图形模型代表一系列变量之间依赖与独立关系的一类模型。常见的图形模型范例包括贝叶斯网、影响图和神经网。这里我们以贝叶斯网为特别范例来重点讲述。

贝叶斯网络属于有向无环图，用节点代表随机变量，用有向弧代表随机变量对之间的概率关系。用父节点（$X$）代表所有弧中止于 $X$ 的节点集合，并用 $X_1$，$X_2$，…，$X_N$ 代表图中的 $N$ 个随机变量。我们有以下公式

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_N) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i | parents(X_i)) \tag{4.30}$$

作为范例，图 4.12 所示的贝叶斯网络代表一个执行定位任务的移动机器人。该图形模型表征问题的时序形态，因此属于链式网络。有关这类模型的更多讨论，请参考文献 [4.31]。

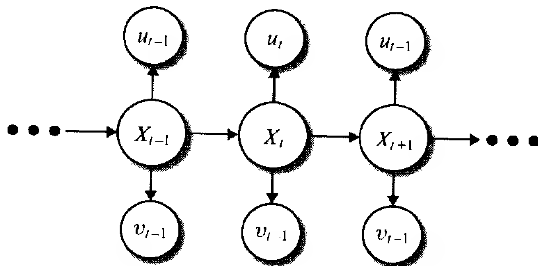



图 4.12 表征机器人定位的图形模型示例

贝叶斯网络的结构可代表变量之间的各种独立关系。研究这些独立关系可以设计出有效的推理算法。尤其，无环图即便是采用无向形式（称为多树）时也兼容线性推理算法。更通用的图可用多种循环迭代方法求解。特别是，如果网络中的分布是连续形式，连续关键采样的变体可用近似方法来求解问题[4.32]。

### 4.3.3 鲁棒估计方法

在前面的论述中，我们一般性地假设所有的数据都是“好的”，意味着数据即便是因干扰而损坏，但最终仍然携带当前问题的信息。然而，在许多情况下，数据可能含有离群值，要么跟典型数据相比损坏严重，要么完全就是可疑的数据。例如，在我们的地图绘制应用中，我们可能偶尔会收到经过了多次反射回来的范围数据。因此，当扫描一道直墙时，大部分的点都会沿一条直线分布，但偶尔会有距离值完全不一致的数据点。

问题在于，许多常见的估计方法对数据离群值非常敏感。考虑一个简单例子，通过一系列观测值 $X_1$，$X_2$，…，$X_N$ 来估计标量 $x$。我们有以下的估计 $\hat{x}$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N} \tag{4.31}$$

不失一般性，假设 $X_N$ 为离群值。我们可以重写以上表达式

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{N-1} X_i/N + \frac{X_N}{N} \tag{4.32}$$

不难看出，通过改变 $X_N$ 的值，$\hat{x}$ 可以取任何值。简而言之，单个离群数据能够产生任意差的估计。更一般地

说，任何最小二乘问题的解，例如从激光距离数据估计一条直线，可用一般形式 $\hat{x}=My$ 表示。基于以上相同的理由，不难得出任何最小二乘解都易受离群值的影响。

鲁棒统计领域研究的是当前数据被离群值污染时的估计或者决策问题。鲁棒统计中有两个重要的概念，屈服点和影响函数。屈服点是在估计过程中估计子不产生任意大误差所能承受的离群值（数据具备任意大误差）的比例。我们认为最小二乘方法的屈服点为0%，因为单个观测的干扰可导致估计的偏差足够远。相比而然，我们也可以取数据的中间值来计算估计，这样屈服点为50%——即使一半的数据为离群值，仍然可以产生有意义的结果。

屈服点确定可以承受的离群值数量，而影响函数确定一个离群值对估计的影响程度。最小二乘情况下，影响函数为线性函数。创建新的更鲁棒性估计子的一种方法是M估计[4.19]。为产生M估计，我们考虑下列最小化问题

$$\min_{\hat{x}}\sum_{i=1}^{N}\rho(\hat{x},\ y_i) \tag{4.33}$$

请注意，定义 $\rho(a,\ b)=(a-b)^2$ 导致最小二乘解。然而，我们可以选择其他对离群值阻抗更好的函数。图4.13给出了3个常见范例。

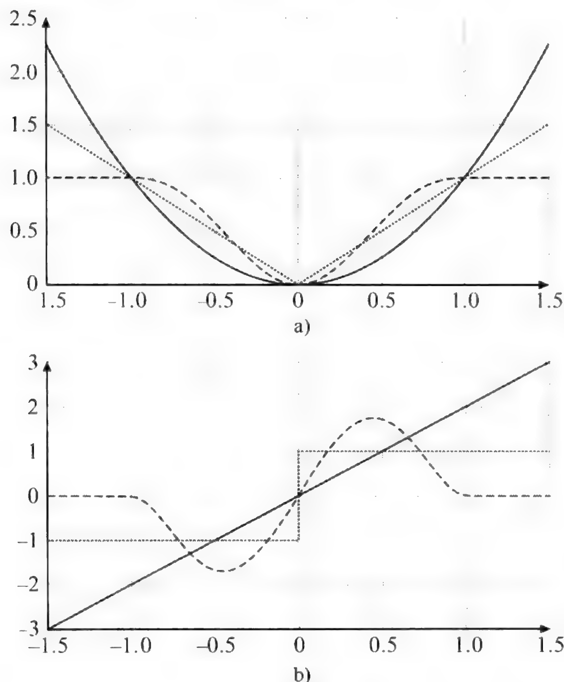



**图4.13 3个常见范例**

a）三种常见的鲁棒M估计函数、平方函数、绝对值和图基双权重函数 b）相应的影响函数

请注意，一般说来，式（4.33）的优化是非线性的，通常不存在闭合形式解。有趣的是，用重复再加权最小平方法（IRLS）来求解该问题通常是可能的[4.28,34]。IRLS的原理很简单。之前在式（4.7）中我们引入了一个权重矩阵 $W$。假设我们可以通过某种方式知道哪些数据点是离群值。在这种情况下，我们可以简单地将这些点的权重设为零，得到的结果将是剩余（优良）数据的最小二乘估计。

在IRLS中，我们交替假设离群值（通过再加权）和求解来得到结果（通过最小二乘）。通常，点的权重依赖于估计的残留误差。假设我们计算

$$r=y-F\hat{x} \tag{4.34}$$

令 $\psi(y)=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x\,|_{\hat{x}}$，然后我们可以设 $W_{i,i}=\psi(y)/r_i$。可以证明，在许多情况下，这种形式的加权可以收敛。图4.14给出了一个利用IRLS技术进行视频追踪的范例。

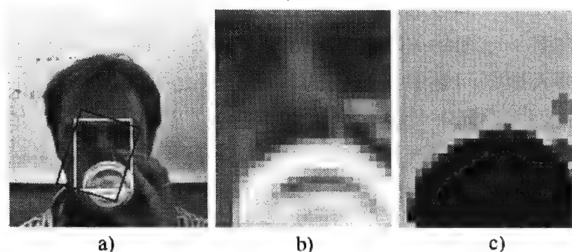



**图4.14 用IRLS实现的M估计来进行视频追踪的范例**[4.33]

a）单帧视频的人脸追踪结果（黑色边框对应没有剔除离群值的追踪算法，白色边框则对应于剔除了异常值的算法。） b）白色边框内区域的放大图 c）相应的权重矩阵表示（黑色的区域代表异常值。）

另外一种处理离群值的常用方法是基于表决的方法，即选择一系列数据然后对结果进行表决。我们讨论两种常用的方法：RANSAC[4.9]和最小均方（LMedS）[4.35]。

在两种情况下，我们都从这样的一个概念开始，即在所有数据（包括离群值）中，存在一个与好的数据相一致的估计。问题演变为如何选出该估计。考虑我们之前的问题，即从激光数据估计一条直线，并假设我们拥有100个激光点。我们真正需要的是正确选出两个点，匹配出一条直线，然后记录其他点有多少是与该直线相一致的。如果我们（保守地）估计3/4的数据是好的，那么选出两个好的点的几率是9/16，或等效于有一个或两个点为离群值的几率是7/16。如果我们重复该步骤数次（例如10次），那么我们所有的选择均为差的几率是 $(7/16)^{10}=0.025\%$。换种说法，有99.975%的几率我们已经选

择了一个好的点对。

我们如何决定接受一个采样？在 RANSAC 中，我们对在给定的距离临界值内与估计相一致的采样数目进行计数来进行表决。例如，我们选择那些距我们估计出的直线某一固定距离以内的点。在 LMedS 中，我们则计算所有采样点与直线之间的距离中值。然后我们选取具有最小中值的估计。

不难看出 LMedS 有一个屈服点是数据取值的 50%。另一方面，RANSAC 的一个屈服点能够更大，但是这需要选择临界值。RANSAC 还具备这样一项优势，一旦确定了非离群值，可以从非离群值计算最小均方估计，因此可以降低估计中的干扰。

RANSAC 和 LMedS 也可以为鲁棒迭代方法，例如 IRLS，提供好的初始解。

### 4.3.4 数据关联技术

上一节考虑的情况是在观测值与待估计量之间存在某一已知的关联。然而，正如在我们最初的移动机器人地图问题中所说明的，有的情况下除了估计外，我们需要同时计算这个关联本身。在这种情况下，估计中的一个必要步骤就是数据关联问题：得到观测数据与待估计量之间的相关性。

有很多关于这个问题的文献；这里我们主要讨论几种广泛应用的特定方法。我们的讨论将分为通常用于时序数据滤波的散（或称顺序）关联方法，和有完整的数据可供处理时使用的非散（或称为批）关联方法。后者常用数据分组方法来处理。

在这两种情况下，我们可以向数据源引入不确定度来扩展之前的模型和定义。为此，我们将在数据上用上标来表示观测模型。因此，我们的观测模型变成

$$x_{t+1}^k = g_t(x_t^k) + w_t^k \tag{4.35}$$

$$y_t^k = f_t^k(x_t^k) + \eta_t^k \tag{4.36}$$

此处 $k = 1 \cdots M$。

**1. 成批数据分组**

按照之前进行点估计的相同步骤，我们首先考虑对数据完全不做任何统计假设，系统动力学也未知的情况。因此，只有观测值 $y_1$，$y_2$，…，$y_M$ 给定。未知参数为 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$（我们暂时认为 $N$ 为已知）。我们的目标是计算关联映射 $\pi$，使得当且仅当模型参数 $x^k$ 中出现 $y_j$ 时，$\pi(j) = k$。

**2. k 均值聚类**

用于分组和数据关联的 k 均值算法简单，且广为接受，因此是我们讨论的一个好的起点。这里，我们假设 $f(x) = x$，也就是说，提供给我们的是当前状态向量的含干扰观测值。然后，如下应用 $k$ 均值算法：

1）选取 $N$ 个数据簇的中心 $\{\hat{x}^i\}$。

2）对于每一观测值 $y_j$，将它与最临近的簇中心相关联，也就是说，令 $\pi(j) = i$，对某些距离函数 $d$（通常为欧几里德距离）满足

$$d(\hat{x}^i, y_j) = \min_k d(\hat{x}^k, y_j) \tag{4.37}$$

3）估计与每一簇中心相关联的观测的均值

$$\hat{x}^i = \sum_{j,\pi(j)=i} y_j \tag{4.38}$$

4）重复步骤 2）和 3）。

在许多初始化良好的情况下，$k$ 均值工作得很好。但是，该方法不能生成合适的簇，也不能保证能收敛得到解。因此，常见的做法是，以不同的初始条件重复该算法几次再挑取最优的结果。也请注意，通过定义

$$d(\hat{x}^i, y_j) = \| F\hat{x}^i - y_j \| \tag{4.39}$$

在式（4.3）中引入 $F$，并用相应的最小二乘估计子替换式（4.38）可以直接扩展线性观测模型。进一步说，如果我们有观测数据的统计模型，那么我们可以利用之前定义的似然函数，定义 $d(\hat{x}^i, y_j) = p(y_j | \hat{x}^i)$，并利用式（4.38）中的 MLE。

$k$ 均值算法的一个局限是即使我们已知统计模型，也不保证一定收敛。但是，该方法的一个变体，称为期望最大化，可被证明收敛。

**3. 数据关联的期望最大化与模拟**

期望最大化（EM）算法[4.36]是一种用来处理数据丢失的通用统计技术。在前面的讨论中，给定未知参数集，我们用最大似然估计来最大化观测数据的条件概率。但是，使用 MLE 时我们假设数据完全已知。特别是，我们知道数据成分与模型之间的关联。

现在让我们假设部分数据丢失。为此，分别定义 $\mathcal{Y}_O$ 和 $\mathcal{Y}_U$ 为观测数据和非观测数据。然后我们可以写

$$p(\mathcal{Y}_O, \mathcal{Y}_U | x) = p(\mathcal{Y}_U | \mathcal{Y}_O, x) p(\mathcal{Y}_O | x) \tag{4.40}$$

假设现在我们给定猜测 $\hat{x}$，并有关于未知数据 $\mathcal{Y}_U$ 的一个分布（下面马上将会讨论这一点）。我们可以计算对数似然函数的期望值（之前提到过最大化对数似然值等同于最大化似然值）为

$$Q(x, \hat{x}) = E_{\mathcal{Y}_U}[\log p(\mathcal{Y}_O, \mathcal{Y}_U | x) | \mathcal{Y}_O, \hat{x}] \tag{4.41}$$

注意我们区分 $\hat{x}$ 为固定量，通常需要定义其在未知数据上的分布，而未知量 $x$ 为对数似然函数。

理想情况下，我们接下来可以选择 $x$ 的数值使得 $Q$ 最大。因此，根据迭代法则，我们可以选择一个新的值：

$$\hat{x}_i = arg\ maxQ(x, \hat{x}_{i-1}) \tag{4.42}$$

可以证明，上述循环将会收敛于目标函数 $Q$ 的局部最大值。但是值得注意的一点是，不能保证该最大值为全局最大值。

如何将其与数据分组相关联？我们考虑观测数据即为已观测到的数据。设未观测到的数据为关联值 $\pi(j)$，$j=1$，2，$\cdots M$ 确定观测数据所来自的模型。请注意它是一个离散随机变量。进一步假设有 $N$ 个数据簇服从高斯分布，均值为 $x_i$，方差为 $\Lambda_i$。设一个特定数据项 $y_i$来自于第 $i$ 簇的无条件概率为 $\alpha_i$。未知参数为 $\theta = \{x_1, x_2, \cdots, x_N, \Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_N, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N\}$。我们用 - 和 + 来分别表示先验参数估计和更新的参数估计。基于简明的目的，我们也定义 $w_{i,j} = p(\pi_j = i \mid y_j, \theta)$，并用下标 + 来表示更新的参数估计。然后，经过一系列计算推导，数据分组的 EM 算法变为

*E*-步骤：

$$w_{i,j} = \frac{p(y_j \mid \pi(j) = i, \theta)\alpha_i}{\sum_i p(y_j \mid \pi(j) = i, \theta)\alpha_i} \tag{4.43}$$

*M*-步骤：

$$\hat{x}_i^+ = \sum_j y_j w_{i,j} / \sum_j w_{i,j} \tag{4.44}$$

$$\Lambda_i^+ = \sum_j y_j (y_j)^t w_{i,j} / \sum_j w_{i,j} \tag{4.45}$$

$$\alpha_i^+ = \sum_j w_{i,j} / \sum_i \sum_j w_{i,j} \tag{4.46}$$

从上述推导可以看出 EM 算法产生的是一种软分组，相反，$k$ 均值产生的是观测值从属于哪一个数据簇的确定性决策（用 $w_{i,j}$表示）。实际上，估计的结果是高斯混合模型的最大似然估计，可如下表示

$$p(y \mid \theta) = \sum_j \alpha_j N(y \mid \hat{x}_j, \Lambda_j) \tag{4.47}$$

此处 $N$（.）代表一个高斯密度函数。图 4.15 给出了对从高斯混合模型取样的数据执行 EM 算法的结果。

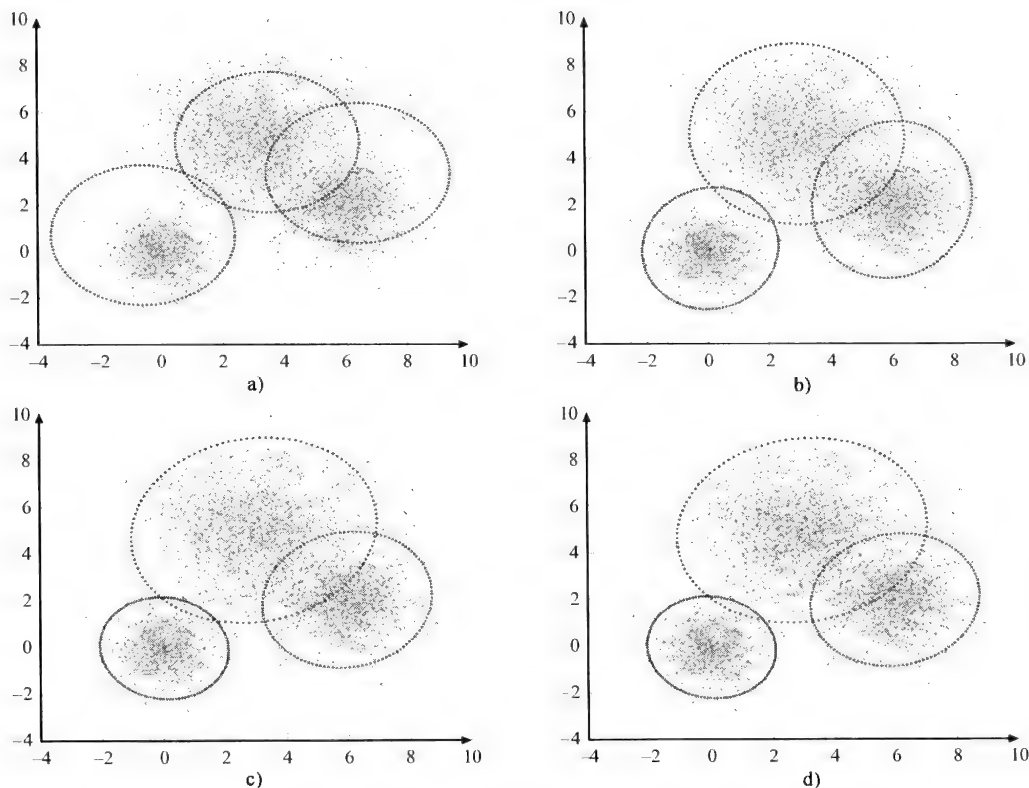



图 4.15a-d　期望最大化分组示例（图例为第 1，第 2，第 5 和第 10 次循环的结果）

**4. 递归滤波**

在上述的批处理方法中，我们预先并不知道状态参数的信息。进行递归滤波时，有利的是我们在时刻 $t+1$ 已知状态估计 $\hat{x}_t^k$和 $\Lambda_i^k$。和之前一样，对于数据 $y_t^i$，$i=1\cdots N$，问题是确定映射 $\pi$：$\{1\cdots N\} \rightarrow \{1\cdots M\}$，将数据元素 $i$ 与模型 $k=\pi(i)$ 相关联。在某些

情况下，包含一个离群值过程以处理来自于未知模型的数据是有益的。为此，我们可以在函数范围内包含零值，并把零映射作为离群值。

**5. 最近邻关联**

类似于 k 均值分组，产生数据关联的一种简单方式是如下计算数据关联值

$$\pi(i) = arg\min_j d(F^j\hat{x}^j, \hat{y}^i) \tag{4.48}$$

然而，最近邻方法并不考虑我们关于传感器数据或者估计的已知信息。也就是说，我们可能对模型 $i$ 有一个非常好的估计，而对另外的模型 $j$ 有一个非常差的估计。如果传感器对两者等距离观测，掷硬币决定会有意义吗？观测来自于模型 $j$（其方差较大）比模型 $i$（方差较小）更有可能。

考虑以上因素的一种常用措施是马哈拉诺比斯距离[4.37]。其原理是根据方差来对每个数值进行加权，即

$$m(y_1,y_2) = (y_1 - y_2)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}(y_1 - y_2)^{\mathrm{T}} \tag{4.49}$$

因此，距离按与不确定度成反比缩放。在上述情况下，具有较高方差的观测将产生较小的距离，与我们设想的一致。

即便使用这种加权方法，我们在数据关联中仍然可能犯错。从估计的观点来看，这将在估计过程中引入离群值，如上所述，并可能导致很糟的结果。另外一种方法，类似于 IRLS，基于与模型之间的距离来对数据加权。这就很自然地导致了数据关联滤波的概念。有关这些方法的更广泛讨论，我们推荐读者阅读参考文献［4.18］。

### 4.3.5　传感器模拟

至此，我们已经介绍了几种传感模式，也讨论了几种估计方法。但是，后者通常依赖于具备前者的统计模型。因此，有关传感器模拟的简短讨论可以令传感与估计章节更加完整。

设计一个传感器模型涉及四个主要部分：①创立一个物理模型；②确定传感器标定；③确定误差模型；④识别失效条件。

物理模型是待测量（$x$）与可用数据（$y$）之间的关系 $f$。在许多情况下，该关系是很明显的，例如，激光传感器与环境中某表面之间的距离。在其他情况下，该关系可能没有如此明显，例如，多幅相机图像中的亮度与相机至观测点之间的距离这两者相关联的正确模型是怎样的？在某些情况下，包含计算过程是必要的，例如传感器模型中的特征检测和相关性。

一旦确定了物理模型，通常有一个传感器标定的步骤。该步骤一般特定于所使用的传感器，例如，透视相机系统的图像几何要求识别两个缩放参数（主体图像尺度）和光学中心（两个额外参数）的位置。通常还有镜头失真参数。这些参数只能通过仔细的标定程序才能确定[4.5]。

一旦标定好的物理传感器模型可用，确定一个误差模型通常包含统计参数的识别。理论上，第一步是确定一个误差的经验分布。但是，这通常是很困难的，因为它需要知道未知参数的精确的地面真值。这通常需要开发一个可模拟所期望的传感情况的实验装置。

给定这样的一个经验分布，还有几个重要的问题，包括：①观测在统计上独立吗？②误差分布是否单峰？③经验误差的关键要素能否用常见的统计量，例如数据方差，来获取？关于该主题的更多信息，我们推荐读者阅读统计与数据模拟方面的书籍（见参考文献［4.38］）。

最后，理解何时传感器能够或不能够提供可靠的数据是很重要的，例如，激光传感器在黑暗的表面上不如在明亮表面上精确，光照太亮或者太暗相机不能生成有意义的数据，等等。有时，有简单迹象可判断这些情况的存在，例如，察看相机图像的强度直方图能够快速断定当前条件是否适合处理。有些情况下，只能在背景下才可能检测到这些状况，例如，两个距离传感器检测到的与某表面的距离不一致。有时失效只能在回溯中才能诊断出来，例如一个三维表面模型建立后，很明显，一个假设的表面被另一个所阻隔，则必定有多重反射存在。在一个真正鲁棒的传感系统中，应该用所有可能的方法来验证传感器操作。

### 4.3.6　其他不确定性管理方法

鉴于篇幅所限，我们的讨论只局限于最常用的传感和估计方法。值得注意的是已经有许多其他的替代性不确定性管理方法被提出来并成功应用。

例如，如果已知传感误差有界，那么基于约束的方法对点估计很有效[4.39,40]。或者，如果只有部分概率模型能被识别，可用丹普斯特-谢菲方法来做决策[4.41]。

模糊逻辑允许采用集合梯度形成员函数。模糊集合理论使得部分成员成为可能。例如，在数据分类中，在某两个范畴例如“平均”与“高”中选择可

能很困难，但是用逐步切换则行得通。如参考文献［4.42］所述，这类方法已用于DAMN结构的情况评估与导航。

## 4.4 表示方法

传感器数据可直接用于控制，但也用于估计机器人和（或）环境的状态。状态的定义及适合的估计方法与当前应用所采用的表示方法紧密相关。

有很多种可能的环境表示方法，包括最典型的几何元素，例如点、曲线、表面和容积。机器人的一个基本概念是刚体的姿势。机器人或者实体在环境中的姿势由相对于参考框架的位置与方向来表征。

一般来说，用参数对（$R$，$T$）来代表姿势。这里，$R$是物体的方向，用相对于参考框架的旋转矩阵来表示。类似地，$T$表示物体相对于参考框架的平移。参考框架之间的变换有多种潜在的表达方式，在运动学章节（第1章）和参考文献［4.43］中有详细表述。

传感器数据在本地传感器参考框架中采集，例如，声纳转换器、雷达扫描仪和立体图像系统都用来测量环境中的表面相对于传感器自身框架的距离。但是，如果目标是将这类信息组合成常见的环境模型，数据必须转换成以机器人为中心的参考框架，或者也可转换成到一个固定世界（惯性）参考框架中。特别地，世界中心参考框架令机器人运动和通信可以简单传递给其他机器人和（或）用户。

为方便讨论，绝大多数集成传感器数据的表示方法可以分为四个通用模型类别：①原始传感器数据模型；②基于网格的模型；③基于特征的模型；④符号或者图形模型。

很自然地，也可以组合这四个类别的元素来获得混合环境模型。

### 4.4.1 原始传感器表征

对于简单反馈控制[4.44]，常见做法是将原始传感器数据直接整合至控制系统，因为在许多情况下，控制本身并不需要世界模型。例如，常常这样应用本体感受传感：基本的轨迹控制直接利用关节编码器的信息，而力控制直接利用来自力传感器的受力或转矩信息运作。

外感受传感中原始传感器模型没有这样常用，但是有些情况下还是有用的。例如，移动机器人从密集点数据构建地图。这种方法对激光测距仪特别常用，用扫描校准来生成基于点的世界模型。参考文献［4.45，46］证明了多条激光距离扫描能够合成一个环境模型。用公式表达，在时间$t$的一个环境扫描可表示成点集

$$\mathcal{P}_t = \{p_i = (\rho_i, \theta_i) \mid i \in 1 \cdots N\} \qquad (4.50)$$

然后通过标准的SE（3）变换来校准两个不同的扫描$\mathcal{P}_t$和$\mathcal{P}_{t+1}$。常用ICP算法[4.13]来估计上述变换：假设$T^{[0]}$为两个点集之间变换的初始估计，并且$\|p_t - p_{t+1}\|$为点集$\mathcal{P}_t$中的一点与点集$\mathcal{P}_{t+1}$中的另外一点之间的欧几里德距离。如果进一步令CP为确定一个点集中与另外一个点集最近的点的函数，令$\mathcal{C}$为两个点集之间的点对集合。通过下述算法的迭代：

1）计算$\mathcal{C}_k = \cup_{i=1}^{N} \{p_i, CP[T^{[k-1]}(p_i, \mathcal{P}_{t+1})]\}$。

2）估计$T^{[k]}$，使得点集$\mathcal{C}_k$中的点之间LSQ误差最小，直到误差收敛。

可以找到扫描校准的估计，并构建环境的合成模型。

模型易于构建并适合单一模态传感器数据的集成。通常模型并不包含不确定度信息，且随着模型增长，复杂度$O(\sum_t \lfloor \mathcal{P}_t \rfloor)$将变成一个问题。

### 4.4.2 基于网格的表示方法

在一个基于网格的表示方法中，环境被细分为许多单元。单元能容纳环境特征，例如温度、障碍物、力分布等。网格的维度通常为二或者三，随具体的应用而定。网格可以是均匀细分或者是利用四叉树或八叉树的树状划分[4.47]。基于树的方法特别适合处理非均匀及大尺度数据集。在一个网格模型中，每一单元含有一个沿参数集分布的概率。例如，用网格模型来表示物理环境时，单元规定为占用或者空闲，并有概率$P$（表示占用率）。一开始无已知信息，故网格被初始化为$P$（占用）=0.5来表示其状态未知。进一步假定传感器模型$P(R \mid S_{ij})$可用，即，对给定的传感器和位置检测到物体的概率。通过贝叶斯理论[4.10]，能够根据下式来更新网格模型：

$$p_{ij}(t+1) = \frac{P(R \mid S_{ij} = O) p_{ij} t}{P(R \mid S_{ij} = O) p_{ij} t + P(R \mid S_{ij} = F)(1 - p_{ij} t)}$$

此处，每当获取到新数据，就通过网格模型计算$p_{ij}$。

基于网格的模型已经广泛用于移动机器人[4.48,49]和广泛应用图像容积的医疗图像领域[4.50]。容积模型可以相对很大，例如，解析度为毫米级的人脑网格模型需要4GB的存储空间，因此需要相当多的计算资源来进行维护。

### 4.4.3 离散特征表示

原始传感器表示和基于网格的模型都包含传感器数据的最小抽象。在许多情况下，我们感兴趣的是从传感器数据提取特征以降低存储的需求，只保留平台运动过程中始终不变的数据或外部对象。特征的范围包括大部分标准几何实体例如点（$p$），线（$l$），面（$N$，$p$），曲线（$p(s)$）和更通用的表面。为估计外部环境的属性，混合模型是有必要的，即把特征集合整合到一个统一的状态模型中。

通常在三维空间 $\mathcal{R}(3)$ 表征一个点。传感器具有相应的干扰，因此，在大多数情况下，点具有相应的不确定度，一般用均值为 $\mu$，标准偏差为 $\sigma$ 的高斯变量来模拟。用一阶和二阶矩可求得统计量的估计。

表征直线特征更加困难。数学上的直线可以用向量对（$p$，$t$）来表示，即直线上的一点和切向量。在许多实际的应用中，直线为有限长度，故有必要对直线的长度进行编码，这可以用端点、起点、切线和长度来实现。在某些情况下，直线模型的冗余表征更加有利于简化更新和匹配。端点不确定度与其他直线参数之间的关系可以用分析方法加以推导，如文献［4.51］所述。直线参数的估计通常基于之前描述的 RANSAC 方法，通过霍夫变换[4.8]来实现，霍夫变换是另外一种基于表决的方法。

对于更复杂的特征模型，例如曲线或者表面，有必要利用有助于鲁棒特征分离和相关不确定度估计的检测方法。文献［4.36］中有该类方法的完整描述。

### 4.4.4 符号/基于图的模型

第 4.4.1～4.4.3 节所描述的所有代表方法本质上都是参数型，相关的语义有限。用于识别结构，空间，位置和物体的方法近来有很大进展，这要特别归功于统计学习理论的进展[4.10,52]。因此，如今有许多不同方法用于识别传感器数据中的复杂结构，例如标志物、路表面、体结构等。如有识别的构造可用，则可利用前面讨论过的图形模型来表征环境。一般，一张图由一组节点 $N$ 和一组连接节点的边 $E$ 所组成。节点和边都可拥有相关的属性，例如标签和距离。图结构的一个例子是环境拓扑图，如图 4.16 所示。图的表征也可以是环境的语义模型（物体和地点）或者是待组装的物体成分的表征。

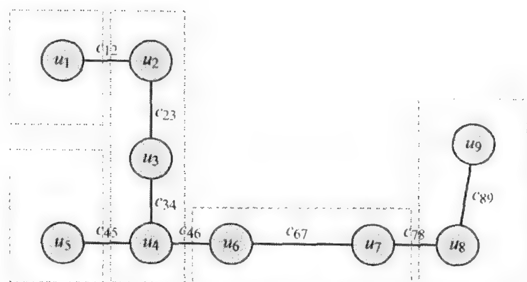



图 4.16 空间环境的拓扑图

关于模型更新，基于语义/图的表征可以利用由 Pearl 所表述的贝叶斯推理方面的最新进展[4.53]，并可在文献［4.54］中找到应用实例。

## 4.5 结论与扩展阅读

传感和估计仍是机器人研究的挑战性和活跃领域。传感的几个领域，例如计算机视觉和医学图像本身是很大而多样的研究领域。同时，估计中新的基础及应用技术仍将被持续开发。实际上，可以说感觉仍将是机器人研究的最具挑战性领域之一。

基于这样的背景，单个章节不可能涵盖基于传感器的机器人发展中的所有有用材料。但是，本章中所论述的方法代表机器人中的最常用技术。特别是，线性技术例如凯尔曼滤波仍然是感觉机器人的主干。本手册的第 3 篇更深入地涵盖了传感与估计中的数个关键主题。

如果读者希望了解更多，在现代传感器手册中可以找到有关传感器设计、物理学和使用不同传感器的一般讨论[4.3]。在参考文献［4.55］中可找到关于移动机器人传感器的讨论，虽然自该书于十余年前出版后取得了重大进展。参考文献［4.56］和［4.57］中详细描述了利用计算机视觉进行传感与估计。

许多的优秀教科书都涵盖了基本的估计理论。参考文献［4.18］和［4.58］中深人涵盖了检测和线性估计理论的大部分内容。参考文献［4.10］、［4.11］及其最新版本［4.36］中涵盖了通用统计学估计。参考文献［4.19，35］详细描述了鲁棒方法。参考文献［4.31］也深入涵盖了移动机器人的估计方法。

# 参考文献


4.1 D.C. Marr: *Vision* (Freeman, Bedford 1982)

4.2 R. Siegwart, I.R. Nourbakhsh: Autonomous mobile robots. In: *Intelligent Robotics and Autonomous Systems* (MIT Press, Cambridge 2004)

4.3 J. Fraden: *Handbook of Modern Sensors: Physic, Design and Applications*, 2nd edn. (Springer, New York 1996)

4.4 G. Dissanayaka, S. Sukkarieh, E. Nebot, H. Durrant-Whyte: The aiding of a low-cost strapdown inertial measurement unit using vehicle model constraints for land vehicle applications, IEEE Trans. Robot. Autom. **17**(5), 731–748 (2001)

4.5 Z. Zhang: A flexible new technique for camera calibration, IEEE Trans. Pattern. Anal. Mach. Intell. **22**(11), 1330–1334 (2000)

4.6 D. Burschka, J. Geiman, G.D. Hager: Optimal landmark configuration for vision-based control of mobile robots, Proc. Int. Conf. Robot. Autom. (ICRA 2003) pp. 3917–3922

4.7 J. Baker, N. Anderson, P. Pilles: Ground-penetrating radar surveying in support of archeological site investigations, Comput. Geosci. **23**(10), 1093–1099 (1997)

4.8 P. V. C. Hough: A method and means for recognizing complex patterns, U.S. Patent 3,069,654 (1962)

4.9 M.A. Fischler, R.C. Bolles: Random Sample concensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, Commun. ACM **24**, 381–395 (1981)

4.10 T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman: *The Elements of Statistical Learning*, Springer Series in Statistics (Springer, Berlin, Heidelberg 2002)

4.11 R.O. Duda, P.E. Hart: *Pattern Classification and Scene Analysis* (Wiley-Interscience, New York 1973)

4.12 R. Vidal, Y. Ma, J. Piazzi: A new GPCA algorithm for clustering subspaces by fitting, differentiating and dividing polynomials, Proc. Int. Conf. Cumput. Vis. Pattern Recog. **1**, 510–517 (2004)

4.13 P. Besl, N.D. McKay: A method for registration of 3-D shapes, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **14**(2), 239–256 (1992)

4.14 F. Dellaert, S. Seitz, C. Thorpe, S. Thrun: Special issue on Markov chain Monte Carlo methods, Mach. Learn. **50**, 45–71 (2003)

4.15 A. Gelb (Ed.): *Applied Optimal Estimation* (MIT Press, Cambridge 1974)

4.16 D. Simon: *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches* (Wiley, New York 2006)

4.17 A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon: *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (Springer, Berlin, Heidelberg 2001)

4.18 Y. Bar-Shalom, T. Fortmann: *Tracking and Data Association* (Academic, New York 1988)

4.19 P.J. Huber: *Robust Statistics* (Wiley, New York 1981)

4.20 J.O. Berger: *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd edn. (Springer, New York 1985)

4.21 G.D. Hager: *Task-Directed Sensor Fusion and Planning* (Kluwer, Boston 1990)

4.22 S. Abrams, P.K. Allen, K. Tarabanis: Computing camera viewpoints in a robot work-cell, Int. J. Robot. Res. **18**(3), 267–285 (1999)

4.23 M. Suppa, P. Wang, K. Gupta, G. Hirzinger: C-space exploration using noisy sensor models, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2004) pp. 1927–1932

4.24 G.S. Chirikjian, A.B. Kyatkin: *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis* (CRC, Boca Raton 2000)

4.25 J.C. Kinsey, L.L. Whitcomb: Adaptive identification on the group of rigid body rotations and its application to precision underwater robot navigation, IEEE Trans. Robot. **23**, 124–136 (2007)

4.26 P.J. Bickel, K.A. Doksum: *Mathematical Statistics*, 2nd edn. (Prentice-Hall, Upper Saddle River 2006)

4.27 G. Strang: *Linear Algebra and its Applications*, 4th edn. (Brooks Cole, New York 2005)

4.28 P. McCullagh, J.A. Nelder: *Generalized Linear Models*, 2nd edn. (Chapman Hall, New York 1989)

4.29 E.L. Lehmann, G. Casella: *Theory of Point Estimation* (Springer, New York 1998)

4.30 R.E. Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, Transactions of the ASME, J. Basic Eng. **82**, 35–45 (1960)

4.31 S. Thrun, D. Fox, W. Burgard: *Probabilistic Robotics, Autonomous Robotics and Intelligent Agents* (MIT Press, Cambridge 2005)

4.32 C. Bishop: *Pattern Recognition and Machine Learning* (Springer, New York 2006)

4.33 G.D. Hager, P.N. Belhumeur: Efficient region tracking of with parametric models of illumination and geometry, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. **20**(10), 1025–1039 (1998)

4.34 J.W. Hardin, J.M. Hilbe: *Generalized Linear Models and Extensions*, 2nd edn. (Stata, College Station 2007)

4.35 P.J. Rousseauw, A. Leroy: *Robust Regression and Outlier Detection* (Wiley, New York 1987)

4.36 R.O. Duda, P.E. Hart, D.G. Stork: *Pattern Classification*, 2nd edn. (Wiley, New York 2001)

4.37 P.C. Mahalanobis: On the generalised distance in statistics, Proc. Nat. Inst. Sci. India **12**, 49–55 (1936)

4.38 J. Hamilton: *Time Series Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton 1994)

4.39 S. Atiya, G.D. Hager: Real-time vision-based robot localization, IEEE Trans. Robot. Autom. **9**(6), 785–800 (1993)

4.40 G.D. Hager: Task-directed computation of qualitative decisions from sensor data, IEEE Trans. Robot. Autom. **10**(4), 415–429 (1994)

4.41 G. Shafer: *A Mathematical Theory of Evidence* (Princeton Univ. Press, Princeton 1976)

4.42 J. Rosenblatt: DAMN: A distributed architecture for mobile navigation, AAAI 1995 Spring Symposium on Lessons Learned for Implementing Software Architectures for Physical Agents (1995) pp. 167–178

4.43 R.M. Murrey, Z. Li, S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* (CRC, Boca Raton 1993)

4.44 K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive Control*, 2nd edn. (Addison-Wesley, Reading 1995)

4.45 S. Gutmann, C. Schlegel: AMOS: Comparison of scan-matching approaches for self-localization in

indoor environments, 1st Euromicro Conf. Adv. Mobile Robotics (1996)
4.46 S. Gutmann: Robust Navigation for Autonomous Mobile Systems. Ph.D. Thesis (Alfred Ludwig University, Freiburg 2000)
4.47 H. Samet: The quadtree and related hierarchical data structures, ACM Comput. Surv. **16**(2), 187–260 (1984)
4.48 A. Elfes: Sonar-based real-world mapping and navigation, IEEE Trans. Robot. Autom. **3**(3), 249–265 (1987)
4.49 A. Elfes: A Probabilistic Framework for Robot Perception and Navigation. Ph.D. Thesis (Carnegie Mellon University, Pittsburgh 1989)
4.50 M.R. Stytz, G. Frieder, O. Frieder: Three-dimensional medical imaging: Algorithms and computer systems, ACM Comput. Surv. **23**(4), 421–499 (1991)
4.51 R. Deriche, R. Vaillant, O. Faugeras: From Noisy Edges Points to 3D Reconstruction of a Scene: A robust approach and its uncertainty analysis. In: *Theory and Applications of Image Analysis* (World Scientific Singapore 1992) pp. 71–79
4.52 V.N. Vapnik: *Statistical Learning Theory* (Wiley, New York 1998)
4.53 J. Pearl: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems* (Morgan Kaufmann, New York 1988)
4.54 M. Paskin: Thin Junction Tree Filters for Simultaneous Localisation and Mapping. Ph.D. Thesis (University of California, Berkley 2002)
4.55 H.R. Everett: *Sensors for Mobile Robots: Theory and Application* (Peters, London 1995)
4.56 D. Forsyth, J. Ponce: *Computer Vision – A Modern Approach* (Prentice-Hall, Upper Saddle River 2003)
4.57 R. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000)
4.58 S. Blackman, R. Popoli: *Design and Analysis of Modern Tracking Systems* (Artech House, London 1999)

# 第5章　运动规划

Lydia E. Kavraki，Steven M. LaValle
高发荣　译

本章首先在5.1节提出了几何路径规划的公式，接着在5.2节介绍了基于抽样的规划算法，这是一种可用于解决许多问题的通用技术，并已成功处理了一些难度很大的规划实例。在5.3节中，介绍了几种其他的规划替代方法，用于一些具体的简单规划情况，这些方法为简单规划问题提供了理论保证，在这点上比基于抽样的规划做得要好。5.4节考虑了微分约束问题。5.5节概述了对基本问题的公式描述和求解方法的扩展。最后在5.6节讨论了运动规划相关的一些重要前沿主题。



机器人的一个根本任务，就是要实现从开始位置到目标位置的无碰撞运动，这需要通过收集障碍物的静态位置，并对复杂组合体进行规划来实现。虽然问题相对简单，但其几何路径规划还是难以计算[5.1]。另外在实际机器人中，由于机械和传感方面的一些限制，需要通过公式的扩展对这些问题加以考虑，如不确定性、反馈和微分约束，后者还涉及更为复杂的自动规划问题。现代算法已经在几何问题上比较成功地解决了一些难点算例，并一直在努力扩展其解决更具挑战性算例的能力。这些算法的应用范围已超出机器人学领域，如用于计算机动画、虚拟样机和计算生物学等。对于现代运动规划技术及其应用，现有的许多研究报告[5.2-4]和专业书籍[5.2-7]，已经涵盖了这一领域。

## 5.1　运动规划的概念

本节只提出基本运动规划问题（或几何路径规划问题）的描述，至于将这些基本公式扩展到更为复杂的情况，将在后面章节加以讨论，并将贯穿于本书之中。

### 5.1.1　构型空间

在路径规划中，首先提出机器人$\mathcal{A}$和工作空间$\mathcal{W}$的完整几何描述：工作空间$\mathcal{W}=\mathbb{R}^N$，其中$N=2$或$N=3$，为含有障碍物的静态外部环境。我们的目的是为机器人$\mathcal{A}$找出一条无碰撞路径，使其从初始位姿（位置和姿态）移动到目标位姿。

为实现这一目标，必须提供机器人几何位置上的每一个点（即构型 $\boldsymbol{q}$）的完整说明。这里引入构型空间，也称C空间（$\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}$），它是所有可能构型所组成的空间。C空间表示的运动学变换集，能用于第1章（运动学）中表述的、所有给出的机器人运动学变换。在运动规划研究中，人们早就认识到C空间是一个很有用的途径，它能将各种规划问题抽象为统一的方式。这种抽象的优点在于，具有复杂几何形状的机器人，可以映射到C空间的一个点上，机器人系统的自由度数是C空间的维数，或者是指定构型所需参数的最小个数。

设闭集$\mathcal{O}\subset\mathcal{W}$表示（工作空间的）障碍区域，通常用多面体、三维（3-D）三角形或分段代数曲面的形式表示。设闭集 $\mathcal{A}(\boldsymbol{q})\subset\mathcal{W}$，表示机器人在构型 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}$上所占据点的集合，它通常采用与$\mathcal{O}$相同的图元来模拟。C空间障碍区域$\mathcal{C}_{obs}$定义为

$$\mathcal{C}_{obs}=\{\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}\mid\mathcal{A}(\boldsymbol{q})\cap\mathcal{O}\neq\emptyset\}\qquad(5.1)$$

由于$\mathcal{O}$和$\mathcal{A}(\boldsymbol{q})$ 均为$\mathcal{W}$上的闭集，因此障碍区域也是$\mathcal{C}$上的一个闭集。无（避免）碰撞的构型集合$\mathcal{C}_{free}=\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_{obs}$，称为自由空间。

C空间简单举例如下。

1）平面刚体的平移。机器人构型可用一个参考点（$x$，$y$）来表示，这个点位于相对于某固定坐标的平面刚体上，因此这里C空间等效于$\mathbb{R}^2$。图5.1给出了一个三角形机器人和一个多边形障碍物所构成的C空间的例子。其中C空间内的障碍区域可通过记录机器人在工作空间障碍物周围滑动的轨迹，然后找出所有$\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}$上的约束来实现。对机器人的运动规划，就等效为对C空间上一个点的运动规划。

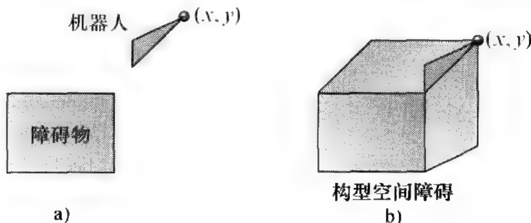



**图5.1 平面上的机器人平移**

a）三角形机器人在带有单个矩形障碍物的工作空间上移动 b）C空间障碍

2）平面臂。图5.2给出了一个两关节平面臂的例子，两个连杆的底部钉住，因而只能沿关节做无限位的转动。对于这个臂，用参数 $\theta_1$和 $\theta_2$来表示构型，每个关节角 $\theta_i$对应于单位圆$\mathbb{S}^1$的一点，因而C空间为$\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1=T^2$，其二维圆面环如图5.2所示。对于无关节限制连杆数更多的情况，C空间可类似的定义为：

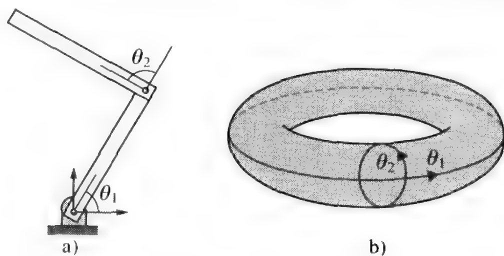



**图5.2 二维圆面环**

a）两关节平面臂（其中连杆钉住且无关节限制） b）C空间

$$\mathcal{C}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1\qquad(5.2)$$

如果关节有限位，通常可用有限区间$\mathbb{R}$来替代相应的$\mathbb{S}^1$；如果平面臂的底部没有钉住，是可移动的，则需要考虑在臂构型上加上平移参数：

$$\mathcal{C}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1\qquad(5.3)$$

在后面的5.6.1节，我们将讨论构型空间的拓扑属性，并提供了另外一些C空间的例子。

## 5.1.2 几何路径规划问题

基本运动规划问题，又称为钢琴移动问题[5.1]，其定义如下。

已知：

1）工作空间$\mathcal{W}$，这里$\mathcal{W}=\mathbb{R}^2$或者$\mathcal{W}=\mathbb{R}^3$。

2）障碍区域$\mathcal{O}\subset\mathcal{W}$。

3）定义于$\mathcal{W}$的机器人，它为一个刚体$\mathcal{A}$，或者$m$个构件（连杆）的集合：$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$。

4）构型空间$\mathcal{C}$（包括$\mathcal{C}_{obs}$和$\mathcal{C}_{free}$）。

5）初始构型$\boldsymbol{q}_I\in\mathcal{C}_{free}$。

6）目标构型$\boldsymbol{q}_G\in\mathcal{C}_{free}$。初始构型和目标构型常称作查询（$\boldsymbol{q}_I$，$\boldsymbol{q}_G$）。

问题：计算一条（连续）路径$\tau$：$[0,1]\rightarrow\mathcal{C}_{free}$，使得$\tau(0)=\boldsymbol{q}_I$且$\tau(1)=\boldsymbol{q}_G$。

## 5.1.3 运动规划的复杂度

运动规划中最主要的复杂因素在于，直接计算$\mathcal{C}_{obs}$和$\mathcal{C}_{free}$不方便，并且C空间的维数往往很高。*Reif* 早先研究了钢琴移动问题，根据计算的复杂度分类，这一问题被证明为PSPACE-hard[5.1]。对于固定维数问题，一些多项式-时间算法指出，问题的难度与维度具有指数相关性[5.10,11]。Canny提出了在C空间维度上的单一指数-时间算法，这一问题被证明为PSPACE-complete[5.12]。虽然该算法并不实用，但在基本运动规划问题研究中，可作为一般问题的难度

上限。它应用计算代数几何建模技术，对C空间进行建模，来构建路线图，即一个具有$\mathcal{C}_{free}$连接性的一维（1-D）子空间。关于这一技术的更多详情，见5.6.3节。

问题的复杂度，推动了路径规划问题的研究。其中一个方向是采用多项式-时间算法，研究普遍问题的某些子类[5.13]。但即使是这样一些简单的运动规划特例，仍然被看做是一种挑战，例如$\mathbb{R}^2$中，平行于轴的矩形做有限次平移，这种简单情况，其复杂度也是PSPACE-hard。对某些运动规划的扩展就更难了，例如，3维多面体环境中，不确定性下的某种规划形式为NEXPTIME-hard[5.15]。NEXPTIME中最大的难题在于需要双倍指数的时间来进行求解。

另外一个方向是替代运动模式的发展，替代模式的假设建立在实际应用的基础上。组合方法能通过特定的二维和三维问题，来有效构建一维线路图；势场法通过定义矢量场，能够跟随机器人朝目标的运动。然而，这两种方法都不能成规模地用于普遍情况，这些将在5.3节讲述。基于抽样的规划是另外一种替代模式，它作为一种常用方法，已被证明能成功用于解决实践中的许多难题。此方法虽然避免了C空间的精确几何模拟问题，但却不能保证算法的完备性。因为完备、精确的算法能够检测出无路径寻的情况，而基于抽样的规划方法，只能提供较低水平的完备性保证。这种模式将在下面一节讲述。

## 5.2 基于抽样的规划

本节首先讲述基于抽样的规划，因为对于很多通常类型的问题，都可以选用这种方法，下一节将讲述其他方法，它们中的一些还早于抽样规划架构。基于抽样规划的核心思想，是利用碰撞检测算法的进步，来计算单个构型是否为无碰撞。给出简单图元后，规划器通过对不同构型进行采样并构建数据库，用于存储一维C空间曲线，它代表无碰撞路径。在这种方法中，基于抽样的规划器不直接接近C空间的障碍，而是通过碰撞探测器和构建数据结构来进行。使用这种抽象层次，对于特定的机器人及其应用，通过合理布置取舍碰撞探测器，规划器能广泛适用于多种问题。

对于基于抽样的规划器而言，其标准是提供一个完备性较弱，但仍值得关注的规划形式：如果解的路径存在，那么规划器就会最终找到它。放弃更强的完备性形式，这也要求在有限时间内能报告失效情况，这项技术能解决三自由度以上完备性方法所不能解决的实际问题。完备性弱形式的更详细介绍，安排在5.6.2节。

如何进行抽样构型和构建何种数据结构，不同的规划有不同的方法。5.6.2节将对抽样问题进行更深入的探讨。对于基于抽样的规划器，典型的分为两类：多查询方法和单查询方法。

在第一类中，首先构建路线图，规划器预先计算一次无向图$G$，以便映射出$\mathcal{C}_{free}$空间的连接属性。完成这一步后，相同环境下的多查询回答只需要运用已构建的路线图即可。这类规划器在5.2.1节讲述。

第二类规划方法，通过联机给出规划查询的树数据结构，规划器集中搜索C空间的一部分，以尽可能快地解答具体的查询问题。这类规划将在5.2.2节讲述。

两类方法对于碰撞图元检查的用法是相似的，碰撞探测器的目的就是要报告给定目标几何构型和变换间的所有几何接触[5.16-18]。规划器软件包的实用性在于，能在几分之一秒内完成碰撞查询，这对于基于规划抽样算法的发展至关重要。现代规划采用黑箱（black box）作为碰撞探测器，最初规划器提供所有涉及目标的几何条件，并指出其中哪些是可移动的；然后为验证机器人的构型，向相关的机器人提供运动变换，碰撞探测器回应目标间是否有碰撞。许多软件包对几何模型采用分级表示，以避免计算中全是两个两个地相互作用，并采用二分搜索法来评估碰撞。除了构型外，规划器还必须验证全部路径。一些碰撞探测器返回碰撞距离信息，这可以有效用于推断C空间中的全部邻域。这种提取信息的方法代价很高，但如果采用小步长增量或二分搜索方式逐点验证路径，往往代价更高。一些碰撞探测器设计为步进式的，以便它们能重新使用以前的查询信息，因而速度更快[5.16]。

### 5.2.1 综合查询规划：映射$\mathcal{C}_{free}$的连接性

规划器旨在解答某一静态环境中的多重查询时，在预处理阶段采用将$\mathcal{C}_{free}$的连接性映射到路线图中。该路线具有图$G$的形式，并带有构型顶点和路径边线。如果满足下列性质，则1维曲线的并集为路线图$G$。

1）可达性。由任意$q_G \in \mathcal{C}_{free}$，可简单有效地计算一条路径$\tau$：$[0,1] \to \mathcal{C}_{free}$，以使$\tau(0)=\boldsymbol{q}$，且$\tau(1)=\boldsymbol{s}$。其中$\boldsymbol{s}$为$S(G)$中的任意一点，$S(G)$是G的行迹，为边线和顶点能到达的所有构型合集。这意味着总是可以将规划查询对$\boldsymbol{q}_I$和$\boldsymbol{q}_G$分别与$S(G)$上的某对$\boldsymbol{S}_I$和$\boldsymbol{S}_G$连接起来。

2）连接性保护。第2个条件要求：如果存在路

径$\tau$: $[0, 1] \to \mathcal{C}_{free}$使得$\tau(0)=q_I$，且$\tau(1)=q_G$，则也存在路径$\tau'$: $[0, 1] \to S(G)$，使得$\tau'(0)=q_I$，$\tau'(1)=q_G$，这样就可以避免由于$G$未能捕捉到$\mathcal{C}_{free}$的连接性，而出现解丢失的情况。

概率路线图方法（PRM）[5.19]在计算概率方面，采用的是近似路线图的方式。RPM的预处理阶段，通常可扩展为基于抽样的路线图，步骤如下：

1）初始化。设$G(V, E)$表示一个无向图，初始状态为空。$G$的顶点将对应于无碰撞构型，连接顶点的边线对应于无碰撞路径。

2）构型采样。将从$\mathcal{C}_{free}$中抽样得到的构型$\alpha(i)$，加入顶点集$V$中。这$\alpha(\cdot)$表示无限、密集的样本序列，$\alpha(i)$为这个序列中的第$i$个点。

3）邻域计算。通常在C空间中定义一个度量，$\rho: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$。存在于$V$中的顶点$q$，如果依照度量$\rho$为小距离，则可选为$\alpha(i)$邻域的一部分。

4）边线考虑。对于不属于$G$上相同连接分量$\alpha(i)$的那些顶点$q$，该算法通过边线将其相连。

5）局部规划方法。给定$\alpha(i)$和$q \in \mathcal{C}_{free}$，采用模块来构建路径$\tau_s$: $[0, 1] \to \mathcal{C}_{free}$，使得$\tau(0)=\alpha(i)$，$\tau(1)=q$。采用碰撞检测，$\tau_s$必须通过检查以确保不产生碰撞。

6）边线插入。将$\tau_s$插入$E$，作为由$\alpha(i)$到$q$的边线。

7）终止。通常当预定义的无碰撞顶点数$N$已加入到路线图中时，算法停止。

算法在本质是增量形式的，计算可从一个已存在的图上重复开始。通用的基于抽样的路线图，总结在算法5.1中。

算法5.1
**基于抽样的路线图**
$N$：路线图中包含的节点数

```
G.init() ; i←0;
while i < N do
  if α(i) ∈ C_free then
    G.add_vertex(α(i)) ; i←i+1
    for q ∈ NEIGHBORHOOD(α(i), G) do
        if CONNECT(α(i), q) then
            G.add_edge(α(i), q);
        endif
        end for
    endif
  end while
```

图5.3为算法行为的图形描述。为求解一个查询，将$q_I$和$q_G$连接到路线图，并执行图搜索任务。

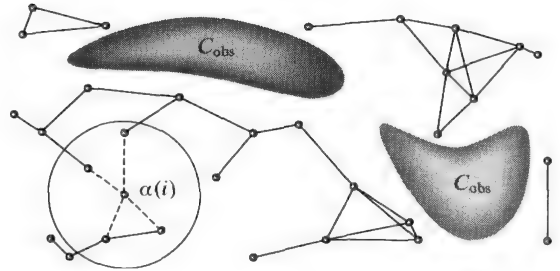



**图5.3 通过逐次将单个新样本与邻近顶点相连，递增构建基于抽样的路线图**

对于原始PRM[5.19]，构型$\alpha(i)$采用随机抽样产生。对于$q$和$\alpha(i)$之间的连接步，算法中采用C空间上的直线路径。在某些情况下，如果$q$和$\alpha(i)$在相同连接分量上，则不用连接。许多后续工作可用于在更少采样点的情况下提高路线图的质量：在$\mathcal{C}_{free}$的边界点（或靠近）进行集中采样的方法见参考文献[5.20, 21]；远离边界点处的移动采样方法见参考文献[5.22, 23]；包含网络的确定性抽样技术见参考文献[5.24]；基于交互可视性的顶点剪枝方法，可大为减少路线图的顶点数[5.25]；基于抽样路线图的理论分析见参考文献[5.24, 26, 27]，并在5.6.2节作了简要论述；文献[5.28]对基于抽样的路线图不同形式进行了实验对比；对于路线图方法中识别狭窄通道的难点问题，有人建议采用网桥测试来进行辨识[5.29]；对于基于概率路径图（PRM）的其他方法见参考文献[5.30-34]。本主题的更多讨论可参阅参考文献[5.5, 7]。

### 5.2.2 单一查询规划：增量搜索

单一查询规划方法集中于一个单一初始目标构型对，通过延伸树型数据结构，探查连续的C空间。数据结构在这些已知构型中初始化，并最终与它们相连。大多数单一查询方法遵循以下步骤：

1）初始化：设$G(V, E)$表示一个无向搜索图，顶点集$V$包含$\mathcal{C}_{free}$中的一个（常为$q_I$）或多个构型的顶点，且边线集$E$为空。$G$的顶点为无碰撞构型，且连接顶点的各边线为无碰撞路径。

2）顶点选择方法：选择一个用于扩展的顶点$q_{cur} \in V$。

3）局部规划方法：对某些$q_{new} \in \mathcal{C}_{free}$，可对应于一个存在于$V$中的顶点，但在不同的树或样本构型上。构建一条路径$\tau_s$：$[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{free}$，使得$\tau(0) = q_{cur}$，$\tau(1) = q_{new}$。采用碰撞检测，则$\tau_s$必须检查以确保不会引起碰撞。如果这一步未能产生一个无碰撞路径段，则转向第2步。

4）在图中插入边线：将$\tau_s$插入$E$中，作为一条从$q_{cur}$到$q_{new}$的边线。如果$q_{new}$还不在$V$中，则它也需要插入。

5）求解检查：确定$G$的编码是否为求解路径。

6）返回第2步：除非满足终止条件，算法将返回第2步继续迭代。这里终止条件一是解已经找到，二是满足设定的终止条件，这种情况下报告算法失败。

在执行过程中，$G$可以组织一个或多个树，这会导致：

1）单向方法。它只包含单棵树，通常根在$q_I$处[5.35]。

2）双向方法。它包含两棵树，通常根在$q_I$和$q_G$处[5.35]。

3）多向方法。它可有两棵以上的树[5.36,37]。采用多棵树的动机在于，在通过狭窄通路寻找出口时，单一树可能存在陷阱；而在相反方向返回时，可能会更容易些。

随着所考虑树数的增多，确定树之间如何进行连接，将变得更为复杂。

**1. 快速搜索密集树**

此类技术的主要想法是，算法应逐渐加强对C空间属性的探测力度。实现这一目标的算法，称为快速搜索随机树（RRT）[5.35]，它可广泛用于快速搜索密集树（RDT），进行任意密度、确定性或随机抽样[5.7]。其基本思想是，通过树上选择的一个扩展点，在搜索过程中引入Voronoi偏置。采用随机样本，顶点选择的概率与Voronoi区域的体积成正比。其树结构概述如下：

算法5.2
**快速搜索密集树**
$k$：算法的搜索步

```
G.init(q_I);
for i = 1 to k do
    G.add_vertex(α(i));
    q_n ← NEAREST(S(G), α(i));
    G.add_edge(q_n, α(i));
end for
```

树从$q_I$开始，在每次迭代中，加入一个边线和顶点。

到目前为止，还没有说明如何到达$q_G$的问题。采用RDT的规划算法有好几种：一种方法是偏置$\alpha(i)$，以便$q_G$能频繁选择（或许每50次迭代就要选择一次）；另外更有效的方法是通过培育两棵树，开发双向搜索算法，通过彼此的$q_I$和$q_G$进行搜索，这大约有一半时间花费在用常规方式扩展每棵树，而另一半时间则花费在对树的连接上。连接树的最简单方式是，让一棵树的最新顶点在扩展另一棵树时替代$\alpha(i)$。其技巧是采用基本扩展算法，将一个RDT连接到另外一个上[5.38]。RDT方法经过不断扩展，现已应用到多个方面[5.37,39-42]，更详细的描述见参考文献［5.5，7］。

**2. 其他算法**

参考文献［5.43-45］中提出了基于扩展空间的规划方法。在这种情况下，由于在顶点周围邻域内的点很少，算法通过选择扩展顶点进行强制搜索。在参考文献［5.46］中，通过自调节随机行走以获取额外性能，其实质是将所有努力集中用于搜索。其他成功的树算法，包括路径定向细分树算法[5.47]及其一些变体[5.48]。在这些文献中，有时很难将基于树的规划器用于普通路径规划中，因为它们中的许多（包括RDT）需要设计为（或应用于）更复杂的问题（见5.4.4节），其性能对于多种路径规划问题也很出色。

## 5.3 替代算法

对于基于抽样的算法，替代方法包括基于势场技术方法和组合方法，它也可以生成路线图，例如单元分解。这些算法能有效解决狭窄类型问题，在这些情况下，更优于5.2节的算法。多数组合算法主要用在理论研究方面，而基于抽样算法的主要动机在于解决应用中的性能问题。当然，经过某些抽象，组合算法也能用于解决实际问题，如移动平面机器人的自主导航问题。

### 5.3.1 组合路线图

有几种算法适用于$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$，且$\mathcal{C}_{obs}$为多边形的情况。这些算法大多虽不能直接扩展到高维情况，但某些基本原理是相同的。最大间隙路线图（或称收缩方法[5.49]）构建路线图时，它使路径尽可能远离障碍物，其路径通过图5.4所示的三种情况形成路线

图，它对应于所有与多边形属性配对的路线。通过生成所有曲线对的可能配对，计算交集并画出路线图，这样就可以在时间 $O(n^4)$ 上构造出路线图（见图5.5）。有些现存的算法能提供更好的渐近运行时间[5.50]，但它们实现起来相当困难。其中最著名的算法运行在 $O(n \lg n)$ 时间上，这里 $n$ 为路线图曲线数[5.51]。

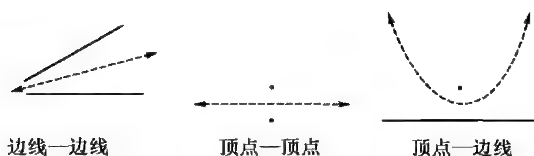



图5.4 Voronoi 路线图线段产生的三种可能情况（第三种情况为二次曲线）

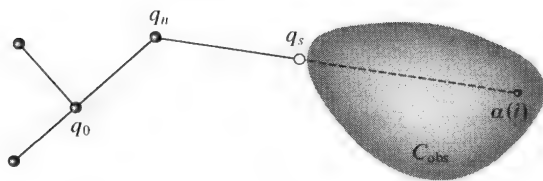



图5.5 如果有障碍物，碰撞检测算法允许边线一直行进到障碍物的边界

如图5.6所示，另一种替代方法是计算最短路径路线图[5.52]。这与上一节提出的路线图不同，因为考虑路径最佳（短），故允许路径可触及至障碍物。顶点的内角大于 $\pi$ 时，路线图的顶点是 $\mathcal{C}_{obs}$ 的反射顶点，当且仅当一对顶点相互可见时，路径图的边线存在，从每个顶点中伸出一条线（这条线称为双切线），该线通过顶点对伸向 $\mathcal{C}_{free}$。对每个反射角采用径向扫描算法，可形成 $O(n^2 \lg n)$-时间结构算法。理论上可以在时间 $O(n^2+m)$ 上计算，其中 $m$ 是路线图上边线的总数[5.53]。

图5.7显示的是垂直单元分解方法。其思想是将 $\mathcal{C}_{free}$ 分解为梯形或者三角形单元，每个单元上的规划是平凡的，因为其为凸面。路线图由这样一系列点构成，这些点放置于每个单元及单元间每条边界的中心处。任何一种图搜索算法均可用于快速找到无碰撞路径。采用平面扫描原理[5.45,55]，单元分解可在 $O(n \lg n)$ 时间上构建。设想一条垂线从 $x=-\infty$ 到 $x=+\infty$ 进行扫描，当遇到多面体的顶点时停下来，在这种情况下，一个单元的边界可能必定位于顶点的上面/或下面，需要在平衡搜索树上保持垂线段的次序，这样才能在时间

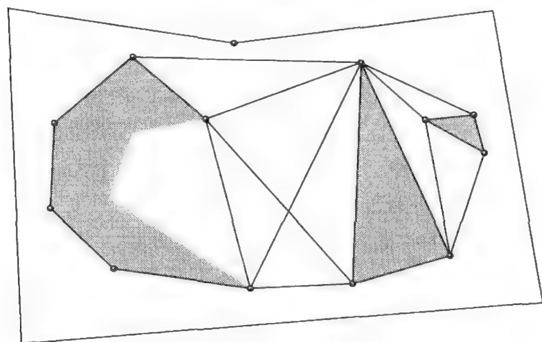


图5.6 最短路径路线图，包括 $\mathcal{C}_{obs}$ 上连续反射顶点间的边及其双切线边

$O(\lg n)$ 内对垂直单元的边界进行限定。整个算法在时间 $O(n \lg n)$ 上运行，因为有 $O(n)$ 个顶点，在这些点处能让扫描线停下来。也就是说，顶点需要一开始就进行排序，这需要时间 $O(n \lg n)$。

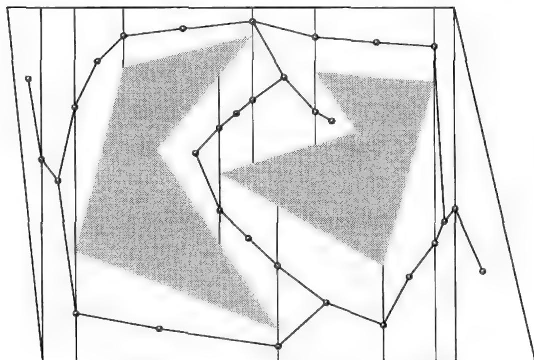


图5.7 垂直单元分解得到的路线图

## 5.3.2 高维路线图

如果将5.3.1节的方法直接扩展到更高维数，可能会更为方便。尽管很遗憾不会发生这种情况，但还是能够从中扩展一些总体思路。考虑高维情况的单元分解，主要有两条要求：①每个单元应该足够简单，以便单元上的运动规划是平凡的；②单元应能很好地组合在一起。对第一条要求，充分条件是单元为凸面，也可以允许为更一般的形状，但在任何情形下，单元都不能含有孔。对第二条要求，充分条件是单元能被组合成一个奇异复形，这意味着对任意两个 $d$ 维单元（$d \leq n$），如果两单元的边界相交（切），那么共同边界本身必须是一个（低维的）完备单元。

在二维多边形 C 空间上，三角法定义的好单元

分解可适用于运动规划。如要找到一个好三角形，就要尽量避免薄三角形，这在计算几何中应加以考虑[5.55]。确定带孔多面体障碍区域的分解时，需要用到最小凸单元数，它为 NP-hard[5.56]。鉴于此，我们仍乐意采用非最佳分解方式。

在三维 C 空间中，如果$\mathcal{C}_{obs}$是多面体，则可采用平面递归扫描，直接对垂直分解方法进行扩展。例如，临界同相轴可能出现在每个 $z$ 坐标上，对其上的点进行二维垂直分解变化时，$x$ 和 $y$ 坐标保持不变。通过机器人在$\mathbb{R}^3$中多面体障碍物间的平移，可以得到多面体的例子；然而最有趣的问题是$\mathcal{C}_{obs}$变为非线性情况。假设$\mathcal{C}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^1$，对应于机器人能够在平面上平动和转动。假设机器人和障碍物都是多边形，对于线段机器人的情形，参考文献［5.57］给出的 $O(n^5)$ 算法能够实现；对于更为一般的模型及 C 空间情况，此方法已很难用于实际问题，而主要用于理论研究，这将在 5.6.3 节进行介绍。

## 5.3.3 势场

运动规划的不同方法，其灵感均来自于不同的避障技术[5.58]。虽然没有明确构建一个路线图，而是构建一个可微的实值函数 $U$: $\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}$，称为势函数，由它导出移动目标的运动。如图 5.8 所示，势的典型构造是：它包含一个吸引分量 $U_a(\boldsymbol{q})$，拉着机器人朝目标运动；另外还包括一个排斥分量 $U_r(\boldsymbol{q})$，推动机器人远离障碍。势函数的梯度为一个矢量 $\nabla U(\boldsymbol{q})=DU(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}=\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}_1}(\boldsymbol{q}),\ \cdots,\ \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}_m}(\boldsymbol{q})\right]^{\mathrm{T}}$，其指向为 $U$ 的局部最大增加方向。定义 $U$ 之后，从 $\boldsymbol{q}_1$ 开始采用梯度下降法，就能计算出路径：

1）$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{q}_1$；$i=0$

2）**while** $\nabla \mathrm{U}(\boldsymbol{q}(i))\neq 0$ **do**

3）$\boldsymbol{q}(i+1)=\boldsymbol{q}(i)+\nabla \mathrm{U}(\boldsymbol{q}(i))$

4）$i=i+1$

然而，这种梯度下降方法并不保证能得到问题的解，因为梯度下降只能到达 $U(\boldsymbol{q})$ 的一个局部最小值，如图 5.9 所示，它可能与目标状态 $\boldsymbol{q}_G$ 并不相符。

既利用势函数，又避免局部最小问题的规划方法，称之为随机势规划[5.59]。其思想是采用多重规划模式，通过随机行走（random walk）来组合势函数。在第 1 重模式中，梯度下降法用至达到一个局部最小值时为止；第 2 重模式是用随机行走来设法避开局部最小值；第 3 重模式是当多次避开局部最小值的努力都已失败时，执行回溯法。这种方法在许多情况下被看作是基于抽样的规划，它也提供了弱完整性保证，但需要参数调整。近来基于抽样的方法达到了更好的性能，它主要通过花费更多时间进行空间搜索，而不是将重点放在势函数上。

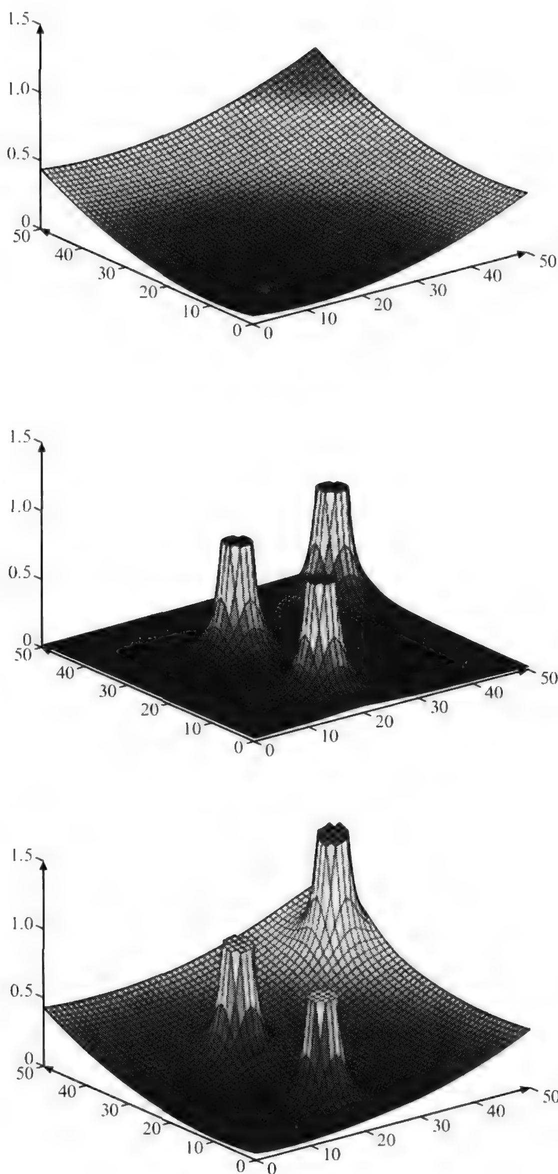


图 5.8　引力和斥力分量定义势函数

势函数的梯度也能用于定义矢量场，它可在任意构型 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}$上对机器人指定一个运动。这种方法的主要优点不仅限于其计算效率，因为它不只是一个单一的路径计算，也是一个反馈控制策略，这使得方法更具鲁棒逆向控制和传感误差。反馈运动规划技术大多

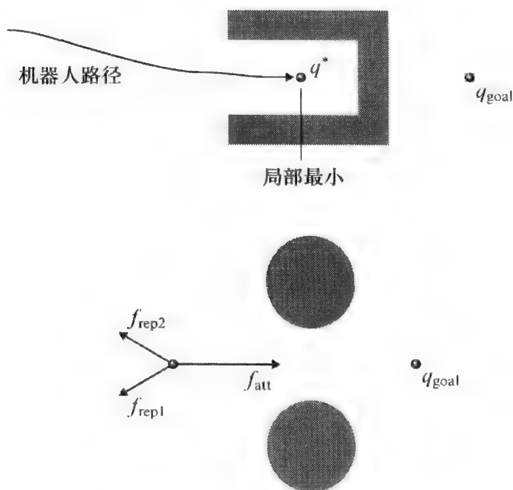



图 5.9 势函数求解局部最小问题的两个例子

是基于导航函数的思想[5.60]，即合理构造势函数，使之只有单一最小值。函数 $\Phi: \mathcal{C}_{free} \to [0, 1]$ 称为导航函数，如果它：

1）是平滑的（或至少在 $k \geqslant 2$ 的 $C^k$ 上平滑）。

2）在 $\boldsymbol{q}_G$ 处具有唯一最小值，C 空间的连接分量包含 $\boldsymbol{q}_G$。

3）在 C 空间的边界上具有均匀最大值。

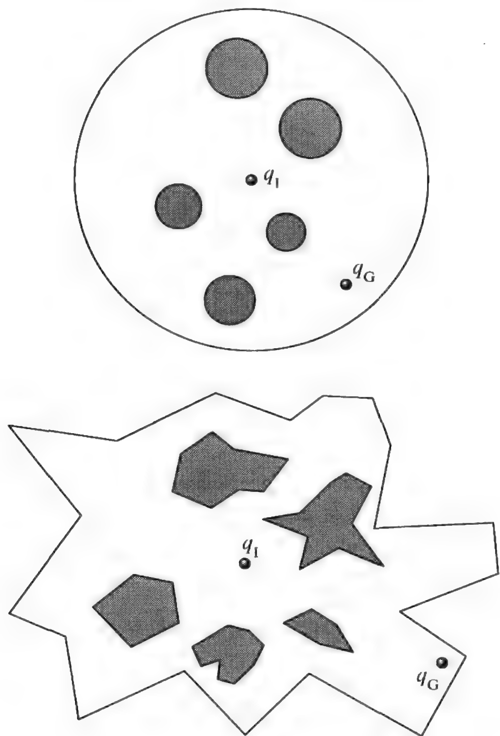



图 5.10 球形空间和星形空间示例

4）且为 Morse，即所有的临界点（如鞍点）是孤立的，可通过小随机扰动加以避免。

如图 5.10 所示，对于只包含球形障碍物的情况，导航函数可以构建成球心为 $\boldsymbol{q}_I$ 的球边界空间。然后它们还可扩展到微分同胚于球空间的大的 C 空间族，例如图 5.10 所示的星形空间。反馈运动策略的详细阐述见本书的第 35、第 36 和第 37 章。

除了局部最小问题之外，对于势函数方法，另一个主要的挑战是如何构建并表示 C 空间，这一难题使得在高维问题中，该技术的应用显得过于复杂。

## 5.4 微分约束

机器人运动通常必须符合全局和局部两种约束，在 $\mathcal{C}$ 上，全局约束以障碍物和关节限位形式加以考虑；局部约束则通过微分方程进行模拟，因而称作微分约束。出于运动学考虑（如轮的接触点）和动力学考虑（如动量矩守恒），约束方程限定了每个点的速度及可能的加速度。

### 5.4.1 概念和术语

设 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 为速度矢量，$\mathcal{C}$ 上的微分方程可表示成隐式形式 $g_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$，或者参数形式 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$。隐式形式更为一般，但往往更难于理解和利用。在参数形式中，矢量值方程预示速度要通过给定的 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 来求，其中 $\boldsymbol{u}$ 为输入，选自于某些输入空间 $U$。设 $T$ 表示时间间隔，并从 $t = 0$ 时刻开始。

为模拟动力学问题，需要将概念扩充到 C 空间的相空间 $\boldsymbol{X}$ 上。通常每个点 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ 表示构型和速度，即 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$。采用隐式形式和参数形式都可能，分别表示为 $g_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$，后者为一种常见的控制系统的定义。注意 $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$，这预示着可以对加速度约束和完整系统动力学进行表达。

在状态空间 $\boldsymbol{X}$ 中进行规划，可引出对 $\boldsymbol{X}_{obs}$ 的直接定义：对于 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，当且仅当 $\boldsymbol{q} \in \mathcal{C}_{obs}$ 时，有 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}_{obs}$。然而，还存在另外一种可能性，它基于必然碰撞区域概念，能直观地反映动力学的规划问题，其定义如下：

$$\boldsymbol{X}_{ric} = \{ x(0) \in \boldsymbol{X} \mid \text{for any } \tilde{u} \in \mathcal{U}_\infty, \; \exists t > 0 \text{ such that } \boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{X}_{obs} \}, \tag{5.4}$$

式中，$x(t)$ 为 $t$ 时刻的状态，可通过控制函数 $\tilde{u}$：$T \to U$，从 $x(0)$ 积分得到；$\mathcal{U}_\infty$ 为预先确定的所有可能控制函数的集合；$X_{ric}$ 表示这样一个状态集：在它上面机器人会发生碰撞；或者由于动量的缘故，不能避免发生碰撞，如图5.11所示。它可被视为一种无形的障碍区域，并随速度增大而增长。

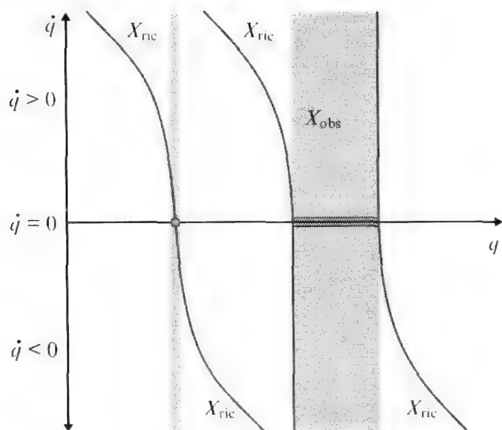



图5.11 必然碰撞区随速度呈平方关系增长

在微分约束规划的总标题下，有许多重要的问题类别，大量研究文献已对此加以关注。在轮式移动机器人的研究中，引入了非完整性规划的术语[5.61]，举个简单的例子：由于汽车不能侧面移动，从而使平行泊停车变得困难。一般情况下，非完整约束为微分等式约束，不能积分成不含导数项的约束形式。机器人学中出现的典型非完整性约束，可以是车轮接触等运动学引起的[5.62]，也可能是起因于动力学。

如果包含约束的规划问题中，至少涉及速度和加速度，该问题常被称为 kinodynamic 规划[5.63]。通常模拟成全驱动系统，表示为 $\ddot{q}=h(q,\dot{q},u)$，其中 $U$ 为包括$\mathbb{R}^n$原点的一个开集（这里 $n$ 是 $U$ 和$\mathcal{C}$的维数）。约束问题可能既是非完整的，又是 kinodynamic 问题，或者二者都不是；然而目前该项还没有更精确的表示。

轨迹规划是另外一个重要概念，它主要用于确定机器手的路径和速度函数问题（如PUMA560）。在下面的处理中，所有这些都称作微分约束规划。

### 5.4.2 约束的离散化

在微分约束下，对有障碍存在的完备性及最优规划问题，仅有的方法是 $X=\mathbb{R}$[5.64] 和 $X=\mathbb{R}^2$[5.65] 双积分系统。为研发这方面的算法，通常需要进行一些离散化处理。对于普通运动规划，只有$\mathcal{C}$需要离散；对于微分约束，除了$\mathcal{C}$（或 $X$）外，$T$ 和 $U$（可能）也需要离散化。

微分约束的离散化是最重要的问题之一。为了有效地求解具有挑战性的规划问题，通常需要对特定的动力学系统，定义运动图元[5.40,66,67]。对微分约束进行离散，一种最简单的方法是构造离散时间模型，它具有三个方面的特点：

1）将时间区间 $T$ 划分为长度为 $\Delta t$ 的时间间隔。这样时间就分成多个阶段，其中 $k$ 阶段预示 $(k-1)\Delta t$ 的时间已经过去。

2）选择动作空间 $U$ 的一个有限子集 $U_d$。如果 $U$ 已经是有限的，则可选择 $U_d=U$。

3）在每个时间步内，动作 $u(t)$ 必须保持为常数。

从初始状态 $x$ 开始，运用离散动作的所有序列，形成可达树。图5.12显示了 Dubins 车上这种树的路径，它是一个小车的运动学模型，该小车以单位速度在平面上行驶，且不能反向运动，树的边线为圆弧和线段。对于常规系统，当 $u$ 给定时，树上的每个轨迹段，可由 $\dot{x}=f(x,u)$ 的数值积分来确定。通常这可视作一个增量模拟器，它获取一个输入后，根据 $\dot{x}=f(x,u)$ 产生一个轨迹段。

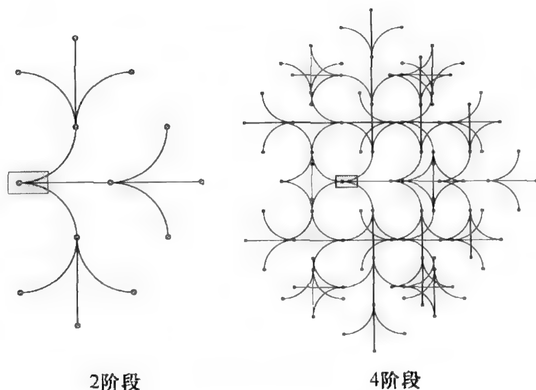



图5.12 三动作 Dubins 车的可达树，第 $k$ 阶段产生 $3^k$ 个新顶点

### 5.4.3 解耦方法

对于轨迹规划等涉及动力学的问题，流行的算法是先将问题解耦为路径规划，再沿着路径计算计时函数，这一步通过对 $(s,\dot{s})$ 空间跨距进行搜索来实现，其中 $s$ 是路径参数，$\dot{s}$ 为其一阶导数。由此可得

到图 5.13，图的上部 $S_{obs}$ 区域是必须要避免的，因为其上机械子系统的运动违反了微分约束条件。目前大多数方法都还是基于文献［5.68，69］等早期工作，用来确定 bang-bang 控制，这意味着要在全速下进行加速和减速的切换。一旦对路径进行约束，该方法可用于确定时间最优轨迹。此外，动力学规划还可用于更为广泛的问题中[5.70]。

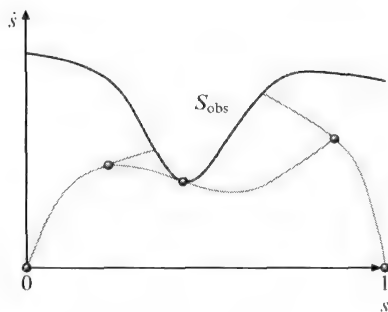



**图 5.13 bang-bang 方法计算时间最优轨迹，通过连接图上的点得到求解轨迹**

对某些约束问题和非完整系统，导向法已发展到可用于有效求解两点的边值问题[5.62,71]。这意味着，对于任意的状态对，可以获得一条忽略障碍本身但满足微分约束的运动轨迹。此外，对于某些系统，已经得到了最优轨迹特征的完备集[5.72,73]。这些基于控制的解耦方法，能直接适用于基于抽样的路线图方法[5.74,75]，其中一种解耦方法是：先在忽略微分约束的情况下，规划出一条路径，然后逐渐将它变换为满足约束的形式[5.62,76]。

### 5.4.4 kinodynamic 规划

由于微分约束下的规划难度很大，因此许多成功的基于抽样的规划算法是在相空间 $\boldsymbol{X}$ 上，直接处理 kinodynamic 问题。

基于抽样的规划算法，通过对一个或多个可达树来进行搜索，在搜索网格时，可画出许多平行线。但对于可达树则更为复杂，因为它们涉及的不一定都是规则的点阵结构。大多数情况下，在可达树的顶点位置处，点会非常密集，因此在固定分辨率下，无法清晰地实现对有界区域的详细搜索。另外也很难设计成这样一种方法，使其成为一个多分辨率网格，其精度可任意调整，以确保分辨率的完备性。

许多算法尝试将可达树转换为点阵形式，这正是原始 kinodynamic 规划工作的基础[5.63]，其中离散时间的近似二重积分 $\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{u}$，需要加到网格上，如图 5.14 所示。这使得可开发一种近似算法来求解 Kinodynamic 规划问题，算法中时间多项式等于近似量 $1/\epsilon$，并采用图元数来定义障碍物。对于全驱动系统，普适化的方法描述见参考文献［5.77］。令人惊异的是，该方法对于某些欠驱动的非完整性系统，甚至也能得到点阵结构[5.77]。

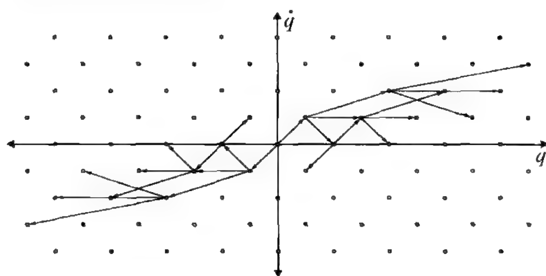



**图 5.14 从原点开始的可达图，经过 3 个阶段后的示例（当加速或减速发生时，真实的边线将是抛物线）**
（注意虽然得到了点阵结构，但在第一阶段行进距离会随着 $|\dot{q}|$ 的增加而增大）

如果可达树不能形成点阵（网格），一种方法是强制在 $\boldsymbol{X}$（或 $\mathcal{C}$）上进行规则单元分解，且只允许每个单元的一个点通过可达图进行扩展，如图 5.15 所示。参考文献［5.78］中介绍了这一思想，他们通过动力学规划，来完成可达图的扩展。每个单元最初标记为有碰撞或无碰撞，但并不访问；当搜索中访问单元时，也要这样进行标记；如果一个新顶点落入到访问过的单元，将不被保存；这具有修剪可达树的效果。

其他相关的方法并不强制可达树形成网格。快速搜索随机树（RRT）方法设计为用这样的方式进行扩展树：在每步迭代中，偏向尽可能多地覆盖新区域[5.79]。基于扩展树概念的规划，力图通过分析邻域来控制树上的顶点密度[5.44]。有向路径细分树规划进行扩展时，同时建立状态空间的自适应分割，以避免在同一空间区域再次采样[5.47,80]。这些方法能偏于加快树向目标的扩展，同时还提供了弱概率完备性保证[5.48]。

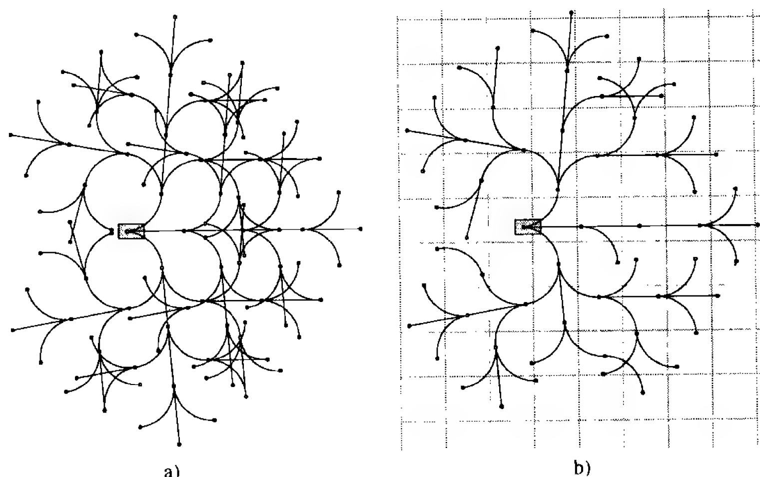



**图5.15 规则单元分解**

a) Dubins 车最初4个阶段的密集可达图 b) 让每个单元至多只有一个顶点，剪掉许多分支后，得到的一个可能搜索图（本例中没有沿 $\theta$ 轴的单元分离）

## 5.5 扩展与变化

本节简要回顾基本运动规划问题的一些其他重要的扩展。

### 5.5.1 闭式运动链

在许多情况下，机器人可能由连杆通过闭环形式组成。这方面有许多重要应用，如两臂抓住同一个物体，则形成了一个环；又如人形机器人双脚触地，也形成一个环。对于并联机器人，还有意设计成环[5.81]，其经典的例子为 Stewart-Grough 平台。为模拟闭链问题，就要将环打开以便得到连杆的运动树。主要的复杂性是$\mathcal{C}$上引入了 $h(\boldsymbol{q})=0$ 形式的约束，它要求对环进行保留，这对于大多数规划算法来说遇到了很大麻烦，因为没有环的$\mathcal{C}$参数是可用的。闭环约束只能将规划限制在无给出参数的低维$\mathcal{C}$子集上，因为计算参数一般很困难或根本不可能[5.82]，尽管对某些特殊情况，也取得了一定进展[5.83]。

基于抽样方法能广泛适用于处理封闭链问题。其主要困难在于，$\mathcal{C}$上的样本 $\alpha(i)$ 的构型不太容易满足封闭性。在参考文献 [5.84] 中，RRT 和 PRM 都能适用于封闭链，而 RRT 更好，这是因为在 PRM 中，将样本移到封闭子空间时，要付出较高的优化代价，而 RRT 不需要样本进入子空间。对于参考文献 [5.85] 中的 PRM 算法，将链路解耦成主动链和被动链，接下来通过逆向动力学计算，能极大地提升该方法的性能。引入随机闭环发生器（RLG）后，该想法得到了进一步的改进。在此基础上，一些更具挑战性的闭链规划问题，其求解方法见参考文献 [5.86]。

### 5.5.2 操作规划

在大多数形式的运动规划中，机器人是不允许接触障碍物的。假设改为期望通过操作对象与环境交互作用，其目标可能是将物体从一个地方转移到另外地方，或者重新对目标进行整理收集，这将导致出现一类混合运动规划问题：它混合了离散空间和连续空间。离散模式对应于机器人是否正在搬运部件（part）[5.87]，在过境模式中，机器人向着部件运动，在转移模式中，机器人搬运部件。两种模式之间的转换需要满足特定的抓取和稳定性条件。装配规划是一种重要的操作规划的变体，其目标是将各个部件安装在一起，使之成为一件装配产品[5.88]。大部分运动规划工艺，都对机器人与对象之间的各种交互作用，作了限制性假设。更为丰富的操作规划模型，参见参考文献 [5.89]。

### 5.5.3 时变问题

假设工作空间包含移动障碍物，其轨迹为时间的函数。设 $T\subset\mathbb{R}$ 表示时间区间，它可能有界，也可能无界。状态 $\boldsymbol{X}$ 定义为 $\boldsymbol{X}=\mathcal{C}\times T$，其中$\mathcal{C}$就是通常的机器人 C 空间。$\boldsymbol{X}$ 中的障碍区域表示为

$$\boldsymbol{X}_{obs}=\{(\boldsymbol{q},t)\in\boldsymbol{X}\mid\mathcal{A}(\boldsymbol{q})\cap\mathcal{O}(t)\neq\emptyset\}\quad(5.5)$$

式中，$\mathcal{O}(t)$ 为时变障碍。许多规划算法均适用于 $\boldsymbol{X}$，它只比$\mathcal{C}$多一维，问题的主要复杂性在于时间必须始终沿着过 $\boldsymbol{X}$ 的路径增加。

对这个问题最简单的算法版本是对机器人没有速度限制。在这种情况下，几乎所有的基于抽样算法均适用，除了路径是有向的以便安排时间进程外，增量搜索和抽样方法也几乎不加修改就能应用。对于时变问题，采用双向方法则比较困难，因为由于时间的依赖性，目标通常不是一个不动的单一点。基于抽样的路线图虽然也可以使用，但需要采用有向路线图，其中必须对每条边线定向，使其产生时间单调路径。

如果运动模型是代数的（即表达式为多项式），则 $\boldsymbol{X}_{\text{obs}}$是半代数的，它可以采用柱形代数分解。如图5.16所示，如果 $\boldsymbol{X}_{\text{obs}}$ 为多面体，则可使用垂直分解。最好是先沿着 $T$ 轴扫描平面，当线性运动改变时，则在临界时间上停止。

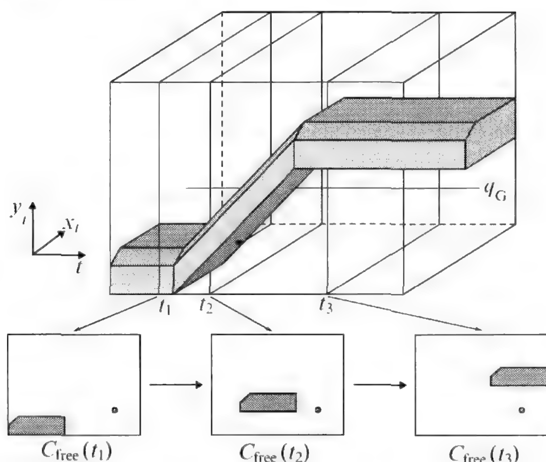



**图5.16 线性障碍运动的时变实例**

机器人移动避障问题中，迄今为止还没有对速度加以考虑。显然如果求解结果是需要机器人以任意快的速度移动，这在许多应用中并不合切实际。为朝着构造现实模型发展，第一步就是要对机器人的速度做出限制，然而令人遗憾的是，这个问题相当复杂，即便是平面障碍的分段线性运动，这一问题的难度级别已属于 PSPACE-hard[5.90]。此外，参考文献［5.91］提出了基于最短路径路线图的完备性算法。

一种替代方案是将问题定义在$\mathcal{C}\times T$上，并解耦为路径规划部分和运动时序部分。首先计算缺少障碍物时的无碰撞路径规划，然后通过对路径确定计时函数（时间尺度）完成二维空间的搜索。

## 5.5.4 多机器人系统

对基本运动规划问题做些简单扩展，就能用于处理包括自相交在内的多体机器人问题，然而重要的是要指定刚体对之间哪些碰撞是不能接受的。例如，机械臂的连续连杆则是允许接触的。

多机器人系统的运动规划问题一直倍受关注。假设有 $m$ 个机器人，同时考虑所有机器人的构型，其状态空间定义为：

$$\boldsymbol{X}=\mathcal{C}^1\times\mathcal{C}^2\cdots\times\mathcal{C}^m \tag{5.6}$$

状态 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ 指所有机器人的构型，可表示为 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{q}^1,\boldsymbol{q}^2,\cdots,\boldsymbol{q}^m)$，$\boldsymbol{X}$ 的维数为 $N$，其中 $N=\sum_{i=1}^{m}\dim(\mathcal{C}^i)$。

在状态空间中，障碍区域的来源有两个：①机器人-障碍物碰撞；②机器人-机器人碰撞。对每个 $i$，$1\leqslant i\leqslant m$，在与障碍区域$\mathcal{O}$冲突时，对应于机器人$\mathcal{A}^i$的 $\boldsymbol{X}$ 子集为

$$X_{\text{obs}}^i=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\mathcal{A}^i(\boldsymbol{q}^i)\cap\mathcal{O}\neq\emptyset\} \tag{5.7}$$

此模型属于机器人-障碍物碰撞。

对机器人的每对$\mathcal{A}^i$和$\mathcal{A}^j$，$\mathcal{A}^i$与$\mathcal{A}^j$冲突时，其相应的 $\boldsymbol{X}$ 子集为

$$X_{\text{obs}}^{ij}=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\mathcal{A}^i(\boldsymbol{q}^i)\cap\mathcal{A}^j(\boldsymbol{q}^j)\neq\emptyset\} \tag{5.8}$$

合并式（5.7）和式（5.8）到式（5.9），可得到 $\boldsymbol{X}$ 中的障碍区域 $\boldsymbol{X}_{\text{obs}}$为

$$\boldsymbol{X}_{\text{obs}}=\left(\bigcup_{i=1}^{m}X_{\text{obs}}^i\right)\cup\left(\bigcup_{ij,i\neq j}X_{\text{obs}}^{ij}\right). \tag{5.9}$$

一旦给出了这些定义，任何通用的规划算法都可以使用，因为除了维数 $N$ 可能很高之外，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}_{\text{obs}}$与$\mathcal{C}$和$\mathcal{C}_{\text{obs}}$并无不同。直接在 $\boldsymbol{X}$ 上进行规划的方法称为集中。$\boldsymbol{X}$ 的高维问题促进了解耦方法的发展，用于对每个机器人独立规划方面的问题进行处理。解耦方法通常更为有效，但往往以牺牲完备性为代价。早期的解耦方法为优先规划[5.92,93]，其中在对第 $i$ 个机器人计算路径和计时函数时，将前面的 $i-1$ 个机器人处理为沿其路径移动的障碍物。另一种解耦方法是固定路径协调方法，它对每个机器人独立规划路径，然后通过 $m$ 维协调空间计算无碰撞路径，再确定计时函数。在协调空间上，每个轴对应于一个机器人路径定义域，图5.17为一个示例。这一思想已被推广到路线图的协调问题中[5.95,96]。

## 5.5.5 预报不确定性

如果执行的规划是不可预报的，则需要进行反馈处理。不确定性可模拟为隐式的，意味着规划能对将

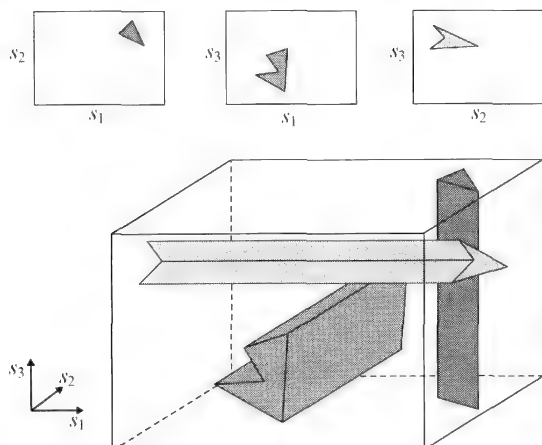



图5.17 坐标数为$m$的机器人，其障碍空间通常为柱形，全部$\frac{1}{2}m(m+1)$个轴对齐的二维投影集，反映了$X_{obs}$的完备性特性

来未预料的构型作出响应；或者为显式的，表示不确定性特点已在规划中做了分析。基于势函数的方法，是实现反馈运动规划的一种方式。

规划可表示为$\mathcal{C}_{free}$上的一个矢量场，其中每个矢量表示要求的速度。矢量场的积分曲线在不离开$\mathcal{C}_{obs}$的前提下，应该流入到目标上。如果与动力学有关，则矢量场可由基于加速度的控制模型来追踪：

$$u = K(f(q) - \dot{q}) + \nabla_{\dot{q}} f(q) \qquad (5.10)$$

式中，$K$为标量形式的增益常数（放大系数）。替代地，可在相空间$X$上直接设计速度场，但在一般条件下，还没有能够有效计算这种场的方法。别处也可以将反馈控制问题考虑为带有隐式的、$X$上的非线性约束。

如果不确定性模拟为显式的，则可得反自然博弈问题，其中由特别决策者引起的不确定性称为自然，自然的决策可模拟为非定常的，这表示指定了一组可能的动作；或者为概率性的，这表示指定了自然动作的概率分布（或概率密度）。在非定常不确定性下，通常运用最坏情况分析来选择规划；在概率不确定性下，通常运用期望情况分析。对这类问题的分析方法很多，其中包括估值迭代、Dijkstra-like算法，强化学习算法[5.7]。

### 5.5.6 传感不确定性

考虑有限传感下解决定位、地图构建、操作、目标跟踪，以及追逃（躲猫猫）等任务。如果在执行过程中，当前构型或状态是未知的，则问题会变得非常困难。从传感器获取信息，问题自然就涉及到信息空间（或I空间，见参考文献［5.7］的第11章）。状态量可能包括构型、速度甚至环境地图（如障碍物）。最基本的I空间就是在执行过程中获得的所有历史数据集，这些数据包括所有传感观测、以前的动作，以及初始条件。本文开展有效算法的目的，是为了确定信息映射，从而减小I空间的尺度和复杂度，以便在采用信息反馈进行规划时便于计算。传统方式采用信息状态来作为估计状态，这对于许多任务的求解是充分的，但通常是不必要的。有可能设计并成功执行一项规划，而甚至不用知道当前的状态，这会导致出现更多的鲁棒性机器人系统，它们由于降低了传感要求，因而制造成本会更便宜。对于与此话题相关的更多材料，可参阅本书第3篇的章节。

## 5.6 高级问题

本节涵盖了一系列更加高级的问题，例如拓扑结构和抽样理论，以及它们对运动规划器的性能影响。最后一小节将专门讨论代数几何计算技术，用于实现一般情况下的完备性，而不是讨论实用性问题，作为一个上界，用以获取最佳渐进运行时间。

### 5.6.1 构型空间的拓扑

**1. 流形**

C空间拓扑重要的一个原因是它影响表示法；另一个原因是，如果路径规划算法能在拓扑空间求解问题，那么该算法可结转到拓扑等价空间上。

为了描述C空间的拓扑，有如下重要定义：映射$\phi: S \to T$称为同胚（同拓扑），如果$\phi$为双射，且$\phi$和$\phi^{-1}$都连续。当这样一个映射存在时，$S$和$T$被称为是同胚的。如果对$\mathbb{R}^n$局部同胚，集合$S$为一个$n$维流形，这意味$S$上的每个点拥有一个邻域，对$\mathbb{R}^n$是同胚的。更多详情参见参考文献［5.97，98］。

在绝大多数运动规划问题中，构型空间是一个流形。C空间不是流形的例子是，封闭的单位正方形：$[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2$，它是通过将一维边界粘贴到二维开集$(0,1)\times(0,1)$上，而得到的一个带边流形。当C空间是一个流形时，则恰好可以用$n$个参数来表示它，其中$n$是构型空间的维数。尽管一个$n$维流形可以采用尽可能少的$n$个参数来表示，但由于约束条件，它可能更方便采用高维参数表示法。例如：单位圆可通过将$\mathbb{S}^1$嵌入$\mathbb{R}^2$，表示为$\mathbb{S}^1=\{(x,$

$y)x^2+y^2=1\}$。类似的，圆环面 $T^2$ 可嵌入 $\mathbb{R}^3$。

**2. 表示法**

嵌入到更高维的空间可以方便C空间的许多操作。例如空间中刚体的姿态（方位）可用 $n\times n$ 的实数矩阵表示；$n^2$ 矩阵必定满足一个光滑等式约束数，使得这个矩阵的流形为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子流形。一个优点是这些矩阵在流形中相乘得到另外一个矩阵，例如，$n$ 维空间（$n=2$ 或3）中刚体的姿态可用 $SO(n)$ 描述，这里 $SO(n)$ 为所有 $n\times n$ 旋转矩阵的集合。刚体的位姿（位置和姿态）可用 $SE(n)$ 表示，这里 $SE(n)$ 为所有 $n\times n$ 个齐次变换矩阵。这些矩阵群可用于：①表示刚体构型；②改变用于构型表示法的坐标系；③置换构型。

确定 $SO(3)$ 参数的方法很多[5.99]，但当用 $\mathbb{S}'$ 表示二维旋转时，单位四元素保持了C空间的拓扑。四元素已在第一章做过介绍，而这里单位四元素和三维旋转矩阵间有一个2对1的对应关系，这使得拓扑问题类似于二维旋转中0和 $2\pi$ 等价问题，解决的办法是申明 $\mathbb{S}^3$ 上对极点是等价的。在规划中，只有 $\mathbb{S}^3$ 的上半球是需要的，而且穿越赤道的路径，瞬间会重新出现在 $\mathbb{S}^3$ 的对面，回到北半球。在拓扑当中，这称为实射影空间：$\mathbb{R}\mathbb{P}^3$。因此三维物体的C空间上，只有转动是 $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$。如果平动和转动都允许，则为 $SE(3)$，即所有 $4\times4$ 齐次变换矩阵，得

$$\mathcal{C}=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \tag{5.11}$$

它是6维的。构型 $\boldsymbol{q}\in\mathcal{C}$ 可采用带有7个坐标（$x$，$y$，$z$，$a$，$b$，$c$，$d$）的四元素表示，其中 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$。

## 5.6.2 抽样理论

因为现今对于运动规划最成功的算法都是5.2节提出的基于抽样的构架，抽样理论已成为运动规划的相关问题。

**1. 构型/状态空间中的矩阵**

事实上，所有基于抽样的方法，都需要在 $\mathcal{C}$ 上定义某种距离。例如，基于抽样的路线图方法，给定一个用距离定义的邻域，选择候选顶点去连接一个新构型。类似的，快速搜索密集树方法，从最近的树节点将树扩展到一个新的样本构型。通常，定义一个度量 $\rho:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}$，它满足标准公理：非负性、自反性、对称性和三角不等式。

在构建度量时出现了两个难题：①$\mathcal{C}$ 的拓扑结构必须遵守；②个别不同的量，如线位移和角位移，必须以某种方式进行比较。为了说明第二个问题，在 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ 空间上，定义一个度量 $\rho_z$，

$$\rho_z(z,z')=\rho_z(x,y,x',y')=c_1\rho_x(x,x')+c_2\rho_y(y,y') \tag{5.12}$$

式中，$c_1$ 和 $c_2$ 是任意的正常数，代表两个分量的相关权重。对于二维旋转 $\theta_i$，表示为 $a_i=\cos\theta_i$，$b_i=\sin\theta_i$，则可用的度量为

$$\rho(a_1,b_1,a_2,b_2)=\cos^{-1}(a_1a_2+b_1b_2) \tag{5.13}$$

通过如下定义可得到三维等价量

$$\rho_0(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2)=\cos^{-1}(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2) \tag{5.14}$$

式中，每个 $\boldsymbol{h}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$ 是一个单位四元素。通过各自的双极点辨识，度量定义为 $\rho(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2)=\min(\rho_0(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2),\rho_0(\boldsymbol{h}_1,-\boldsymbol{h}_2))$。对于单位球上的路径约束，可在 $\mathbb{R}^4$ 上计算最短距离。

在一些算法中，在 $\mathcal{C}$ 上定义体积可能也很重要。这通常需要引入一个测度空间，对每一个体积函数（称为测度）必须满足类似于概率公理的这样一些公理，但不需要归一化。对于每个变换，必须仔细以这样的方式来定义体积，即它关于变换为不变量，这个体积称作Haar测度。采用度量的定义式（5.13）和式（5.14），通过球来定义的体积，实际上已满足这一关系。

**2. 概率抽样与确定性抽样**

C空间的抽样可分为概率性和确定性两种。无论哪种方式，通常需要获得一个样本的密集序列 $\alpha$，这意味着作为样本数的限定值趋于无穷大时，样本任意接近 $\mathcal{C}$ 中的点。对于概率性抽样，这个密集性（以概率1）确保了规划算法的概率完备性。对于确定性抽样，它确保了分辨率完备性。这意味着如果解存在，算法要保证能找到它，否则算法可能会一直运行下去。

对于概率抽样，使用均匀概率密度函数，在 $\mathcal{C}$ 上随机选择样本。要通过有意图的方式获得均匀性，应该采用Haar测度，这在许多情况下是简单直接的，而 $SO(3)$ 则是棘手的。均匀的（关于Haar测度）随机四元素可通过如下方式选择：随机地选择三个点 $u_1$，$u_2$，$u_3\in[0,1]$，且令

$$\boldsymbol{h}=(\sqrt{1-u_1}\sin2\pi u_2,\ \sqrt{1-u_1}\cos2\pi u_2,\ \sqrt{u_1}\sin2\pi u_3,\ \sqrt{u_1}\cos2\pi u_3) \tag{5.15}$$

虽然随机样本在某种意义上是均匀的，但它们也需要有一些不规则性，以满足统计检验。这促进了确定性抽样方案的发展，以提供更好的性能[5.101]。取代随机性的确定性抽样技术旨在优化标准，例如偏差与离差。偏差使采样中的规律性恶化，它的频繁出现会给数值积分带来麻烦；离差给出了最大空球（不

含样本）的半径，这样，离差快速回落表示整个空间迅速搜索。确定性搜索可能是不规则的邻域结构（出现时很像随机抽样），或者为规则的邻域结构，表示点沿网格或格点排列。更详细的运动规划相关介绍，参见参考文献［5.7］。

### 5.6.3 代数几何计算技术

基于抽样的算法，具有良好的实用性，这只是在付出较弱完备性代价下就实现了。另一方面，完备性算法是本节的焦点，它能推断出规划问题的无解情况。

只要$\mathcal{C}_{obs}$用代数表面的曲面片（patch）来表示，完备性算法就能解决几乎所有的运动规划问题，从形式上讲，该模型必须是半代数的，这意味着它由$q$上变元多项式根的并集和交集组成，且为了可计算性，多项式系数必须为有理数（否则根可能无有限表达）。具有有理系数的多项式，其所有根的集合称为实代数数，它具有很多好的计算性能。关于实代数数的精确表示和计算，更多信息见参考文献［5.12，102-104］，对于代数几何的介绍见参考文献［5.82］。

采用基于代数几何的技术，第一步是将模型转换成为所需的多项式。假如模型中的机器人$\mathcal{A}$和障碍物$\mathcal{O}$都是半代数的（这包括多项式模型），对于任何附加于二维和三维构件数，运动变换可以用多项式表示。由于多项式变换后，产生的还是多项式，故变换后的机器人模型仍为多项式。通过仔细考虑所有的接触类型，计算出由$\mathcal{C}_{obs}$组成的代数表面，这里机器人特征（表面、边线、顶点），要与障碍物特征配对[5.6,7,9,105]，在大多数应用中，这一步往往会产生过多的模型图元。

一旦得到了半代数表示，就能使用来自代数几何的强力技术。其中最知名的算法是柱形代数分解[5.102,106,107]，它提供了求解运动规划问题所需的信息。此方法的最初目的是用来确定是否 Tarski sentences（它们涉及计量和多项式）可以满足并找到一个不涉及计量的等价表达式。柱形代数分解生成的单元有限集，其中多项式的符号保持不变。这种方法系统地实现了条件满足和计量消除，它经过 *schwartz* 和 *sharir*[5.104] 验证，可用于求解运动规划问题。

该方法概念简单，但在技术细节上还有许多困难。称为柱形分解，是因为此处的单元都构织成垂直的立柱单元，其二维例子如图 5.18 所示。如图 5.19 所示，有两种类型的临界同相轴，在临界点上射线束朝两个垂直方向无限延长。这里的分解不同于图 5.7 的垂直分解，因为那里的射线只要延伸至找到下一个障碍物即止，而这里是为了获得单元柱。

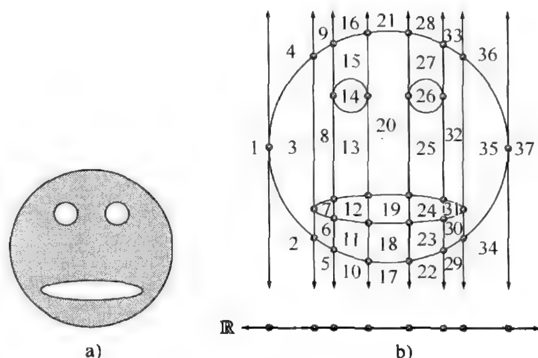



**图 5.18 立柱单元的二维例子**

a）具有四个图元的人脸模型 b）脸部的柱形代数分解

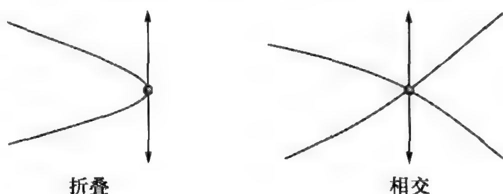



**图 5.19 当垂直方向有表面折叠或者表面相交时，就会出现临界点**

在$n$维中，每个柱（列）表示一个单元链，第一个和最后一个单元是$n$维的且无界，剩余的单元是都有界的，并在$n-1$维和$n$维间交替。有界$n$维单元的上下界，由单一多元多项式的根来确定，这使得对单元及其连接性的描述变得简单。为计算这样的单元分解，算法需要构建一个投影的级联链。在第一步，$\mathcal{C}_{obs}$从$\mathbb{R}^n$投影到$\mathbb{R}^{n-1}$，接下来投影到$\mathbb{R}^{n-2}$，这样重复直到得到$\mathbb{R}$，它为带有一个单变量的多项式，并在所有临界边界设置位置编码；在算法的第二阶段，进行一系列的提升，每次提升都在$\mathbb{R}^i$上获取多项式和单元分解，并将其通过单元柱提升到$\mathbb{R}^{i+1}$。单个提升的示例见图 5.18b。整个算法的运行时间，取决于用来执行代数计算的具体方法。总的运行时间，需要对运动规划使用柱形代数分解，边界为$(md)^{O(1)^n}$，其中$m$为描述$\mathcal{C}_{obs}$的多项式数（一个大数），$d$为最大代数次数。（它看似对$O(\cdot)$为奇数，并出现在表达式的中间。在本文情况下，它表示存在某个$c\in[0,\infty)$，使运行时间在$(md)^{c^n}$上有界，注意整个公式前面的另外一个$O$并非必须。）需要记住

的最主要一点是，算法在$\mathcal{C}$的维数上是双指数（甚至单元数也是双指数）的。

虽然执行柱形分解对于解决运动规划是充分的，但与必要性相比，它计算了更多的信息，这也促使了Canny路线图算法的出现[5.12]。该算法直接通过半代数集产生路线图，而不通过沿路构建单元分解，因为在柱形代数分解中，有许多双指数单元，为消除这种结构需要支付代价。而通过Canny路线图方法得到的结果，在时间上求解运动规划问题时，无论多项式数还是多项式代数次数，都还是一个多项式，但在维数上仅是单指数的[5.12]。

算法的基本思想是，对$\mathbb{R}^n$中的$\mathcal{C}_{obs}$，找出在$\mathbb{R}^2$上的轮廓线，即通过该方法找到零维的临界点和一维的临界曲线。临界曲线为路线图的边线，临界点为$\mathcal{C}_{obs}$上（$n-1$）维的曲面片，通过递归算法得到的影像点，这样会贡献更多的临界点和临界曲线。该曲线被添加到路线图中，算法再次在临界点上递归，直到递归迭代在$n=2$时中止。Canny的结果表明，临界曲线的合集，保护了$\mathcal{C}_{obs}$（并因此也保护了$\mathcal{C}_{free}$）的连接性。面临的一些技术问题是：①算法只对$\mathcal{C}_{obs}$的分层进入流形起作用；②算法具有很强的一般位置假设，以至于很难满足；③路径实际上是沿着$\mathcal{C}_{free}$的边界来考虑的；④此方法不能产生参数化的求解路径。对于Canny算法及其他重要的细节改进，见参考文献［5.102］。

## 5.7 结论与扩展阅读

我们在本章简要纵览了运动规划问题，这是一个丰富而活跃的研究领域。更多详情，推荐两本新书供读者参考（参考文献［5.5，7］），也可以查阅一些经典的论文和书籍（参考文献［5.4，6］），以及近来的研究成果（参考文献［5.2，3］），此外还可参考本章罗列的相关手册章节。

## 参考文献


5.1 J.H. Reif: Complexity of the mover's problem and generalizations, IEEE Symp. Found. Comput. Sci. (1979) pp. 421–427

5.2 H.H. Gonzalez-Banos, D. Hsu, J.C. Latombe: Motion planning: Recent developments. In: *Automous Mobile Robots: Sensing, Control, Decision-Making and Applications*, ed. by S.S. Ge, F.L. Lewis (CRC, Boca Raton 2006)

5.3 S.R. Lindemann, S.M. LaValle: Current issues in sampling-based motion planning. In: *Robotics Research: The Eleventh International Symposium*, ed. by P. Dario, R. Chatila (Springer, Berlin 2005) pp. 36–54

5.4 J.T. Schwartz, M. Sharir: A survey of motion planning and related geometric algorithms, Artif. Intell. J. **37**, 157–169 (1988)

5.5 H. Choset, K.M. Lynch, S. Hutchinson, G. Kantor, W. Burgard, L.E. Kavraki, S. Thrun: *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations* (MIT Press, Cambridge 2005)

5.6 J.C. Latombe: *Robot Motion Planning* (Kluwer, Boston 1991)

5.7 S.M. LaValle: *Planning Algorithms* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2006)

5.8 S. Udupa: Collision detection and avoidance in computer controlled manipulators. Ph.D. Thesis (Dept. of Electical Engineering, California Institute of Technology 1977)

5.9 T. Lozano-Pérez: Spatial planning: A configuration space approach, IEEE Trans. Comput. **C-32**(2), 108–120 (1983)

5.10 J.T. Schwartz, M. Sharir: On the piano movers' problem: III. Coordinating the motion of several independent bodies, Int. J. Robot. Res. **2**(3), 97–140 (1983)

5.11 J.T. Schwartz, M. Sharir: On the piano movers' problem: V. The case of a rod moving in three-dimensional space amidst polyhedral obstacles, Commun. Pure Appl. Math. **37**, 815–848 (1984)

5.12 J.F. Canny: *The Complexity of Robot Motion Planning* (MIT Press, Cambridge 1988)

5.13 D. Halperin, M. Sharir: A near-quadratic algorithm for planning the motion of a polygon in a polygonal environment, Discrete Comput. Geom. **16**, 121–134 (1996)

5.14 J.E. Hopcroft, J.T. Schwartz, M. Sharir: On the complexity of motion planning for multiple independent objects: PSPACE-hardness of the warehouseman's problem, Int. J. Robot. Res. **3**(4), 76–88 (1984)

5.15 J. Canny, J. Reif: New lower bound techniques for robot motion planning problems, IEEE Symp. Found. Comput. Sci. (1987) pp. 49–60

5.16 M.C. Lin, J.F. Canny: Efficient algorithms for incremental distance computation, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1991)

5.17 P. Jiménez, F. Thomas, C. Torras: Collision detection algorithms for motion planning. In: *Robot Motion Planning and Control*, ed. by J.P. Laumond (Springer, Berlin 1998) pp. 1–53

5.18 M.C. Lin, D. Manocha: Collision and proximity queries. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry, 2nd Ed*, ed. by J.E. Goodman, J. O'Rourke (Chapman Hall/CRC, New York 2004) pp. 787–807

5.19 L.E. Kavraki, P. Svestka, J.C. Latombe, M.H. Overmars: Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces, IEEE Trans. Robot. Autom. **12**(4), 566–580 (1996)

5.20 N.M. Amato, O.B. Bayazit, L.K. Dale, C. Jones, D. Vallejo: OBPRM: an obstacle-based PRM for 3D workspaces, Workshop Algorith. Found. Robot. (1998) pp. 155–168

5.21 V. Boor, M.H. Overmars, A.F. van der Stappen: The Gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners, IEEE Int. Conf. Robot. Autom.

(1999) pp. 1018–1023
5.22 C. Holleman, L.E. Kavraki: A framework for using the workspace medial axis in PRM planners, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2000) pp. 1408–1413
5.23 J.M. Lien, S.L. Thomas, N.M. Amato: A general framework for sampling on the medial axis of the free space, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2003)
5.24 S.M. LaValle, M.S. Branicky, S.R. Lindemann: On the relationship between classical grid search and probabilistic roadmaps, Int. J. Robot. Res. **23**(7/8), 673–692 (2004)
5.25 T. Siméon, J.-P. Laumond, C. Nissoux: Visibility based probabilistic roadmaps for motion planning, Adv. Robot. **14**(6), 477–493 (2000)
5.26 J. Barraquand, L. Kavraki, J.-C. Latombe, T.-Y. Li, R. Motwani, P. Raghavan: A random sampling scheme for robot path planning. In: *Proceedings International Symposium on Robotics Research*, ed. by G. Giralt, G. Hirzinger (Springer, New York 1996) pp. 249–264
5.27 A. Ladd, L.E. Kavraki: Measure theoretic analysis of probabilistic path planning, IEEE Trans. Robot. Autom. **20**(2), 229–242 (2004)
5.28 R. Geraerts, M. Overmars: Sampling techniques for probabilistic roadmap planners, Int. Conf. Intell. Auton. Syst. (2004)
5.29 D. Hsu, T. Jiang, J. Reif, Z. Sun: The bridge test for sampling narrow passages with probabilistic roadmap planners, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2003)
5.30 R. Bohlin, L. Kavraki: Path planning using lazy PRM, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2000)
5.31 B. Burns, O. Brock: Sampling-based motion planning using predictive models, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Autom. (2005)
5.32 P. Isto: Constructing probabilistic roadmaps with powerful local planning and path optimization, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (2002) pp. 2323–2328
5.33 P. Leven, S.A. Hutchinson: Using manipulability to bias sampling during the construction of probabilistic roadmaps, IEEE Trans. Robot. Autom. **19**(6), 1020–1026 (2003)
5.34 D. Nieuwenhuisen, M.H. Overmars: Useful cycles in probabilistic roadmap graphs, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2004) pp. 446–452
5.35 S.M. LaValle, J.J. Kuffner: Rapidly-exploring random trees: progress and prospects. In: *Algorithmic and Computational Robotics: New Direction*, ed. by B.R. Donald, K.M. Lynch, D. Rus (A. K. Peters, Wellesley 2001) pp. 293–308
5.36 K.E. Bekris, B.Y. Chen, A. Ladd, E. Plaku, L.E. Kavraki: Multiple query probabilistic roadmap planning using single query primitives, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (2003)
5.37 M. Strandberg: Augmenting RRT-planners with local trees, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2004) pp. 3258–3262
5.38 J. J. Kuffner, S. M. LaValle: An efficient approach to path planning using balanced bidirectional RRT search, Techn. Rep. CMU-RI-TR-05-34 Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh (2005)
5.39 J. Bruce, M. Veloso: Real-time randomized path planning for robot navigation, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Autom. (2002)
5.40 E. Frazzoli, M.A. Dahleh, E. Feron: Real-time motion planning for agile autonomous vehicles, AIAA J. Guid. Contr. **25**(1), 116–129 (2002)
5.41 M. Kallmann, M. Mataric: Motion planning using dynamic roadmaps, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2004)
5.42 A. Yershova, L. Jaillet, T. Simeon, S.M. LaValle: Dynamic-domain RRTs: efficient exploration by controlling the sampling domain, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2005)
5.43 D. Hsu, J.C. Latombe, R. Motwani: Path planning in expansive configuration spaces, Int. J. Comput. Geom. Appl. **4**, 495–512 (1999)
5.44 D. Hsu, R. Kindel, J.C. Latombe, S. Rock: Randomized kinodynamic motion planning with moving obstacles. In: *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions*, ed. by B.R. Donald, K.M. Lynch, D. Rus (A.K. Peters, Wellesley 2001)
5.45 G. Sánchez, J.-C. Latombe: A single-query bi-directional probabilistic roadmap planner with lazy collision checking, ISRR Int. Symp. Robot. Res. (2001)
5.46 S. Carpin, G. Pillonetto: Robot motion planning using adaptive random walks, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2003) pp. 3809–3814
5.47 A. Ladd, L.E. Kavraki: Fast exploration for robots with dynamics, Workshop Algorithm. Found. Robot. (Zeist, Amsterdam 2004)
5.48 K.E. Bekris, L.E. Kavraki: Greedy but safe replanning under differential constraints, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2007)
5.49 C. O'Dunlaing, C.K. Yap: A retraction method for planning the motion of a disc, J. Algorithms **6**, 104–111 (1982)
5.50 D. Leven, M. Sharir: Planning a purely translational motion for a convex object in two-dimensional space using generalized Voronoi diagrams, Discrete Comput. Geom. **2**, 9–31 (1987)
5.51 M. Sharir: Algorithmic motion planning. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 2nd edn., ed. by J. E. Goodman, J. O'Rourke (Chapman Hall/CRC Press, New York 2004) pp. 1037–1064
5.52 N.J. Nilsson: A mobile automaton: An application of artificial intelligence techniques, 1st Int. Conf. Artif. Intell. (1969) pp. 509–520
5.53 J. O'Rourke: Visibility. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 2nd edn., ed. by J. E. Goodman, J. O'Rourke (Chapman Hall/CRC Press, New York 2004) pp. 643–663
5.54 B. Chazelle: Approximation and decomposition of shapes. In: *Algorithmic and Geometric Aspects of Robotics*, ed. by J.T. Schwartz, C.K. Yap (Lawrence Erlbaum, Hillsdale 1987) pp. 145–185
5.55 M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2nd edn. (Springer, Berlin 2000)
5.56 J.M. Keil: Polygon decomposition. In: *Handbook on Computational Geometry*, ed. by J.R. Sack, J. Urrutia (Elsevier, New York 2000)
5.57 J.T. Schwartz, M. Sharir: On the piano movers' problem: I. The case of a two-dimensional rigid polygonal body moving amidst polygonal barriers,

Commun. Pure Appl. Math. **36**, 345–398 (1983)
5.58 O. Khatib: Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots, Int. J. Robot. Res. **5**(1), 90–98 (1986)
5.59 J. Barraquand, J.-C. Latombe: Robot motion planning: A distributed representation approach, Int. J. Robot. Res. **10**(6), 628–649 (1991)
5.60 E. Rimon, D.E. Koditschek: Exact robot navigation using artificial potential fields, IEEE Trans. Robot. Autom. **8**(5), 501–518 (1992)
5.61 J.P. Laumond: Trajectories for mobile robots with kinematic and environment constraints, Int. Conf. Intell. Auton. Syst. (1986) pp. 346–354
5.62 J.P. Laumond, S. Sekhavat, F. Lamiraux: Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots. In: *Robot Motion Planning and Control*, ed. by J.P. Laumond (Springer, Berlin 1998) pp. 1–53
5.63 B.R. Donald, P.G. Xavier, J. Canny, J. Reif: Kinodynamic planning, J. ACM **40**, 1048–1066 (1993)
5.64 C. O'Dunlaing: Motion planning with inertial constraints, Algorithmica **2**(4), 431–475 (1987)
5.65 J. Canny, A. Rege, J. Reif: An exact algorithm for kinodynamic planning in the plane, Discrete Comput. Geom. **6**, 461–484 (1991)
5.66 J. Go, T. Vu, J.J. Kuffner: Autonomous behaviors for interactive vehicle animations, SIGGRAPH Symp. Comput. Animat. (2004)
5.67 M. Pivtoraiko, A. Kelly: Generating near minimal spanning control sets for constrained motion planning in discrete state spaces, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (2005)
5.68 J. Hollerbach: Dynamic scaling of manipulator trajectories, Tech. Rep. **700** (MIT A.I. Lab Memo, 1983)
5.69 K.G. Shin, N.D. McKay: Minimum-time control of robot manipulators with geometric path constraints, IEEE Trans. Autom. Contr. **30**(6), 531–541 (1985)
5.70 K.G. Shin, N.D. McKay: A dynamic programming approach to trajectory planning of robotic manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **31**(6), 491–500 (1986)
5.71 S. Sastry: *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control* (Springer, Berlin 1999)
5.72 D.J. Balkcom, M.T. Mason: Time optimal trajectories for bounded velocity differential drive vehicles, Int. J. Robot. Res. **21**(3), 199–217 (2002)
5.73 P. Souères, J.-D. Boissonnat: Optimal trajectories for nonholonomic mobile robots. In: *Robot Motion Planning and Control*, ed. by J.P. Laumond (Springer, Berlin 1998) pp. 93–169
5.74 P. Svestka, M.H. Overmars: Coordinated motion planning for multiple car-like robots using probabilistic roadmaps, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1995) pp. 1631–1636
5.75 S. Sekhavat, P. Svestka, J.-P. Laumond, M.H. Overmars: Multilevel path planning for nonholonomic robots using semiholonomic subsystems, Int. J. Robot. Res. **17**, 840–857 (1998)
5.76 P. Ferbach: A method of progressive constraints for nonholonomic motion planning, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1996) pp. 2949–2955
5.77 S. Pancanti, L. Pallottino, D. Salvadorini, A. Bicchi: Motion planning through symbols and lattices, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (2004) pp. 3914–3919
5.78 J. Barraquand, J.-C. Latombe: Nonholonomic multibody mobile robots: controllability and motion planning in the presence of obstacles, Algorithmica **10**, 121–155 (1993)
5.79 S.M. LaValle, J.J. Kuffner: Randomized kinodynamic planning, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1999) pp. 473–479
5.80 A. M. Ladd, L. E. Kavraki: Motion planning in the presence of drift underactuation and discrete system changes. In: *Robotics: Science and Systems I* ed. by (MIT Press, Boston 2005) pp. 233–241
5.81 J.-P. Merlet: *Parallel Robots* (Kluwer, Boston 2000)
5.82 D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms* (Springer, Berlin 1992)
5.83 R.J. Milgram, J.C. Trinkle: The geometry of configuration spaces for closed chains in two and three dimensions, Homol. Homot. Appl. **6**(1), 237–267 (2004)
5.84 J. Yakey, S.M. LaValle, L.E. Kavraki: Randomized path planning for linkages with closed kinematic chains, IEEE Trans. Robot. Autom. **17**(6), 951–958 (2001)
5.85 L. Han, N.M. Amato: A kinematics-based probabilistic roadmap method for closed chain systems. In: *Algorithmic and Computational Robotics: New Directions*, ed. by B.R. Donald, K.M. Lynch, D. Rus (A.K. Peters, Wellesley 2001) pp. 233–246
5.86 J. Cortés: Motion Planning Algorithms for General Closed-Chain Mechanisms. Ph.D. Thesis (Institut National Polytechnique do Toulouse, Toulouse 2003)
5.87 R. Alami, J.-P. Laumond, T. Siméon: Two manipulation planning algorithms. In: *Algorithms for Robotic Motion and Manipulation*, ed. by J.P. Laumond, M. Overmars (A.K. Peters, Wellesley 1997)
5.88 L.E. Kavraki, M. Kolountzakis: Partitioning a planar assembly into two connected parts is NP-complete, Inform. Process. Lett. **55**(3), 159–165 (1995)
5.89 M.T. Mason: *Mechanics of Robotic Manipulation* (MIT Press, Cambridge 2001)
5.90 K. Sutner, W. Maass: Motion planning among time dependent obstacles, Acta Informatica **26**, 93–122 (1988)
5.91 J.H. Reif, M. Sharir: Motion planning in the presence of moving obstacles, J. ACM **41**, 764–790 (1994)
5.92 M.A. Erdmann, T. Lozano-Pérez: On multiple moving objects, Algorithmica **2**, 477–521 (1987)
5.93 J. van den Berg, M. Overmars: Prioritized motion planning for multiple robots, IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robot. Syst. (2005) pp. 2217–2222
5.94 T. Siméon, S. Leroy, J.-P. Laumond: Path coordination for multiple mobile robots: A resolution complete algorithm, IEEE Trans. Robot. Autom. **18**(1), 42–49 (2002)
5.95 R. Ghrist, J.M. O'Kane, S.M. LaValle: Pareto optimal coordination on roadmaps, Workshop Algorithm. Found. Robot. (2004) pp. 185–200
5.96 S.M. LaValle, S.A. Hutchinson: Optimal motion planning for multiple robots having independent goals, IEEE Trans. Robot. Autom. **14**(6), 912–925 (1998)
5.97 W.M. Boothby: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd edn. (Academic, New York 2003)
5.98 A. Hatcher: *Algebraic Topology* (Cambridge Univ Press, Cambridge 2002)

5.99 G.S. Chirikjian, A.B. Kyatkin: *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis* (CRC, Boca Raton 2001)
5.100 J. Arvo: Fast random rotation matrices. In: *Graphics Gems III*, ed. by D. Kirk (Academic, New York 1992) pp. 117–120
5.101 H. Niederreiter: *Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1992)
5.102 S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy: *Algorithms in Real Algebraic Geometry* (Springer, Berlin 2003)
5.103 B. Mishra: Computational real algebraic geometry. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, ed. by J.E. Goodman, J. O'Rourke (CRC, New York 1997) pp. 537–556
5.104 J.T. Schwartz, M. Sharir: On the piano movers' problem: II. General techniques for computing topological properties of algebraic manifolds, Commun. Pure Appl. Math. **36**, 345–398 (1983)
5.105 B.R. Donald: A search algorithm for motion planning with six degrees of freedom, Artif. Intell. J. **31**, 295–353 (1987)
5.106 D.S. Arnon: Geometric reasoning with logic and algebra, Artif. Intell. J. **37**(1-3), 37–60 (1988)
5.107 G.E. Collins: Quantifier elimination by cylindrical algebraic decomposition–twenty years of progress. In: *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, ed. by B.F. Caviness, J.R. Johnson (Springer, Berlin 1998) pp. 8–23

# 第6章 运动控制

Wankyun Chung，Li-Chen Fu，Su-Hau Hsu

张文增 译

本章将聚焦于机器人刚性机械臂的运动控制。换言之，本章将不考虑移动机器人、柔性机械臂和具有弹性关节的机械臂的运动控制。在刚性机械臂的运动控制问题中，主要的挑战在于动力学和不确定性带来的复杂性。前者是由机器人机械臂中的非线性和耦合引起的；后者有两方面的原因：结构化的和非结构化的不确定性。结构化的不确定性是指动力学参数的不精确性，这部分知识将在本章中涉及。而非结构化的不确定性是由关节和连杆的柔性、驱动器动力学、摩擦、传感器噪声和未知的环境动力学引起的，这部分将在其他章节介绍。

本章我们从机器人机械臂运动控制的基本观点开始，之后简要回顾和介绍相关最新进展。6.1节回顾了机器人机械臂的动力学模型及其重要性质。6.2节比较了关节空间与操作空间的控制方法，这是机器人机械臂控制中两种不同的观点。6.3节和6.4节分别给出了广泛应用于工业机器人领域的独立关节控制和比例-积分-微分（PID）控制。6.5节介绍了基于反馈线性化的跟踪控制。6.6节阐述了计算转矩控制和它的一些变化。6.7节介绍了用于解决结构化不确定性问题的自适应控制，6.8节则介绍了最优化和鲁棒性问题。由于大部分机器人机械臂的控制器是使用微处理器实现的，故6.9节讨论了数字化实现的一些问题。最后，6.10节阐述了实现智能控制的一种普及性方法——学习控制。

## 6.1 运动控制简介

本章将回顾机械臂的动力学模型，并着重强调它在控制器设计中一些非常有用的重要性质，最后将定义机械臂不同的控制任务。

### 6.1.1 动力学模型

对于运动控制，刚性机械臂的动力学模型可以由拉格朗日动力学方程简便地表示出来。设机械臂有 $n$ 个连杆，关节变量的（$n\times1$）维向量 $\boldsymbol{q}$ 为 $\boldsymbol{q}=[q_1,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}}$。机器人机械臂的动力学模型可由拉格朗日方程表示[6.1-6]。

$$\boldsymbol{H}(q)\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\tau} \tag{6.1}$$

式中，$\boldsymbol{H}(q)$ 是（$n\times n$）维的惯性矩阵；$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ 是科里奥利力和离心力的（$n\times1$）维向量；$\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})$ 是重力的（$n\times1$）维向量；$\boldsymbol{\tau}$是待设计的关节控制输入的（$n\times1$）维向量。在此忽略摩擦和扰动输入。

备注：

其他有助于机器人机械臂动力学描述的方面可能还有驱动器动力学、关节和连杆柔性、摩擦、噪声和扰动。这里在不失一般性的情况下，强调了刚性机械臂的情况。

本章我们将介绍基于一些机器人机械臂动力学模型重要性质的控制方案。在详细描述各种不同的控制方案之前，我们先列出这些性质。

**1. 性质 6.1**

惯性矩阵是一个对称的、正定的矩阵，可表示为：

$$\lambda_h\boldsymbol{I}_n\leqslant\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\leqslant\lambda_H\boldsymbol{I}_n \tag{6.2}$$

式中，$\lambda_h$ 和 $\lambda_H$ 表示正常数。

**2. 性质 6.2**

矩阵 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})-2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 对于一个特定选取的 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$（总是可能的）是反对称的。即对于任意一个（$n\times1$）的向量，$z$ 有：

$$z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})z=0 \tag{6.3}$$

**3. 性质 6.3**

对于某个特定的有界常数 $c_o$，（$n\times n$）维矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足：

$$\|\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\|\leqslant c_o\|\dot{\boldsymbol{q}}\| \tag{6.4}$$

**4. 性质 6.4**

对于一个特定的有界常数 $g_o$，重力/转矩向量满足：

$$\|\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})\|\leqslant g_o。 \tag{6.5}$$

**5. 性质 6.5**

运动方程在惯性参数中都是线性的，即有一个（$r\times1$）维的常数向量 $\boldsymbol{a}$ 和一个（$n\times r$）维的回归矩阵 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$，使得：

$$\boldsymbol{H}(q)\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{a} \tag{6.6}$$

式中，向量 $\boldsymbol{a}$ 是由连杆的质量、惯性矩和连杆的各种组合组成的。

**6. 性质 6.6**

映射 $\boldsymbol{\tau}\to\dot{\boldsymbol{q}}$ 是被动的；亦即，存在 $\alpha\geqslant0$，使得

$$\int_0^t\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(\beta)\boldsymbol{\tau}(\beta)\mathrm{d}\beta\geqslant-\alpha,\quad\forall t<\infty \tag{6.7}$$

备注：

1）性质 6.3 和性质 6.4 非常有用，它们让我们可以确定动力学模型中非线性项的上界。正如我们可以进一步看到的，好多控制方案都需要这些关于上界的知识。

2）在性质 6.5 中，参数向量 $\boldsymbol{a}$ 是由多个变量的各种组合构成的。该参数空间的维度不是唯一的，在参数空间中的搜索是一个重要的问题。

3）在这一节里，我们假设机械臂是完全驱动的，这意味着对于每个自由度都有一个独立控制的输入。相反，有柔性关节或者柔性连杆的机械臂不再是完全驱动的，且它们的控制问题一般而言会更加困难。

### 6.1.2 控制任务

出于比较研究的目的，将控制对象分成以下两类是有益的：

（1）轨迹跟踪　其目的是在一定的工作空间内跟踪关节随时间变化的参考轨迹。一般而言，我们假设期望的轨迹与驱动器的能力范围一致。亦即，与期望的轨迹有关的关节速度与加速度应该分别不超过其机械臂的速度与加速度的极限。在实际情况下，驱动器的能力是由转矩的极限决定的，这使得复杂且状态相关的加速度是有界的。

（2）调节　有时也叫点对点控制。首先在关节空间里指定一个固定的参数设置，目标是使关节的变量能保持在期望的位置，不受转矩扰动的影响而独立于初始状态。一般而言瞬态和超调行为都是无法确定的。

控制器的选择依赖于所要执行的控制任务的

类型。例如，只需要机械臂从一个位置移动到另外一个位置而对这两点间的运动过程的精度没有特别高的要求的控制任务可以由调节来完成，而在一些其他的任务中，如焊接、喷漆等则需要跟踪控制。

备注：

1）调节问题是跟踪问题的一个特例（期望的关节速度和加速度都为零）。

2）在关节空间中给出以上的任务说明，就出现了关节空间控制。这是本章的主要内容。有时，以末端执行器的期望轨迹所做的机器人机械臂的任务说明（如手眼控制）是在任务空间进行的，并引起操作空间的控制，这将在6.2节介绍。

### 6.1.3 小结

在这一节，我们介绍了机器人机械臂的动力学模型及其重要性质，而且定义了机器人机械臂不同的控制任务。

## 6.2 关节空间与操作空间控制

在运动控制问题中，机械臂移动到一个位置拿到一个物体，将其运送到另一个位置并放下它，这样一个任务是任何一个更高级别操作任务如喷漆或点焊的一部分。

任务通常是以在任务空间上末端执行器期望的轨迹来指定的，而控制操作是在关节空间进行的，以达到期望的目标。这一事实自然而然地引出了两种一般的控制方法，即关节空间控制和操作空间控制（任务空间控制）。

### 6.2.1 关节空间控制

关节空间控制的主要目标是设计一种反馈控制器，它使关节坐标系 $q(t)\in R^n$ 尽可能精确地跟踪期望运动 $q_d(t)$。为此，考虑关节空间[6.2,4]中一个 $n$ 个自由度机械臂的运动方程式（6.1）。在这种情况下，机器人机械臂的控制很自然地在关节空间中得到，因为控制输入就是关节的转矩。尽管如此，当使用者以末端执行器坐标系定义一个运动时，仍有必要了解以下方法。

图6.1所示为关节空间控制方法的略图。首先，通过末端执行器坐标系描述的期望运动被转化为对应的关节运动轨迹，这一过程是通过运用机械臂的逆运动学方程实现的。然后，反馈控制器通过测量机械臂当前的关节状态，会确定需要的关节转矩大小，使机械臂沿着关节坐标系中定义的期望轨迹移动[6.1,4,7,8]。

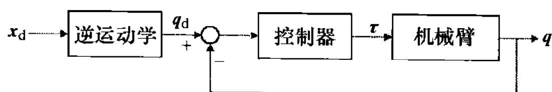



图6.1 关节空间控制的广义概念

由于通常都会假定期望的任务是按关节运动的时间顺序给出的，所以关节空间控制方案在机械臂任务精确计划过，并且很少或者不需要进行在线轨迹调整的情况下就足够了[6.1,4,7,9]。典型地，逆运动学被应用于计算一些中间任务点，并且关节的运动轨迹可以进行中间插补。尽管指令轨迹是在末端执行器坐标系插入点之间的直线运动，但最终的关节运动轨迹是由插入点中符合期望的末端执行器运动轨迹的曲线部分组成。

实际上，关节空间控制包括简单的PD控制、PID控制、逆动力学控制、李雅普诺夫控制和被动控制。这些控制方案都将在下文中进行介绍。

### 6.2.2 操作空间控制

在更加复杂和确定性较小的环境中，末端执行器的运动会服从在线修正以适应不可预期的情况出现或是对传感器输入进行响应。这类控制问题存在于生产制造过程的各种任务中。尤其是当需要考虑机械臂与工作环境的交互作用时，这类情况都会出现。

由于期望任务通常会在操作空间中定义，并且需要对末端执行器的运动进行精确控制，所以关节空间控制在上述情况下并不合适。这就产生了一种新方法，它可以直接根据操作空间中表示的动力学给出控制方案。

设雅可比矩阵为 $J(q)\in R^{n\times n}$，根据式（6.8）将关节速度（$\dot{q}\in R^n$）转化为任务速度（$\dot{x}\in R^n$）。

$$\dot{x}=J(q)\dot{q} \tag{6.8}$$

并且，假设它是可逆的。那么，操作空间的动力学就可由下式表示：

$$f_c=\Lambda(q)\ddot{x}+\Gamma(q,\dot{q})\dot{x}+\eta(q) \tag{6.9}$$

式中，$f_c\in R^n$ 是操作空间的指令力，伪惯性矩阵由下式定义：

$$\Lambda(q)=J^{-T}(q)H(q)J^{-1}(q) \tag{6.10}$$

并且 $\Gamma(q,\dot{q})$ 和 $\eta(q)$ 由下式给出：

$$\Gamma(q,\dot{q})=J^{-T}(q)C(q,\dot{q})J^{-1}(q)-\Lambda(q)\dot{J}(q)J^{-1}(q)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})$$

任务空间变量通常由关节空间变量通过运动学映射重建。事实上，我们很少使用传感器直接测量末端执行器的位置与速度。同时值得注意的是，因为控制方案直接作用于任务空间量，如末端执行器的位姿，此处通常会使用一个分析雅可比矩阵。

操作空间控制的主要目标是设计一种反馈控制器，它可以执行末端执行器的运动 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$，该运动会尽可能准确地跟踪期望的末端执行器运动 $\boldsymbol{x}_d(t)$。为此，考察操作空间下给出的机械臂运动方程（6.9）。对于这种情况，图 6.2 给出了操作空间控制方法的示意图。该方法有不少优点，因为操作空间控制器采用了一个反馈控制闭环，可以直接最大限度地减小任务误差。由于控制算法嵌入了速度级的正运动学式（6.8），因此不需要精确的逆运动学计算。这样，点与点之间的运动就可以表示为任务空间的直线线段。

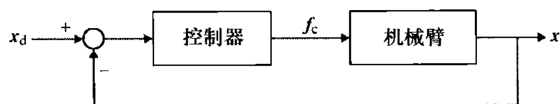



图 6.2　操作空间控制的基本概念

## 6.3　独立关节控制

独立关节控制（如，分散控制）是指每个关节的控制输入只取决于相应的关节位移与速度大小的控制方式。由于它的简单结构，这种控制方式具有许多优点。例如，通过独立关节控制，可以省去各个关节之间的联系。此外，因为控制器的计算量可以减小，所以在实际应用中低成本的硬件就可以满足要求。由于所有关节的控制器都有相同的构成，因而独立关节控制具有可扩展的特点。本节将介绍两种独立关节控制方法：一种着眼于各关节的运动学模型（如，单关节模型）的分析，另一种着眼于整体运动学模型（如，多关节模型）的分析。

### 6.3.1　基于单关节模型的控制器设计

最简单的单一关节控制策略就是将每个关节轴作为单入单出（SISO）系统来控制。由于关节运动中不同设置所产生的关节之间的耦合效应可以被视为扰动输入。不失一般性，将驱动器看作是直流旋转电动机。因此，关节 $i$ 的控制方案的框图可在复变函数域中表示，如图 6.3 所示。在这种控制方案中，$\theta$ 表示电动机的角变量，$J$ 表示从电动机来看的有效惯性，$R_a$ 是电枢电阻（忽略自感），$k_t$ 和 $k_v$ 分别表示转矩与电动机常数。此外，$G_v$ 表示功率放大器的电压增益，这样就确定了参考输入是放大器输入电压值 $V_c$ 而不是电枢电压 $V_a$。也可以假定 $F_m \ll k_v k_t / R_a$，即机械（黏性）摩擦系数与电系数相比可以忽略。现在，电动机的输入-输出传递函数可由下式表示：

$$M(s) = \frac{k_m}{s(1+sT_m)} \tag{6.11}$$

式中，$k_m = G_v/k_v$ 和 $T_m = R_a J/k_v k_t$ 分别表示电压-速度增益及电动机的时间常数。

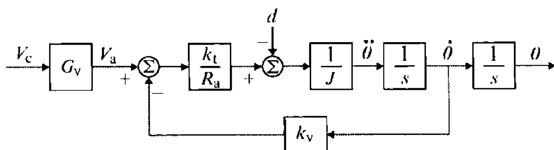



图 6.3　关节驱动系统框图（来自参考文献［6.4］）

要帮助控制结构的选取，首先要注意与输出角 $\theta$ 有关的有效抑制扰动 $d$ 由以下两点确定：

1）扰动的插补点前有大的放大器值。

2）控制器中积分作用的存在，用以消除稳定状态时输出的重力分量效应（如，常数 $\theta$）。

这种情况如图 6.4 所示，具有位置和速度反馈的控制操作类型由图 6.4 来表示。

$$G_p(s) = K_P, \quad G_v(s) = K_V \frac{1+sT_V}{s} \tag{6.12}$$

式中，$G_p(s)$ 和 $G_v(s)$ 分别相当于位置与速度的控制操作。值得注意的是，内部控制操作 $G_v(s)$ 是比例积分（PI）控制的一种形式，它是定值扰动为 $d$ 时稳状态中的零误差。此外，$k_{TP}$ 和 $k_{TV}$ 都是传感器常数，并且放大器增益 $K_V$ 已被嵌入内部控制器增益。

在图 6.4 中，前向路径和返回路径的传递函数分别为式（6.13）和式（6.14）：

$$P(s) = \frac{k_m K_P K_V (1+sT_V)}{s(1+sT_m)} \tag{6.13}$$

$$H(s) = k_{TP}\left(1 + s\frac{k_{TV}}{K_P k_{TP}}\right) \tag{6.14}$$

在 $s = -1/T_V$ 时，可以选择控制器的零点以消除在 $s = -1/T_m$ 时电动机真正电极的影响。然后，令 $T_V = T_m$，则在根轨迹上移动的闭环系统的极点可以作为闭环增益的函数 $k_m k_V k_{TV}$。通过增加反馈增益 $K_P$，可以将闭环的极点限制在一个有大的绝对值实部

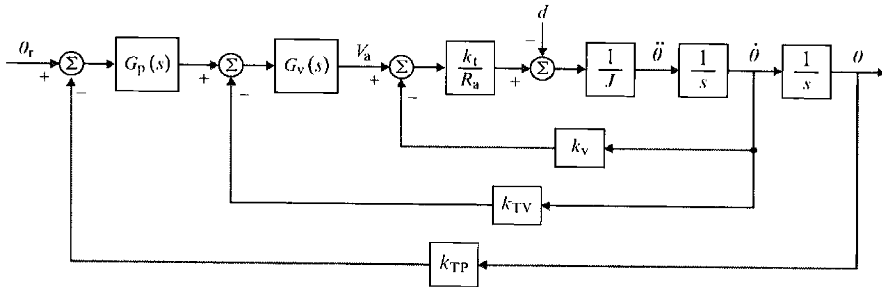



图6.4 位置与速度反馈框图（来自参考文献［6.4］）

的复平面域内。这样，通过选择适当的 $K_V$ 就可以确定实际位置。

闭环输入输出传递函数为

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)}=\frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1+\frac{sk_{TP}}{K_P k_{TP}}+\frac{s^2}{k_m K_P k_{TP} K_V}} \tag{6.15}$$

此函数可与典型的二阶系统的传递函数相比

$$W(s)=\frac{\frac{1}{k_{TP}}}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}} \tag{6.16}$$

可以看出，通过选择适当的增益，可以得到任何自然频率值 $\omega_n$ 和阻尼比 $\zeta$。所以，如果给出 $\omega_n$ 和 $\zeta$ 作为设计规格参数，就可以得到如下关系

$$K_V k_{TV}=\frac{2\zeta\omega_n}{k_m}\quad,\quad K_P k_{TP} K_V=\frac{\omega_n^2}{k_m} \tag{6.17}$$

对于给定的传感器常数 $k_{TP}$ 和 $k_{TV}$，可以分别得到满足式（6.16）和式（6.17）的 $K_V$ 和 $K_P$。另一方面，闭环扰动/输出的函数为

$$\frac{\Theta(s)}{D(s)}=\frac{\frac{sR_a}{k_t K_P K_{TP} K_V(1+sT_m)}}{1+\frac{sk_{TV}}{K_P k_{TP}}+\frac{s^2}{k_m K_P k_{TP} K_V}} \tag{6.18}$$

该函数表明扰动抑制因子为 $X_R(s)=K_P k_{TP} K_V$，并且是固定的。关于扰动动力学，应该牢记由PI产生的原点处的零值、在 $s=-1/T_m$ 处的真正极点，以及实部为 $-\zeta\omega n$ 的成对共轭复极点。在这种情况下，使控制系统从关节位置的扰动作用中恢复所需的输出恢复时间的估计值 $T_R$ 就可以通过分析上述传递函数的模型得出。这一估计值可以相应地表示为 $T_R=\max\{T_m, 1/\zeta\omega\}$。

### 6.3.2 基于多关节模型的控制器设计

近年来，人们已经提出了许多基于机械臂整体运动学模型的独立关节控制方案（多关节模型）。例如，计算转矩类控制方法，参考文献［6.12］中处理水平运动的调节任务，参考文献［6.13］和［6.14］中处理任意平滑轨迹的跟踪任务。因为考察的是整体运动学模型，所以需要处理关节之间的耦合作用。这样的控制方案将在6.6节中详细介绍。

### 6.3.3 小结和扩展阅读

在本节中，我们已经提出了两个独立的关节控制方案：一个基于单关节模型，另一个基于多关节模型。前者侧重于单一关节的动力学以及关节之间相互作用产生的扰动。这种控制方案简单，但可能不适合高速跟踪。因此，我们介绍了后者，考虑了机器人机械臂的整体动力学模型来处理关节中间的相互作用。

基于单关节模型的独立关节控制中应用了许多不同的反馈类型（如纯位置反馈或位置、速度和加速度反馈）。参考文献［6.4］给出了完整的讨论。当我们需要关节控制伺服来以高速和加速度跟踪参考轨迹时，上述方案的跟踪性能不可避免地会递减。一种可能的补救办法是采用分散前馈补偿来降低跟踪误差[6.4,5]。

## 6.4 PID控制

传统上，机器人机械臂的控制方案可以被理解为每个电动机驱动机械臂关节级的PD或PID补偿器参数整定[6.1]这样一个简单的事实：基本上，当PD控制器应用于双积分器系统时，它是一个具有良好闭环性能的位置与速度反馈控制器。自齐格勒-尼柯尔斯的PID整定规则于1942年出版后[6.15]，PID控制就有了悠久的历史。实际上，PID的控制优势在于

其简单性和有明确的物理意义。至少在工业上，如果通过复杂控制获得性能提高是十分不够的，那么简单的控制则优于复杂的控制。PID 控制的物理意义[6.16]如下：P-控制是指由当前状态到期望状态的当前的作用；I-控制是指以往状态经验信息的累积作用；D-控制是指反映未来状态的趋势信息的预期作用。

### 6.4.1 调节的 PD 控制

机械臂控制的一个简单设计方法是相对于一个操作点的、利用基于系统线性化的线性控制方案。此方法的一个例子是一种具有重力补偿方案的 PD 控制[6.17,18]。重力补偿是一种偏差纠正，仅对引起超调和非对称瞬态行为的力进行补偿。它具有以下形式

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q})-\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q}) \tag{6.19}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\in R^{n\times n}$是正定增益矩阵。这种控制器对于设定点调节是非常有用的，例如，$\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$ 是常数[6.7,18]。采用此控制器时（见式（6.1）），闭环方程则变成

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0} \tag{6.20}$$

式中，$\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}=\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q}$，平衡点是 $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}},\ \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$。现在，由带重力补偿的 PD 控制得到的稳定性可根据闭环动力学进行分析（6.20）。考虑正定函数

$$V=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}$$

然后，通过使用 6.1 节中的性质 6.2，对 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的任意值，函数导数变成半负定的。即

$$\dot{V}=-\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}}\leqslant-\lambda_{\min}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}})\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2 \tag{6.21}$$

式中，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}})$ 是 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}$ 的最小特征值。通过引用李雅普诺夫（Lyapunov）稳定性理论和拉萨尔（LaSalle）定理[6.1]，可以看到，调节误差将逐渐收敛为零，而其高阶导数保持有界。尽管比较简单，但是这种控制器需要重力分量（结构和参数）方面的知识。

现在，考虑简单的无重力补偿的 PD 控制

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q})-\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{6.22}$$

则闭环动力学方程变成

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}=\boldsymbol{0} \tag{6.23}$$

考虑正定函数

$$V=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}+U(\boldsymbol{q})+U_0$$

式中，$U(\boldsymbol{q})$ 是 $\partial U(\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q})$ 的势能；$U_0$是一个合适的常数。$V$ 的时间导数和闭环动力学方程（6.23）给出了与之前利用重力补偿相同的结果式（6.21）。在这种情况下，控制系统必须在李雅普诺夫意义上是稳定的，但它不能得出根据拉萨尔定理[6.1]，调节误差将收敛到零的结论。实际上，该系统精度（调节误差向量的大小）将取决于下面公式中增益矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$的大小。

$$\|\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}\|\leqslant\|\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}^{-1}\|g_0 \tag{6.24}$$

式中，$g_0$ 在 6.1 节的性质 6.4 中。因此，调节误差可以通过增加 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$ 而任意减少；然而，测量噪声和其他未建模的动力学因素，例如驱动器摩擦，将限制高增益在实际中的使用。

### 6.4.2 调节的 PID 控制

为了处理重力问题，我们将在之前的 PD 控制中增加一种积分作用，在某种程度上，这可以看作是常值扰动（从局部观点看）。PID 调节控制器可以写成以下一般形式

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\int f(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q})\mathrm{d}t-\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{q}}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\in R^{n\times n}$是一个正定增益矩阵，并且，若 $f(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{q}$，我们有 PID 控制；若 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{I}}\int(-\dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t$ 增加，我们有 PI²D 控制；若$f(\cdot)=\tanh(\cdot)$，我们有 PD + 非线性积分控制。

对于含有外绕的机器人运动控制系统，如库仑摩擦，PID 控制的全局渐近稳定性（GAS）已在参考文献［6.12］中证明。（Tomei）在参考文献［6.19］中也通过对重力项的自适应证明了 PD 控制的全局渐近稳定性。另一方面，（Ortega）等人在参考文献［6.20］中表明，PI²D 控制在存在重力和有限外绕时可能会产生半全局渐近稳定性（SGAS）。

另外，在参考文献［6.21］中，（Angeli）证明 PD 控制对于机器人系统可以实现输入-输出对状态稳定（IOSS）。此外，（Ramirez）等人在参考文献［6.22］中证明了 PID 增益（某些条件下）的半全局渐近稳定性。此外，（Kelly）在参考文献［6.23］中证明了 PD 加非线性积分控制可以实现在重力下的 GAS。

事实上，PID 控制中的一个大的积分作用会造成运动控制系统的不稳定。为了避免这种情况，积分增益应该是以下式为上限的[6.1]：

$$\frac{k_{\mathrm{P}}k_{\mathrm{V}}}{\lambda_{\mathrm{H}}^2}>k_{\mathrm{I}}$$

式中 $\lambda_H$ 是6.1节的性质6.1中的；$\boldsymbol{K}_P = k_P\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}_I = k_I\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{K}_V = k_V\boldsymbol{I}$。这一关系为增益的选择提供了隐含的指导。此外，PID控制产生了大量的PID控制附属物。例如，PID附加摩擦补偿器，PID附加重力补偿器，PID附加扰动观测器。

### 6.4.3　PID增益整定

PID控制可用于轨迹跟踪和设定点调节。真正的跟踪控制在6.5节后介绍。在本节中，将介绍实际使用中简单且有用的PID增益整定方法。一般PID控制器可以被写成下面一般的形式：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_V\dot{\boldsymbol{e}}_q + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_q + \boldsymbol{K}_I\int\boldsymbol{e}_q\mathrm{d}t$$

或另一种形式：

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\boldsymbol{K} + \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{I}\right)\left(\dot{\boldsymbol{e}}_q + \boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_q + \boldsymbol{K}_I\int\boldsymbol{e}_q\mathrm{d}t\right) \qquad (6.25)$$

在一个跟踪控制系统的基本稳定性分析中，Qu等人在参考文献［6.24］中证明PD控制可以满足一致最终有界性（UUB）。此外，在参考文献［6.25］中，Berghuis等人提出输出反馈PD控制，该控制方法在重力和有界扰动下满足半全局一致最终有界性（SGUUB）。最近，choi等人提出了逆优化PID控制方法[6.26]，它确保了扩展扰动的输入-状态稳定性（ISS）。

实际上，如果PID控制器式（6.25）被反复应用到同一设定点或期望轨迹，那么，最大误差将与下式中的增益成比例关系：

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_f}\|\boldsymbol{e}_q(t)\| \propto \frac{\gamma^2}{\sqrt{2k\gamma^2+1}} \qquad (6.26)$$

式中，$t_f$指给定任务的最终执行时间，并且 $\boldsymbol{K} = k\boldsymbol{I}$。这种关系可以用来调整一个PID控制器的增益，被称为复合整定规则[6.16]。复合整定规则暗含如下简单的调整规则：

平方整定：对于一个小的 $k$，$\max\|\boldsymbol{e}_q\|\propto\gamma^2$，

线性整定：对于一个大的 $k$，$\max\|\boldsymbol{e}_q\|\propto\gamma$。

例如，假设我们选取正的常数对角矩阵 $\boldsymbol{K}_P = k_P\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}_I = k_I\boldsymbol{I}$，且满足 $k_P^2 > 2k_I$. 对于小的 $k$ 值，根据平方整定规则，如果我们减少 $\gamma$ 为1/2，最大误差将减少1/4。对于大的k值，根据线性整定规则，最大误差将会成比例地随着 $\gamma$ 而减少。这意味着当其他增益参数被确定后，我们可以仅仅使用一个变量 $\gamma$ 来调整PID控制器[6.16]。尽管这些规则对调整控制性能是非常有用的，但是它们仅能够使用于相同点设定或期望轨迹的重复实验中，因为调节规则由比例关系构成。

### 6.4.4　扩展阅读

PID类型的控制器是为了解决调节控制问题而设计出来的。这些控制方法的优点是无须知道模型结构或模型参数。此外，本节介绍了PID类型的控制器所实现的稳定性。读者可以找到很多详细介绍PID控制中的各种调节方法及其具体证明的书籍和论文[6.1,15,16,22,27,28]。

## 6.5　跟踪控制

独立的PID控制对多数设定点调节问题来说是足够了，但是还有许多任务需要有效的轨迹跟踪能力，比如，等离子焊接、激光切割或者存在障碍物情况下的高速操作等。这些情况中，运用局部方案需要在大量中间设定点中慢速移动，所以大大延迟了任务的完成。因此为了改善轨迹跟踪的效果性能，控制器应该考虑计算转矩类技术的机械臂的动态模型。

在关节或任务空间中的跟踪控制问题包括给定的时变轨迹 $\boldsymbol{q}_d(t)$ 或者 $\boldsymbol{x}_d(t)$、它们的连续微分 $\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)$ 或 $\dot{\boldsymbol{x}}_d(t)$，以及 $\ddot{\boldsymbol{q}}_d(t)$ 或 $\ddot{\boldsymbol{x}}_d(t)$，这些参数分别描述的是期望的速度和加速度。为了得到好的性能，必须尽力发展基于模型的控制策略[6.1,2,7]。在文献所报道的控制方法中，典型方法包括逆动力学控制、反馈线性化技术和基于被动性的控制方法。

### 6.5.1　逆动力学控制

尽管逆动力学控制有理论上的背景，如后面讨论的反馈线性化技术，但是它的起点是基于消除非线性项和解耦每个连杆动力学的机械工程上的直觉。在关节空间中的逆动力学控制有如下公式：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q}) \qquad (6.27)$$

将式代入到式（6.1）中，会得出 $n$ 个解耦的线性系统方程组，例如 $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是一个待设计的辅助控制输入变量。$\boldsymbol{v}$ 的典型选择是

$$\boldsymbol{v} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{K}_V(\dot{\boldsymbol{q}}_d - \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}) \qquad (6.28)$$

或带有积分分量

$$\boldsymbol{v} = \ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{K}_V(\dot{\boldsymbol{q}}_d - \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{K}_P(\boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{K}_I\int(\boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q})\mathrm{d}t \qquad (6.29)$$

推导得到对于辅助控制的输入式（6.28）的误差动力学方程

$$\ddot{e}_q + K_V \dot{e}_q + K_P e_q = 0$$

如果使用了辅助控制输入式（6.29），误差动力学方程则为

$$e_q^{(3)} + K_V \ddot{e}_q + K_P \dot{e}_q + K_I e_q = 0$$

通过选择合适的增益矩阵 $K_v$、$K_p$（和 $K_I$），两者的误差动力学方程都是呈指数级稳定的。

或者，逆动力学控制可以在操作空间中描述。考虑操作空间动力学式（6.9），如果在操作空间中采用下面的逆动力学控制

$$f_c = A(q)(\ddot{x}_d + K_V \dot{e}_x + K_P e_x) + \Gamma(q, \dot{q})\dot{x} + \eta(q)$$

式中 $e_x = x_d - x$，则产生的误差动力学方程为

$$\ddot{e}_x + K_V \dot{e}_x + K_P e_x = 0 \tag{6.30}$$

它也是呈指数稳定的。采用这种控制器的一个明显优点是可以选择在操作空间中有清晰物理意义的 $K_p$ 和 $K_v$。但是，如式（6.10）所见，机器人接近奇异位形时，$A(q)$ 值会变得很大。这意味着为了移动机械臂，在某个方向上需要很大的力。

### 6.5.2 反馈线性化

这种方法是刚性机械臂逆动力学概念的广义化。反馈线性化的基本思想是构造一个所谓的内环控制的变换，它使非线性系统在坐标进行了合适的状态空间变化后能精确地线性化。这样，设计者就能在新的坐标系中设计出第二级或外环控制以满足传统控制方案要求，如轨迹跟踪、抗扰动等[6.5,29]。如果设计者在机械臂的动力学描述中包括了传动动力学，例如轴弯曲引起的弹力，齿轮弹力等，那么，机械臂控制的反馈线性化方案的整个力量就变得显而易见了。

近几年来出现了大量令人印象深刻的关于非线性系统微分几何方法的文献。此领域的大多数结果目的是给出非线性系统各种几何性质的与坐标无关的抽象描述，但这对非数学家来说很难理解。本节的目的是给出反馈线性化方案的基本思想，并介绍这项技术的一个简单版本，以找到机械臂控制问题的直接应用。读者可参考文献［6.30］，了解采用微分几何方法的反馈线性化技术的综合法。

现在考虑一般的输出 $\xi \in R^p$，找到一个简单方法来确定机械臂动力学方程（6.1）的线性化状态空间表述：

$$\xi = h(q) + r(t) \tag{6.31}$$

式中，$h(q)$ 是关节坐标 $q \in R^n$ 的一个一般的预定函数，而且 $r(t)$ 是一般的预定时间函数。控制目标将是选择关节转矩输入 $\tau$ 值使输出 $\xi(t)$ 变为零。

$h(q)$ 和 $r(t)$ 的选择是基于控制目标的。例如，如果我们希望机械臂跟踪的期望关节空间的轨迹满足 $h(q) = -q$，并且 $r(t) = q_d(t)$，那么 $\xi(t) = q_d(t) - q(t) \equiv e_q(t)$ 则为关节空间的跟踪误差。在这种情况下，令 $\xi(t)$ 为零，会使关节变量 $q(t)$ 跟踪其期望值 $q_d(t)$，从而产生机械臂轨迹跟踪问题。另外一个例子，$\xi(t)$ 表示操作空间跟踪误差，$\xi(t) = x_d(t) - x(t) \equiv e_x(t)$。那么控制 $\xi(t)$ 变为零会在期望运动通常已经指定的操作空间上直接产生轨迹跟踪。

为了得到机械臂控制器设计的线性状态变量模型，就要对输出 $\xi(t)$ 进行二阶微分，可得

$$\dot{\xi} = \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q} + \dot{r} = T\dot{q} + \dot{r} \tag{6.32}$$

$$\ddot{\xi} = T\ddot{q} + \dot{T}\dot{q} + \ddot{r} \tag{6.33}$$

其中，我们定义一个（$p \times n$）的变换矩阵为

$$T(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_1} & \frac{\partial h}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial q_n} \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

给定输出 $h(q)$，直接计算与 $h(q)$ 相关的变换矩阵 $T(q)$。在 $\xi$ 表示为操作空间速度误差的特殊情况下，$T(q)$ 表示的是雅可比矩阵 $J(q)$。

根据式（6.1），有

$$\ddot{q} = H^{-1}(q)[\tau - n(q, \dot{q})] \tag{6.35}$$

有非线性项的表达式为

$$n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_g(q) \tag{6.36}$$

那么，由式（6.33）推导出

$$\ddot{\xi} = \ddot{r} + \dot{T}\dot{q} + T(q)H^{-1}(q)[\tau - n(q, \dot{q})] \tag{6.37}$$

定义控制输入函数为

$$u = \ddot{r} + \dot{T}\dot{q} + T(q)H^{-1}(q)[\tau - n(q, \dot{q})] \tag{6.38}$$

现在可以定义状态 $y(t) \in R^{2p}$，由 $y = (\xi \quad \dot{\xi})$，机械臂动力学方程写为

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix} u \tag{6.39}$$

这是线性状态空间系统的表达式

$$\dot{y} = Ay + Bu \tag{6.40}$$

由控制输入 $u$ 驱动。由于 $A$ 和 $B$ 的特殊形式，这个系统被看做是布鲁诺夫斯基典型构成，而且总是可控制的，输入为 $u(t)$。

由于式（6.38）被认为是对机械臂动力学方程

的线性化变换，进而通过反变换可以得出关节转矩的表达式为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{T}^{+}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{u}-\ddot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (6.41)$$

式中，$T^{+}$ 是变换矩阵 $T(q)$ 的摩尔-彭罗斯广义逆矩阵。

在特殊情况下 $\boldsymbol{\xi}=e_q(t)$，并且如果根据 PD 反馈方程 $u=-K_P\boldsymbol{\xi}-K_V\boldsymbol{\xi}$，选择 $u(t)$ 使式（6.39）稳定，那么 $T=-I_n$。由式（6.41）定义的控制输入转矩$\boldsymbol{\tau}(t)$ 会使机械臂按照使 $y(t)$ 变为零的方式运动。在这种情况下，反馈线性化控制和逆动力学控制效果相同。

### 6.5.3　被动控制

这种控制方案明确地使用了拉格朗日系统的被动性性质[6.31,32]。较之逆动力学方法，被动控制器不依赖于对机械臂非线性的准确去除，它比前者具备更好的鲁棒特性。下式给出了被动控制输入。

$$\dot{\boldsymbol{q}}_r=\dot{\boldsymbol{q}}_d+\alpha\boldsymbol{e}_q,\ \alpha>0$$

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_r+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_r+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{K}_V\dot{\boldsymbol{e}}_q+\boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_q \quad (6.42)$$

通过式（6.42），可以得到下面的闭环系统

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{s}}_q+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{s}_q+\boldsymbol{K}_V\dot{\boldsymbol{e}}_q+\boldsymbol{K}_P\boldsymbol{e}_q=\boldsymbol{0} \quad (6.43)$$

其中，$\boldsymbol{s}_q=\dot{\boldsymbol{e}}_q+\alpha\boldsymbol{e}_q$. 选取李雅普诺夫函数 $V(y,t)$ 如下：

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\alpha\boldsymbol{K}_V+\boldsymbol{K}_P+\alpha^2\boldsymbol{H} & \alpha\boldsymbol{H}\\ \alpha\boldsymbol{H} & \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{y} \quad (6.44)$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

由于上述方程是正定的，所以它在原点处平衡，即 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{e}_q^{\mathrm{T}},\ \dot{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=0$。此外，$V$ 由下式限定

$$\sigma_m\|\boldsymbol{y}\|^2\leqslant\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\leqslant\sigma_M\|\boldsymbol{y}\|^2,\sigma_M\geqslant\sigma_m>0 \quad (6.45)$$

将 $V$ 对时间求导得到

$$\dot{V}=-\dot{\boldsymbol{e}}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_V\dot{\boldsymbol{e}}_q-\alpha\boldsymbol{e}_q\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{e}_q=-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}<0 \quad (6.46)$$

上式中 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}[\alpha\boldsymbol{K}_P,\ \boldsymbol{K}_V]$。由于 $\boldsymbol{Q}$ 是正定的，并且是 $\boldsymbol{y}$ 的二次函数，所以也可以得到下面的限定关系式

$$\kappa_m\|\boldsymbol{y}\|^2\leqslant\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\leqslant\kappa_M\|\boldsymbol{y}\|^2,\ \kappa_M\geqslant\kappa_m>0 \quad (6.47)$$

然后由李雅普诺夫函数 $V$ 的限定关系得到

$$\dot{V}\leqslant-\kappa_m\|\boldsymbol{y}\|^2=-2\eta V,\ \eta=\frac{\kappa_m}{\sigma_M} \quad (6.48)$$

最终可以得到

$$V(t)\leqslant V(0)\mathrm{e}^{-2\eta t} \quad (6.49)$$

这已经表明 $\alpha$ 的大小会大大影响跟踪结果[6.33]。在 $\alpha$ 取小的数值情况下，机械臂更加容易发生振动。大的 $\alpha$ 值对应着更好的跟踪性能，并且在位置误差较小时，可让 $s_q$避免受到速度测量噪声的影响。参考文献[6.34] 表明式（6.50）被用于二次优化。

$$\boldsymbol{K}_P=\alpha\boldsymbol{K}_V \quad (6.50)$$

### 6.5.4　小结

本节回顾了到目前为止提出的一些基于模型的运动控制方法。在这些控制方法中，理论上讲，闭环系统能够提供系统的渐近稳定或者全局指数稳定。然而这些理想的状态在实际情况下并不能达到，这主要由于实际的系统受到采样率、测量噪声、扰动和未建模的动态参数的影响[6.33,35,36]。

## 6.6　计算转矩控制

多年来，各式各样的机器人控制方案被提出来。它们中的多数可以被视为将线性化的反馈控制方案应用于非线性系统的计算转矩控制类方案的特例（如图6.5所示）[6.37,38]。这一节中首先介绍计算矩阵控制的概念，之后将介绍一种它的变形形式，所谓的计算转矩类控制。

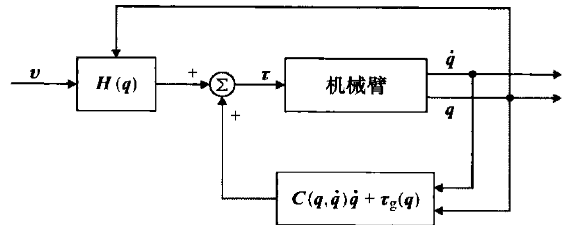



图 6.5　计算转矩控制

### 6.6.1　计算转矩控制

回顾式（6.27）中的控制系统输入变量

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})$$

上式也被称为计算转矩控制。它由一个内在的非线性补偿回路和一个有外生控制信号 $v$ 的外部回路组成。将这种控制方案应用于机器人机械臂的动力学模型，得到

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{v} \quad (6.51)$$

需要注意的是，这种控制输入将一个复杂的非线性控制器设计问题转化成了一个由 $n$ 个子系统组成的线性系统设计问题。一种外部回路控制 $v$ 是式（6.28）中所示的 PD 反馈：

$$v = \ddot{q}_d + K_V \dot{e}_q + K_P e_q$$

这种情况下，总的控制输入表达式为

$$\tau = H(q)(\ddot{q}_d + K_V \dot{e}_q + K_P e_q) + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_g(q)$$

并且由此产生的线性误差动力学方程为

$$\ddot{e}_q + K_V \dot{e}_q + K_P e_q = 0 \quad (6.52)$$

根据线性系统理论，确定跟踪误差收敛到零。

备注：

一般情况下，为了确保误差系统的稳定性，令$K_V$和$K_P$为$n \times n$的对角正定矩阵，即$K_V = diag(K_{V,1}, \cdots, K_{V,n}) > 0$，$K_P = diag(K_{P,1}, \cdots, K_{P,n}) > 0$。然而，由于外环乘法器$H(q)$和内环完全非线性补偿项$C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_g(q)$扰乱不同控制通路的关节信号，上述控制形式并不能得到关节的独立控制。

## 6.6.2 计算转矩类控制

值得注意的是，若想应用计算转矩控制，就需要确保动力学模型的各个参数完全已知，并且控制输入信号能够实现实时计算。为了避免这样的问题，提出了一些变化，例如计算转矩类控制。计算转矩类控制器可以通过修正如下计算转矩控制得到：

$$\tau = \hat{H}(q)v + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \tau(q) \quad (6.53)$$

式中，^代表计算值，并且说明了理论上的精确反馈线性控制不能在实际的不确定性系统中实现。图6.6为该类控制方案的示意图。

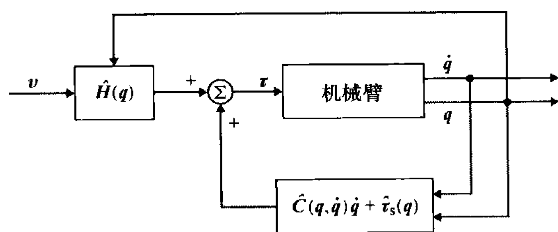



图6.6　计算转矩类控制

### 1. 具有变结构补偿的计算转矩类控制

由于系统参数的不确定性，为实现轨迹跟踪就需要在外回路设计中设计补偿项。下式为具有变结构补偿的计算转矩类控制方案的表达式。

$$v = \ddot{q}_d + K_V \dot{e}_q + K_P e_q + \Delta v \quad (6.54)$$

式中，变结构补偿项可以表达为

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho(x, t)\dfrac{B^T P x}{\|B^T P x\|}, & \text{if} \|B^T P x\| \neq 0 \\ 0, & \text{if} \|B^T P x\| = 0 \end{cases} \quad (6.55)$$

式中，$x = (e_q^T, \dot{e}_q^T)^T$，$B = (0, I_n)^T$，$P$是一个$(2n \times 2n)$的满足式(6.56)的对称正定矩阵。

$$PA + A^T P = -Q \quad (6.56)$$

式中，矩阵$A$被定义为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -K_P & -K_V \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

$Q$是任意一个合适的对称正定矩阵$(2n \times 2n)$。

$$\rho(x, t) = \frac{1}{1-\alpha}[\alpha\beta + \|K\|\|x\| + \bar{H}\phi(x, t)] \quad (6.58)$$

式中，$\alpha$和$\beta$都是正常数；$\|H^{-1}(q)\hat{H}(q) - I_n\| \leq \alpha < 1$对所有的$q \in R^n$都满足，且$\sup_{t\in[0,\infty)}\|\ddot{q}_d(t)\| < \beta$；$K$是一个$(n \times 2n)$的矩阵，并且$K = [K_P \quad K_V]$；对$q \in R^n$，有$\|H^{-1}(q)\| \leq \bar{\lambda}_H$，其中，$\bar{\lambda}_H$是一个正常数；此外函数$\phi$定义为式(6.59)：

$$\|[\hat{C}(q, \dot{q}) - C(q, \dot{q})]\dot{q} + [\hat{\tau}_g(q) - \tau_g(q)]\| \leq \phi(x, t) \quad (6.59)$$

可以看出，使用李雅普诺夫函数式(6.60)可以使式(6.59)的跟踪误差收敛到零。

$$V = x^T P x \quad (6.60)$$

这由参考文献[6.5, 40]中的稳定性分析得出。

注：

1）由6.1节中的性质6.1，存在正的常数$\bar{\lambda}_H$与$\bar{\lambda}_h$，有$\bar{\lambda}_h \leq \|H^{-1}(q)\| \leq \bar{\lambda}_H$，使此不等式对$q \in R^n$成立。如果选择

$$\hat{H} = \frac{1}{c}I_n \quad (6.61)$$

式中，$c = \dfrac{\bar{\lambda}_H + \bar{\lambda}_h}{2}$。则又有

$$\|H^{-1}(q)\hat{H}(q) - I_n\| \leq \frac{\bar{\lambda}_H - \bar{\lambda}_h}{\bar{\lambda}_H + \bar{\lambda}_h} \equiv \alpha < 1 \quad (6.62)$$

式(6.62)说明，对于相同的$\alpha < 1$，总是存在至少一个$\hat{H}$满足关系式。

2）由于$\Delta v$存在的间断点，当运用控制方案时可能会发生抖振现象。值得注意的是，由于控制中高频分量能够激发未建模的动力学作用（例如关节柔性），抖振现象经常是不可预期的[6.6,29,38]。为了避免抖振现象，采用变结构补偿的方法如：

$$\Delta v = \begin{cases} -\rho(x, t)\dfrac{B^T P x}{\|B^T P x\|}, & 当\|B^T P x\| > \varepsilon \\ \dfrac{-\rho(x, t)}{\varepsilon}B^T P x, & 当\|B^T P x\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (6.63)$$

式中，$\varepsilon$是一个用来作为边界层的正常数。根据这一修正，跟踪误差的收敛性可以被限定在一定的残差集范围内，当$\varepsilon$很小的时候便可以得到一个很小的残差

集范围。

**2. 具有独立关节补偿的计算转矩类控制**

前一种补偿方案是集中的，这就意味着若想实现在线计算需要完成大量的计算任务，并且需要昂贵的硬件作为支持。为了解决这一问题，下面将介绍一种带独立关节补偿的计算转矩类控制方案。在这种计算转矩类控制方案中，通过估计得到下述关系式：

$$\hat{H}(q)=I,\ \hat{C}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=0,\ \hat{\tau}(q)=0 \tag{6.64}$$

使用外环中的变量$\boldsymbol{v}$，得到

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}+\Delta\boldsymbol{v} \tag{6.65}$$

式中，正常数选取$\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}$和$\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}$，且足够大；$\Delta\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)^{\mathrm{T}}$中的第$i$个分量$\Delta\boldsymbol{v}_i$定义为

$$\Delta\boldsymbol{v}_i=\begin{cases}\text{如果}\ |s_i|\leqslant\dfrac{\varepsilon_i}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}},\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})},\ \text{则}\ -[\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}},\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})]^2\dfrac{s_i}{\varepsilon_i}\\ \text{如果}\ |s_i|>\dfrac{\varepsilon_i}{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}},\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})},\ \text{则}\ -\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})\dfrac{s_i}{|s_i|}\end{cases} \tag{6.66}$$

在这种补偿中，$s_i=\dot{e}_{q,i}+\lambda_i e_{q,i}$，$i\in\{1,\ \cdots,\ n\}$，并且$\lambda_i$为正常数。进一步根据机械臂的性质，可以得到：

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}|+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q})\|\leqslant\beta_1+\beta_2\|\boldsymbol{q}\|+\|\dot{\boldsymbol{q}}\|=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})$$

并且，$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)^{\mathrm{T}}$，进而有

$$\omega(q,\ \dot{q})=[1,\ \|q\|,\ \|\dot{q}\|]^{\mathrm{T}} \tag{6.67}$$

最后，$\varepsilon_i$是边界层的可变长度，$i\in\{1,\ \cdots,\ n\}$，并且满足

$$\dot{\varepsilon}_i=-g_i\varepsilon_i,\ \varepsilon(0)>0,\ g_i>0 \tag{6.68}$$

这里值得指出的一点是控制方案中的变量$\omega$被设计为期望补偿而不是反馈。进一步来讲，这种控制方案是之前那种关节独立控制的一种形式，并且具备前面提到的那些优点。通过应用李雅普诺夫函数可以在式（6.69）中体现跟踪误差逐渐趋于零这一特点：

$$V=\frac{1}{2}(e_{\mathrm{q}}^T\dot{e}_{\mathrm{q}}^T)\begin{pmatrix}\lambda K_{\mathrm{P}} & H\\ H & \lambda H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{\mathrm{q}}\\ \dot{e}_{\mathrm{q}}\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{n}g_i^{-1}\varepsilon_i \tag{6.69}$$

它沿着闭环系统轨迹的时间导数为

$$\dot{V}=-\alpha\left|\left|\begin{pmatrix}e_{\mathrm{q}}\\ \dot{e}_{\mathrm{q}}\end{pmatrix}\right|\right|^2 \tag{6.70}$$

如果$K_{\mathrm{P}}$和$\gamma$足够大，则可以得到$\alpha$为某一正常数。关于稳定性的详细分析在请参考文献［6.13］。

注：

与具有变结构补偿的计算转矩类控制类似，考虑如下的非零边界层：

$$\dot{\varepsilon}_i=-g_i\varepsilon_i,\ \varepsilon(0)>0,\ g_i,\ \alpha_i>0 \tag{6.71}$$

根据这样的修正，跟踪误差的收敛性可以被限定在一定的残差集范围内，当$\varepsilon$很小的时候便可以得到一个很小的残差集范围。为了完成点到点的控制任务，设计了一个带有重力补偿的PD控制器。

$$\hat{H}(q)=I,\ \hat{C}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{0},\ \hat{\tau}_{\mathrm{g}}(q)=\tau_{\mathrm{g}}(q) \tag{6.72}$$

式中，$\tau_{\mathrm{g}}(q)$是机械臂动力学模型的重力项。

使用外环中的变量$\nu$，得到：

$$\nu=K_V\dot{e}_q+K_Pe_q \tag{6.73}$$

在这样的情况下，控制输入变为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q}) \tag{6.74}$$

这种控制方案较之精确地计算转矩控制易于实现。通过应用李雅普诺夫函数可以体现跟踪误差逐渐趋于零这一特点：

$$V=\frac{1}{2}\dot{e}_{\mathrm{q}}^TH(q)\dot{e}_{\mathrm{q}}+\frac{1}{2}e_{\mathrm{q}}^TK_{\mathrm{P}}e_{\mathrm{q}} \tag{6.75}$$

它沿着闭环系统解轨迹的时间导数为

$$\dot{V}=-\dot{e}_{\mathrm{q}}^TK_{\mathrm{V}}\dot{e}_{\mathrm{q}} \tag{6.76}$$

关于稳定性的细节分析在参考文献［6.12］中叙述。需要注意的一点是，由于前一种控制方案基于拉萨尔不变集引理而要求系统是自主的（不随时间变化），这一结果适用于调节情况而不是轨迹跟踪情况。

注：

如果忽略机械臂动力学模型中的重力因素，即$\hat{\tau}_g(q)=0$，那么控制法则变为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{V}}\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{q}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{q}} \tag{6.77}$$

上式可以引出纯PD控制。增益矩阵$K_P$和$K_V$可以选取对角线型，从而使PD控制成为基于多关节动力学模型的独立关节控制的形式。

### 6.6.3 小结和扩展阅读

本节提出了两种控制方案：计算矩阵控制和计算矩阵类控制。前一种将多输入多输出（MIMO）的非线性机器人系统转化成了一个非常简单的解耦的线性闭环系统。因为前一种控制方案的实际运用需要事先知道所有的机械臂控制参数和它的有效载荷，使它显得不太可行。而后一种方案放宽了上述的约束，且仍旧可以实现目标系统

的不确定性跟踪。

参考文献［6.43］研究了几种具备前馈补偿的跟踪系统。参考文献［6.19］中介绍了一种基于P—D控制的自适应控制方案。

## 6.7 自适应控制

自适应控制与普通控制的最大差别是自适应控制有一些与时间相关的参数，并且它具有根据闭环系统中某些信号进行在线调整这些参数的机制。即使设备中参数不确定，这种控制方案仍然可以达到控制目标。本节中我们介绍几种在机器人机械臂动力学参数信息不完全的情况下的自适应控制方案。这些自适应控制方案的控制性能基本上是从性质6.5得出的，包括自适应计算转矩控制、自适应惯性相关控制、被动自适应控制，以及具有期望补偿的自适应控制。最后，将强调在参数收敛中很重要的持续激励条件。

### 6.7.1 自适应计算转矩控制

计算转矩控制的设计很有吸引力，是因为它允许设计者把MIMO高度耦合非线性系统转换成十分简单的解耦线性系统，它的控制方案已为大家所接受。但是这种反馈线性化方法依赖于完全的系统参数信息，并且得不到这些信息会引起错误的参数估计，导致误差系统的闭环模型中产生不匹配项。该项可以理解为在闭环系统输入处的非线性扰动作用。为了解决参数不确定的问题，我们考虑下式有参数估计的逆动力学方法：

$$\boldsymbol{\tau}=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_{d}+\boldsymbol{K}_{V}\dot{\boldsymbol{e}}_{q}+\boldsymbol{K}_{P}\boldsymbol{e}_{q})+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\hat{\boldsymbol{\tau}}_{g}(\boldsymbol{q}) \tag{6.78}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{H}}$、$\hat{\boldsymbol{C}}$、$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{g}$有和$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{\tau}_{g}$同样的函数式。由动力学模型的性质6.5有

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\hat{\boldsymbol{\tau}}_{g}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\hat{\boldsymbol{a}} \tag{6.79}$$

式中，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$是回归量，是一个已知的$(n\times r)$函数矩阵；$\boldsymbol{a}$是简化所有估计参数的$(r\times1)$向量。把控制输入$\tau$代入械臂动力学方程，得到闭环误差模型

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{e}}_{q}+\boldsymbol{K}_{V}\dot{\boldsymbol{e}}_{q}+\boldsymbol{K}_{P}\boldsymbol{e}_{q})=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{a}} \tag{6.80}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}$。为了得到合适的自适应法则，先假设加速度项$\ddot{\boldsymbol{q}}$是可测量的，而且估计惯性矩阵$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})$不是奇异的。为方便起见，误差方程重写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{a}} \tag{6.81}$$

式中$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{e}_{q}^{T},\ \dot{\boldsymbol{e}}_{q}^{T})^{T}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{n} & \boldsymbol{I}_{n}\\ -\boldsymbol{K}_{P} & -\boldsymbol{K}_{V}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{n}\\ \boldsymbol{I}_{n}\end{pmatrix}$
(6.82)

自适应法则可以认为是

$$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}=-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{Y}^{T}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})\hat{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{6.83}$$

式中，$\boldsymbol{\Gamma}$是一个$(r\times r)$的正定常数矩阵；$\mathbf{P}$是$(2n\times2n)$的对称正定常数矩阵，且满足：

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q} \tag{6.84}$$

式中，$\boldsymbol{Q}$是有相同维度的对称正定常数矩阵。该自适应法则有两个假定：

1）关节加速度$\ddot{\boldsymbol{q}}$是可测量的。

2）未知参数的边界范围是有效的。

第一个假定是为了确定回归量$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$是已知的先验，而第二个假定是通过将估计参数$\hat{\boldsymbol{a}}$限制在真实参数值范围内，以保持估计量$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})$非奇异。

实际上，李雅普诺夫稳定性理论和李雅普诺夫函数（见下式）能确定跟踪误差的收敛和保持所有内部信号有界。

$$\dot{V}=-\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{6.85}$$

具体的稳定性分析在参考文献［6.2］中详述。

注：

由于实际和理论上的原因，上述的第一条假定是很难使用的。在多数情况下不容易做到加速度的精确测量；但必须确定关于这个扰动的上述自适应控制方案的鲁棒性。此外，从纯理论的角度看，测量$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$，$\ddot{\boldsymbol{q}}$意味着我们不仅需要整个系统的状态向量，还需要它的导数。

### 6.7.2 自适应惯性相关控制

这里介绍另外一种自适应控制方案。本节提出的方案不需要机械臂加速度的测量值，也不需要估计惯性矩阵的转置，因此能避免自适应计算转矩控制方案的不足。我们先看控制输入

$$\boldsymbol{\tau}=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}+\hat{\boldsymbol{\tau}}_{g}(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{K}_{D}\boldsymbol{s} \tag{6.86}$$

式中，辅助信号$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{s}$定义为$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{q}}_{d}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_{q}$和$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{e}}_{q}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_{q}$，且$\boldsymbol{\Lambda}$表示$(n\times n)$的正定矩阵。根

据动态模型的性质6.5，有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})=\overline{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{a} \tag{6.87}$$

式中，$\overline{\boldsymbol{Y}}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是一个已知时间函数的 $(n\times r)$ 矩阵。式（6.87）和自适应计算转矩控制的参数分离方法的公式是同类型的。注意，$\overline{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})$ 是独立于关节加速度的。类似式（6.87），我们得到

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}+\hat{\boldsymbol{\tau}}_g(\boldsymbol{q})=\overline{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{a}} \tag{6.88}$$

把控制输入代入运动方程，得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{p})=$$
$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}+\hat{\boldsymbol{\tau}}_g(\boldsymbol{q})+\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{s}$$

由于 $\ddot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{v}}-\dot{\boldsymbol{s}}$，$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{s}$，前面的结果能重写成

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{s}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{s}+\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{s}=\overline{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\tilde{\boldsymbol{a}} \tag{6.89}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}$。自适应法则认为是

$$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}=-\boldsymbol{\Gamma}\overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{s} \tag{6.90}$$

跟踪误差收敛到零的边界上所有内部信号可以通过李雅普诺夫稳定性理论表示，使用下面类似李雅普诺夫函数的函数

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{s}+\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}} \tag{6.91}$$

它沿闭环系统的轨迹的时间导数为

$$\dot{V}=-\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{s} \tag{6.92}$$

详细的稳定性分析参见参考文献［6.32］。

注：

1）之前学到的自适应计算转矩控制的限制在这里被去除了。

2）$\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{s}$ 项给误差系统模型引入了 PD 型线性稳定控制作用。

3）如果参考轨迹满足以下持续激励条件，则参考轨迹的估计参数收敛于真实参数。

$$\alpha_1\boldsymbol{I}_r\leqslant\int_{t_0}^{t_0+t}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_d,\dot{\boldsymbol{q}}_d,\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}_d,\dot{\boldsymbol{q}}_d,\boldsymbol{v},\dot{\boldsymbol{v}})\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\alpha_2\boldsymbol{I}_r,$$

其中，所有的 $t_0$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，和 $t$ 都是正常数。

### 6.7.3 被动自适应控制

从控制的物理学角度我们能看到，由于自适应控制方案的发展，被动性的概念变得很普及。在这里会说明被动性的概念是怎样运用到设计一种机器人机械臂自适应控制法则类型中的。首先要定义一个辅助滤波跟踪误差信号 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}^{-1}(s)\boldsymbol{e}_q \tag{6.93}$$

其中，

$$\boldsymbol{F}^{-1}(s)=\left[s\boldsymbol{I}_n+\frac{1}{s}\boldsymbol{K}(s)\right] \tag{6.94}$$

式中，$s$ 是拉普拉斯变换变量。选择 $(n\times n)$ 的矩阵 $K(s)$，使 $F(s)$ 是一个完全合适、稳定的传递函数矩阵。如之前的方案，自适应控制策略和将已知函数从未知常数参数中分离出来的能力有密切的关系。使用上述的公式定义

$$\boldsymbol{Z\varphi}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})[\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{e}_q]+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$
$$\left[\dot{\boldsymbol{q}}_n+\frac{1}{s}\boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{e}_q\right]+\boldsymbol{\tau}_g(\boldsymbol{q})$$

式中，$\boldsymbol{Z}$ 是已知的 $(n\times r)$ 回归矩阵；$\boldsymbol{\varphi}$ 是自适应环境中未知系统参数的一个向量。注意到上式可以改写，使 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 能不依赖于关节加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是很重要的。这里的自适应控制方案称为被动性方法，是因为 $-\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 的映射被构造为被动映射。即，我们得到了一个自适应法则，有

$$\int_0^t-\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(\sigma)Z(\sigma)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\sigma)\mathrm{d}\sigma\geqslant-\beta \tag{6.95}$$

总是满足某个正纯量常数 $\beta$。这类自适应控制器的控制输入为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{r} \tag{6.96}$$

详细的稳定性分析参见参考文献［6.44］。

备注

1）如果选取 $\boldsymbol{K}(s)$，那么 $\boldsymbol{H}(s)$ 有一个相对度，$\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 将不依赖于 $\ddot{\boldsymbol{q}}$。

2）通过在定义 $\boldsymbol{r}$ 中选择不同的传递函数矩阵 $\boldsymbol{K}(s)$，可以由自适应被动控制方法产生多种控制方案的类型。

3）注意，定义 $\boldsymbol{K}(s)=s\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{F}(s)=(s\,\boldsymbol{I}n+\boldsymbol{\Lambda})^{-1}$，控制输入为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{r}$$

且

$$\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})(\ddot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{e}}_q)+\hat{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})(\dot{\boldsymbol{q}}_d+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_q)+\hat{\boldsymbol{\tau}}_g(\boldsymbol{q})$$

自适应法则可能被选取为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{e}}_q+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{e}_q)$$

以满足被动映射条件。这表明自适应惯性相关控制可以看作是自适应被动控制的特例。

### 6.7.4 具有期望补偿的自适应控制

为了实现自适应控制方案，需要实时计算 $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 的元素。然而，这个过程会非常浪费时间，因为它涉及关节位置和速度的高次非线性函数的计算，因此，这种方案的实时实现是相当困难的。为了克服这些困难，这里提出并讨论了带期望补偿的自适应控制。换言之，用期望变量替换变量 $q$，$\dot{q}$ 和 $\ddot{q}$，即，$q_d$，$\dot{q}_d$ 和 $\ddot{q}_d$。因为期望量是之前已知的，所以它们相应的计算可以离线进行，使得实时实现似乎更可行。我们考虑控制输入

$$\tau = Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\hat{a} + k_a s + k_p e_q + k_n \|e_q\|^2 s \tag{6.97}$$

式中，正常数 $k_a$，$k_p$，和 $k_n$ 足够大；辅助信号 $s$ 定义为 $s = \dot{e}_q + e_q$。自适应法则认为是

$$\dot{\hat{a}} = -\Gamma Y^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)s \tag{6.98}$$

值得注意的是，在控制和自适应法则中采用了期望补偿，使计算负荷大大减少。便于分析起见，我们注意到

$$\|Y(q, \dot{q}, \ddot{q})a - Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\hat{a}\| \leqslant$$
$$\zeta_1\|e_q\| + \zeta_2\|e_q\|^2 + \zeta_3\|s\| + \zeta_4\|s\|\|e_q\|$$

式中，$\zeta_1$，$\zeta_2$，$\zeta_3$，和 $\zeta_4$ 是正常数。为了实现轨迹跟踪，需要：

$$k_a > \zeta_2 + \zeta_4$$
$$k_p > \frac{\zeta_1}{2} + \frac{\zeta_2}{4}$$
$$k_v > \frac{\zeta_1}{2} + \zeta_3 + \frac{\zeta_2}{4}$$

（例如，增益 $k_a$，$k_p$，和 $k_v$ 值应该足够大）。李雅普诺夫稳定性理论和下面的与李雅普诺夫方程类似的方程能证明内部信号的边界内的跟踪误差收敛于零。

$$V = \frac{1}{2}s^T H(q)s + \frac{1}{2}k_p e_q^T e_q + \frac{1}{2}\tilde{a}^T \Gamma^{-1}\tilde{a} \tag{6.99}$$

其中，沿着闭环系统的轨迹的时间导数推导为

$$\dot{V} \leqslant -x^T Q x \tag{6.100}$$

其中，

$$x = \begin{pmatrix} \|e_q\| \\ \|s\| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} k_p - \zeta_2/4 & -\zeta_1/2 \\ -\zeta_1/2 & k_v - \zeta_3 - \zeta_4/4 \end{pmatrix}。$$

详细的稳定性分析参加参考文献［6.45］。

### 6.7.5 小结和扩展阅读

由于计算转矩控制容许参数的不确定性，因此提出了多种自适应控制方案。首先介绍了基于计算转矩控制的自适应控制方案。然后为克服之前提及的不足，如关节加速度的可测量性和估计惯性矩阵的可逆性，我们介绍了一种没有这些不足的替代的自适应控制方案。最近，控制中吸收了物理学的观点，自适应被动控制变得普及了，所以在这里介绍和讨论一下。最后，为了减少自适应方案的计算负荷，我们介绍了带期望补偿的自适应控制。

参考文献［6.46］中提出了一种处理刚性机械臂问题的自适应控制的快速计算方案。通过假定关节动力学是解耦的（如每个关节被认为是一个独立的二阶线性系统），完成稳定性分析。这一领域的其他开创性的工作可以找到，比如，在参考文献［6.47，48］中，尽管基础的动力学模型性质一个也没使用，却还是考虑到了完整的动力学，但是控制输入是不连续的，会引起抖振。虽然假定自适应中某个时变量保持为常数，在参考文献［6.49］节中明确使用了惯性矩阵的正定性。很有意思的是所有的这些方案都是基于参考文献［6.50］中为线性系统提出的模型参考自适应控制（MRAC）概念。因此，概念上它们与本节所介绍的真实非线性方案十分不同。

参考文献［6.51］和［6.52］中，提出了一种基于被动性的修正版的最小二乘估计方案，它确定了方案的闭环稳定性。在参考文献［6.53］能找到其他方案，其中没有用到反对称性质。在参考文献［6.54］中，递归的牛顿-欧拉方程用来代替拉格朗日方程推导机械臂的动力学方程，因此，简化的计算帮助了实际应用。

虽然自适应控制提出了解决参数不确定性问题的方法，但是自适应控制器的鲁棒性问题在这一领域仍是一个非常有趣的课题。确实，测量噪声或未建模动力学（如，柔性）会产生无界的闭环信号。特别地，估计参数会发散——这是自适应控制中一种众所周知的现象，称为参数漂移。参考文献［6.55］和［6.56］中研究了由线性系统自适应控制得出的方法，其中修正的估计值确定估计值的边界。在参考文献［6.57］中，为了加强鲁棒性，修正了参考文献［6.32］中的控制器。

## 6.8 最优和鲁棒控制

已知一个非线性系统，例如机器人机械臂，人

们能够设计许多稳定化的控制器[6.29,41]。换言之，控制系统的稳定性不能确定一个唯一的控制器。很自然地，人们在许多的控制器中寻找一个最优的控制器。然而，只有在有目标系统相当精确的信息情况下，例如精确的系统模型，一个最优的控制器设计才是有可能的[6.34,58]。当存在实际系统与其数学模型之间的不一致时，一个设计的最优控制器就不再是最优的，甚至可能在真实系统中最终是不稳定的。一般来说，最优控制设计架构并不是解决系统不确定性最好的一个。为了处理控制设计阶段的系统不确定性，需要一个鲁棒控制设计架构[6.59]。鲁棒控制的主要目标之一是即使数学模型或未建模的动力学等中存在不确定性，也要保持所控制系统的稳定性。

考虑一个由如下非线性时变微分方程描述的仿射非线性系统，其中

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{w} \quad (6.101)$$

式中，$\boldsymbol{u} \in R^m$ 是控制输入；$\boldsymbol{w} \in R^w$ 是扰动。不考虑扰动或未建模动力学，系统简化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u} \quad (6.102)$$

实际上，根据控制目标存在许多种描述非线性系统的方法[6.1,16.21,23,34,53]。

## 6.8.1　二次型最优控制

每一个最优控制器都是基于它自己的成本函数[6.60,61]。我们可以这样定义它的成本函数[6.62,63]

$$z=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}$$

有 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, t)>\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)>\boldsymbol{0}$，于是有

$$\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}z=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}$$

对于一个一阶可微正定函数，通过解以下汉密尔顿-雅可比-贝尔曼（HJB）方程[6.34,58]，从而找到系统的二次最优控制式（6.102）。

$$0=\mathrm{HJB}(\boldsymbol{x}, t; V)=V_t(\boldsymbol{x}, t)+\boldsymbol{V}_x(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_x(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{V}_x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)$$

式中，$V_t=\dfrac{\partial V}{\partial t}$；$\boldsymbol{V}_x=\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}$。

于是这个二次最优控制可定义为

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{V}_x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \quad (6.103)$$

注意 HJB 方程是一个非线性二阶偏微分方程。

不像之前提过的最优控制问题那样，所谓的逆二次最优控制是为了找到一组 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, t)$，使得 HJB 方程有解 $V(\boldsymbol{x}, t)$。逆二次最优控制于是可以定义为式（6.103）。

## 6.8.2　非线性 $\mathcal{H}_\infty$ 控制

当扰动无法忽略的时候，可以这样来处理扰动作用

$$\int_0^t z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, \tau)z(\boldsymbol{x}, \tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \gamma^2\int_0^t \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\mathrm{d}\tau \quad (6.104)$$

式中，$\gamma>0$ 给定了从扰动输入 $\boldsymbol{w}$ 到成本变量 $z$ 的闭环系统的 $L_2$ 增益。这被称为 $L_2$ 增益的衰减要求。非线性 $\mathcal{H}_\infty$ 最优控制给出了一种设计最优和鲁棒控制的系统化方法。令 $\gamma>0$ 已知，解以下方程：

$$HJI_\gamma(\boldsymbol{x}, t; V)=V_t(\boldsymbol{x}, t)+\boldsymbol{V}_x(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_x(\boldsymbol{x}, t)\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)-\gamma^{-2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\}\boldsymbol{V}_x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)\leqslant 0 \quad (6.105)$$

于是控制定义为：

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{V}_x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, t) \quad (6.106)$$

这个偏微分不等式被称为汉密尔顿-雅克比-艾萨克（HJI）不等式。那么，可以定义逆非线性 $\mathcal{H}_\infty$ 最优控制问题，该问题可以找到一组 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, t)$，使得对一个指定的 $L_2$ 增益 $\gamma$，达到了 $L_2$ 增益要求[6.65]。

有两件事值得进一步讨论。第一，$L_2$ 增益要求只对 $L_2$ 范数（欧几里德距离）是有界的扰动信号 $\boldsymbol{w}$ 有效。第二，$\mathcal{H}_\infty$ 最优控制的定义不是唯一的。因此，我们可以从众多的 $\mathcal{H}_\infty$ 最优控制器中选出一个二次最优的。准确地说，由于期望的 $L_2$ 增益是指定的先验，那么这个控制（6.106）应该被称作 $\mathcal{H}_\infty$ 的次优控制。一个真正的 $\mathcal{H}_\infty$ 最优控制是找到使 $L_2$ 增益要求实现的 $\gamma$ 为最小值。

## 6.8.3　非线性 $\mathcal{H}_\infty$ 控制的被动设计

有许多设计最优和（或）鲁棒控制的方法。其中，被动控制可以充分利用上面所描述到的性质[6.31]。它包括两部分：一个来自保留了系统被动性的参考运动补偿，另一个则要达到稳定性、鲁棒性和（或）最优性[6.65,66]。

假设，动力学参数被确定为 $\hat{H}(q)$，$\hat{C}(q,\ \dot{q})$ 和 $\hat{\tau}_g(q)$，它们的对应部分分别是 $H(q)$，$C(q,\ \dot{q})$ 和 $\tau_g(q)$。那么，被动控制会产生下面的跟踪控制法则：

$$\tau = \hat{H}(q)\ddot{q}_{ref} + \hat{C}(q,\ \dot{q})\dot{q}_{ref} + \hat{\tau}_g(q) - u \tag{6.107}$$

式中，$\ddot{q}_{ref}$是参考加速度，定义为：

$$\ddot{q}_{ref} = \ddot{q}_d + K_V\dot{e}_q + K_P e_q \tag{6.108}$$

式中，$K_V = \text{diag}\{k_V,\ i\} > 0$；$K_P = \text{diag}\{k_P,\ i\} > 0$。参考加速度产生中涉及两个参数。有时可以采用下面的替代方法：

$$\ddot{q}_{ref} = \ddot{q}_d + K_V\dot{e}_q$$

这减少了闭环系统的阶数，因为当式（6.108）的定义要求状态 $x = \left(\int e_q^T, e_q^T, \dot{e}_q^T\right)^T$ 时，状态 $x = (e_q^T,\ \dot{e}_q^T)^T$ 对于系统描述是充分的，控制下的闭环动力学由下式给出

$$H(q)\ddot{e}_{ref} + C(q,\ \dot{q})\dot{e}_{ref} = u + w \tag{6.109}$$

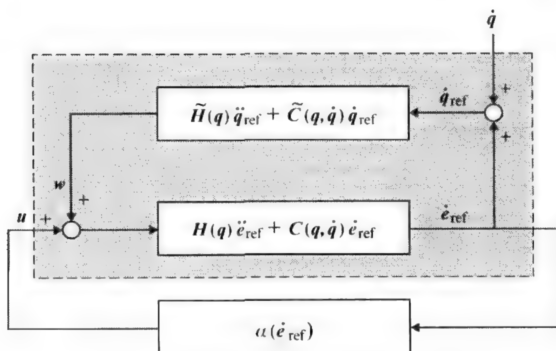



图6.7 根据公式（6.109）的闭环系统

其中，

$$\ddot{e}_{ref} = \ddot{e}_q + K_V\dot{e}_q + K_P e_q$$

$$\dot{e}_{ref} = \dot{e}_q + K_V e_q + K_P\int e_q$$

如果 $d(t) = 0$，且 $\hat{H} = H$，$\hat{C} = C$，$\hat{\tau}_g = \tau_g$，则 $w = 0$。否则，扰动定义为

$$w = \tilde{H}(q)\ddot{q}_{ref} + \tilde{C}(q,\ \dot{q})\dot{q}_{ref} + \tau_g(q) + \text{d}(t) \tag{6.110}$$

式中，$\tilde{H} = H - \hat{H}$；$\tilde{C} = C - \hat{C}$；$\tilde{\tau}_g = \hat{\tau}_g - \tau_g$。特别有意思的是，该系统（6.109）定义了从 $u + w$ 到 $\dot{e}_{ref}$的被动映射。

根据这种方法，辅助控制输入 $u$ 是指定的，被动控制可实现稳定性、鲁棒性和（或）最优性。

### 6.8.4 逆非线性$\mathcal{H}_\infty$控制问题的解决方案

通过参考误差反馈定义辅助控制输入

$$u = -\alpha R^{-1}(x,\ t)\dot{e}_{ref} \tag{6.111}$$

其中，$\alpha > 1$ 是任意的。那么，控制提供了逆非线性$\mathcal{H}_\infty$最优性。

----------

定理 6.1：逆非线性$\mathcal{H}_\infty$最优性[6.65]。

使参考加速度产生增益矩阵 $K_V$ 和 $K_P$，且满足

$$K_V^2 > 2K_P \tag{6.112}$$

那么，对于一个给定的 $\gamma > 0$，参考误差反馈

$$u = -K\dot{e}_{ref} = -K\left(\dot{e}_q + K_V e_q + K_P\int e_q\right) \tag{6.113}$$

对于

$$Q = \begin{pmatrix} K_P^2 K_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & (K_V^2 - 2K_P)K_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & K_\gamma \end{pmatrix} \tag{6.114}$$

$$R = K^{-1} \tag{6.115}$$

满足 $L_2$ 增益衰减要求。

其中

$$K_\gamma = K - \frac{1}{\gamma^2}I > 0 \tag{6.116}$$

----------

给定 $\gamma$，可以设 $K = \alpha\frac{1}{\gamma^2}I$，且 $\alpha > 1$，得到 $K_\gamma = (\alpha - 1)\frac{1}{\gamma^2}I$

当惯性矩阵被确定为对角常数矩阵后，如 $\hat{H} = \text{diag}\{\hat{m}_i\}$，应该设 $\hat{C} = 0$。此外，可以设 $\hat{\tau}_g = 0$。则推出了解耦的 PID 控制的表达式：

$$\tau_i = \hat{m}_i(\ddot{q}_{d,\,i} + k_{V,\,i}\dot{e}_{q,i} + k_{P,\,i}e_{q,\,i}) + \alpha\frac{1}{\gamma^2}\left(\dot{e}_{q,\,i} + k_{V,\,i}e_{q,\,i} + k_{P,\,i}\int e_{q,\,i}\right)$$

当 $\alpha > 1$ 时，上式可以重写为

$$\tau_i = \hat{m}_i\ddot{q}_{d,\,i} + \left(\hat{m}_i k_{V,\,i} + \alpha\frac{1}{\gamma^2}\right)\dot{e}_{q,\,i} + \left(\hat{m}_i k_{P,\,i} + \alpha\frac{k_{V,\,i}}{\gamma^2}\right)e_{q,\,i} + \alpha\frac{k_{P,\,i}}{\gamma^2}\int e_{q,\,i} \tag{6.117}$$

这就推出了具有期望加速度前馈的 PID 控制[6.67]：

$$\tau_i = \hat{m}_i\ddot{q}_{d,\,i} + k_{V,\,i}^*\dot{e}_{q,\,i} + k_{P,\,i}^*e_{q,i} + k_{I,\,i}^*\int e_{q,\,i} \tag{6.118a}$$

其中，

$$k_{\mathrm{V},i}^{*} = \hat{m}_i k_{\mathrm{V},i} + \alpha \frac{1}{\gamma^2} \tag{6.118b}$$

$$k_{\mathrm{P},i}^{*} = \hat{m}_i k_{\mathrm{P},i} + \alpha \frac{k_{\mathrm{V},i}}{\gamma^2} \tag{6.118c}$$

$$k_{\mathrm{I},i}^{*} = \alpha \frac{k_{\mathrm{P},i}}{\gamma^2} \tag{6.118d}$$

## 6.9 数字化实现

前面介绍过的控制器，大多数都可以在微处理器上数字化地实现。本节讨论基本但是实质的计算机实现相关的实践问题。当控制器是在计算机控制系统中完成的时候，读取的是模拟输入，输出为一个特定采样周期下的输出。由于采样会在控制闭环中引入时间延迟，因而这是与模拟实现相比的一个不足之处。图6.8展示了有数字化实现的控制系统的总框图。当用数字计算机实现控制法则的时候，很方便用中断程序将代码序列分成四个过程程序，如图6.9所示。以正确的频率从传感器读取输入信号，同步将控制信号写到数模（D/A）转换器是非常重要的。因此，这些过程放在第一个程序中。在存储了计数器的值并提取了D/A值后（这些值已经在上一步计算过），下一步程序将产生参考值。带滤波的控制程序遵循并产生纯量或向量的控制输出。最后，给出检查参数值的用户接口，并被用来调节和调试。

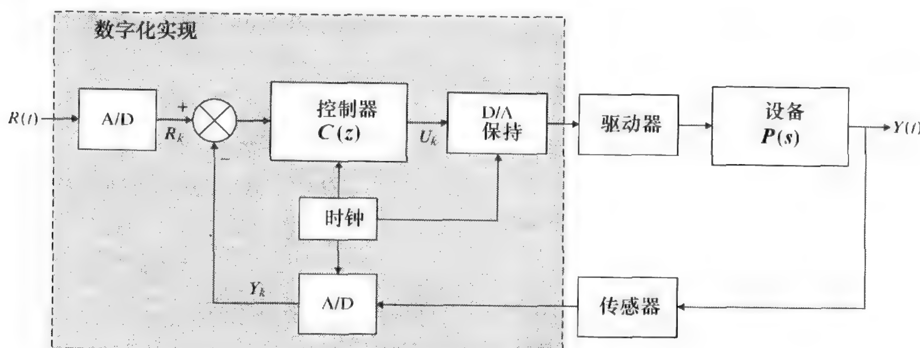



图6.8 系统控制的数字化实现

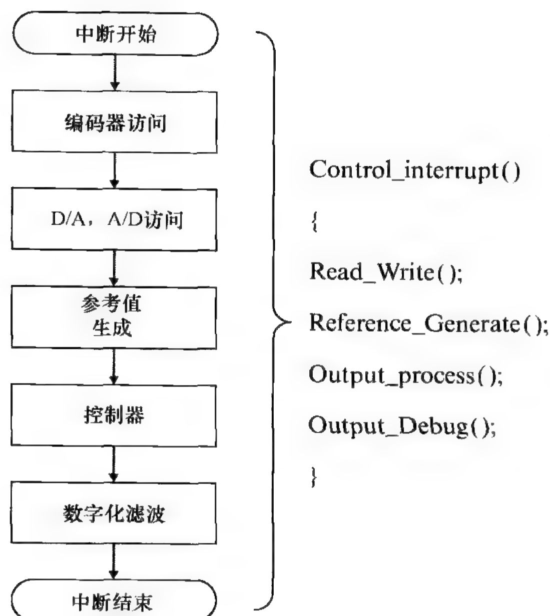



图6.9 数字控制中断程序的序列

### 6.9.1 参考轨迹生成

参考轨迹生成是一个起点，用做控制的目标值。它是一组在控制处理器中每个中断的设定点的值，所以被称作运动轮廓。既然实际上此时伺服控制的目标不是点对点控制，而是轨迹跟踪，那么设计好这个轮廓就非常重要了，因为跟踪和定位误差对此十分敏感。一般梯形轮廓是很好计算的，在加速和减速期间需要恒定电流。然而，运动两端发生大的抖动会引起振动。大的抖动（加速度的迅速改变，及相应的力的迅速改变）可能会对动力学系统造成实质性损害和引起不希望的振动。因此，需要平滑的轮廓，尽管这需要更多的计算时间。一个使用三次多项式的简单运动轮廓如下：

$$y(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

$$\dot{y}(t) = b + 2ct + 3dt^2$$

$$\ddot{y}(t) = 2c + 6dt$$

实际上，运动轮廓方程是标准化的，并且可以编

程为函数，且约束为：

$$y(0)=0,\quad y(1)=1$$

$$\dot{y}(0)=0,\quad \dot{y}(1)=0$$

当运动时间和距离是标准化的时候，程序代码采用式（6.119）中所示的式子。

$$y\left(\frac{t}{T}\right)=\left[3\left(\frac{t}{T}\right)^2-2\left(\frac{t}{T}\right)^3\right]S,$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right)=\left[\frac{6}{T}\left(\frac{t}{T}\right)-\frac{6}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]S,$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right)=\left[\frac{6}{T^2}-\frac{12}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)\right]S,$$

$$\dddot{y}\left(\frac{t}{T}\right)=-\frac{12}{T^3}S,\qquad(6.119)$$

式中，$S$代表距离，$T$代表运动时间。

对于高速伺服系统，抖动轮廓在运行的开始和结束是不变的。这意味着需要很高的机械刚度。即使计算负荷增加了，15甚至17次多项式也可以设计来满足加速度或抖动约束。

运动轮廓经常以表格或中断程序“Reference_Generate（）”的形式保存在只读存储器（ROM）中，如图6.9所示。在大多数跟踪伺服控制问题中，需要生成位置轮廓。但是，速度和加速度也在中断程序中实时计算，用做前馈控制的输入。这些方法改善了跟踪性能，其算法如下：

$$\begin{aligned}&Pos_{ref}=PosTable(\text{pointer})\times Distance;\\&Vel_{ref}=Pos_{ref}-Pos_{ref,OLD}\\&Acc_{ref}=Vel_{ref}-Vel_{ref,OLD}\\&\vdots\end{aligned}\qquad(6.120)$$

式中，$Vel_{ref}$和$Acc_{ref}$并不是实际参考速度和加速度，它们分别表示在实际使用中与中断时间间隔成比例的参考速度以及与中断时间间隔的平方成比例的加速度。此外，当使用在式（6.120）中的简单差分公式从位置轮廓计算速度轮廓时，由于重要数字信号的丢失，数字信号处理器（DSP）或处理器的有限的寄存器大小可能引起误差。这意味着，速度轮廓中含有周期性的噪声信号。当速度、加速度和抖动的轮廓用做高速跟踪的前馈控制系统的输入时，这种数字误差将在运动中产生真实的噪声，并且降低控制系统的性能。

可以使用数值微分方程，而不用式（6.120）中的简单差分。方程（6.121）给出了一阶向后-差分方程的最简形式：

$$\begin{aligned}\dot{y}_k&=\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta t},\\\ddot{y}_k&=\frac{y_k-2y_{k-1}+y_{k-2}}{\Delta t^2},\\\dddot{y}_k&=\frac{y_k-3y_{k-1}+3y_{k-2}-y_{k-3}}{\Delta t^3}\end{aligned}\qquad(6.121)$$

如果存储容量足够大，以表格的形式保存每个轮廓可能是另一种好方法。

重要的是，所控制的系统运动的最大的规格参数，如，速度或加速度，或者甚至是抖动，应该在轮廓设计步骤中予以考虑。如果轮廓强迫系统超出最大规格参数值，由于编码器脉冲值的丢失，会大大增加系统发生碰撞事故的可能性。

### 6.9.2　代码的Z变换

通过使用Z变换可以将连续时间系统变换到离散时间系统。尽管物理过程仍然是一个连续时间系统，但是，离散时间系统用于获取采样点处给出物理过程行为的数学模型。拉普拉斯变换用于分析在S域上的控制系统。在大多数情况下，控制器和滤波器的设计都使用了在S域上的工具来完成。为了使用程序代码来实现这些结果，了解Z变换是必不可少的。所有在S域上设计的控制器和滤波器都可以容易地通过Z变换编译成为一段程序代码，这是因为它有数字化的差分序列公式。

以一个编码的PID控制器为例。在传递函数的式中，这种控制器的基本结构是

$$\frac{Y(s)}{E(s)}=K_P+\frac{K_I}{s}+sK_V\qquad(6.122)$$

从频域到离散域的转换有几种不同的方式。为了保持稳定性，经常使用向后欧拉算法和塔斯汀算法。虽然塔斯汀算法被认为是一种更为准确的算法，但是下面采用了向后欧拉算法。

把向后欧拉方程代入式（6.122），有

$$s\cong\frac{z-1}{zT}$$

得到下面的离散式

$$\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{\alpha+\beta z^{-1}+\gamma z^{-2}}{T(1-z^{-1})}\qquad(6.123)$$

其中，

$$\alpha=K_IT^2+K_PT+K_V;$$

$$\beta=-K_PT-2K_V;$$

$$\gamma=K_V。$$

现在，可以用差分方程重新整理为：

$$T(y_k-y_{k-1})=\alpha e_k+\beta e_{k-1}+\gamma e_{k-2}$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{T}(\alpha e_k + \beta e_{k-1} + \gamma e_{k-2})$$

$$y_k - y_{k-1} = +\frac{\alpha}{T}e_k + \frac{\beta}{T}e_{k-1} + \frac{\gamma}{T}e_{k-2} \quad (6.124)$$

这个公式可以直接被编译为代码：

$$e_k = p_{k,\text{ref}} - p_k$$

$$\begin{aligned} e_k^v &= v_{k,\text{ref}} - v_k \\ &= (p_{k,\text{ref}} - p_{k-1,\text{ref}}) - (p_k - p_{k-1}) \\ &= e_k - e_{k-1} \end{aligned}$$

$$\text{sum}_k = \text{sun}_{k-1} + e_k = \sum_{j=0}^{k} e_k$$

$$y_k = K_{\text{P,c}}e_k + K_{\text{V,c}}(e_k - e_{k-1}) + K_{\text{I,c}}\text{sum}_k$$

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= (K_{\text{P,c}}e_k - K_{\text{P,c}}e_{k-1}) \\ &\quad + [K_{\text{V,c}}(e_k - e_{k-1})] \\ &\quad - [K_{\text{V,c}}(e_{k-1} - e_{k-2})] \\ &\quad + (K_{\text{I,c}}\text{sum}_k - K_{\text{I,c}}\text{sum}_{k-1}) \\ &= (K_{\text{P,c}} + K_{\text{V,c}} + K_{\text{I,c}})e_k \\ &\quad - (K_{\text{P,c}} + 2K_{\text{V,c}})e_{k-1} + K_{\text{V,c}}e_{k-2} \end{aligned} \quad (6.125)$$

式中，$p_k$是现在的位置；$v_k$是当前速度；下标 ref 代表参考；下标 c 代表代码。比较式（6.124）和式（6.125）的参数，可得

$$\frac{\alpha}{T} = K_\text{P} + \frac{K_\text{V}}{T} + K_\text{I}T = (K_{\text{P,c}} + K_{\text{V,c}} + K_{\text{I,c}})$$

$$\frac{\beta}{T} = -K_\text{P} - \frac{2K_\text{V}}{T} = -(K_{\text{P,c}} + 2K_{\text{V,c}})$$

$$\frac{\gamma}{T} = \frac{K_\text{V}}{T} = K_{\text{V,c}}$$

这表明在增益的设计和编码的式子之间存在关联：

$$K_{\text{P,c}} = K_\text{P}$$

$$K_{\text{V,c}} = \frac{K_\text{V}}{T}$$

$$K_{\text{I,c}} = K_\text{I}T \quad (6.126)$$

随着同一系统中采样频率的增加，编码的 $K_\text{V}$ 增益应该增加，同时编码的 $K_\text{I}$ 增益应该降低。使用这种方法所设计的控制器可以在 DSP 或微处理器中进行编译。尽管如此，对于控制算法的分析和仿真应该事先充分演算，才能得到控制系统的优异表现。

## 6.10 学习控制

由于许多机器人应用，比如拾取与放置操作、喷漆、电路板组装等等，都涉及重复性的运动，人们自然会考虑利用以往周期中收集的数据来改善机械臂在随后周期中的性能。这就是“重复控制”或“学习控制”的基本理念。考虑在6.1节中给出的机器人模型，并假设给定一个在有限的时间间隔 $0 \leqslant t \leqslant T$ 内的期望的关节轨迹 $\boldsymbol{q}_\text{d}(t)$。参考轨迹 $\boldsymbol{q}_\text{d}$ 被用在机械臂的重复轨迹中，这里或者假设运动轨迹是周期性的，$\boldsymbol{q}_\text{d}(\text{T}) = \boldsymbol{q}_\text{d}(0)$（即重复控制），或者假设机器人在每次轨迹的开始都被重新初始化，使之位于期望轨迹上（亦即学习控制）。下文中，我们将用“学习控制”这个词代表“重复控制”或者“学习控制”。

### 6.10.1 纯 P 型学习控制

用$\boldsymbol{\tau}_\text{k}$表示第 $k$ 个周期中的输入转矩，并产生输出 $\boldsymbol{q}_\text{k}(t)$，其中 $0 < t < T_\text{bnd}$。现在我们考虑如下假设：

1）假设1：每次实验都在固定的时间期限 $\text{T}_{bnd} > 0$ 时结束。

2）假设2：满足初始设置的重复性。

3）假设3：整个重复轨迹中系统的动力学不变性是确定的。

4）假设4：每个输出 $\boldsymbol{q}_k$都是可测量的，从而误差信号 $\Delta\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{q}_d$可以用来构造下一个输入 $\boldsymbol{\tau}_{k+1}$。

5）假设5：机器人机械臂的动力学是可逆的。

由此学习控制问题被归结为确定一个递归学习法则 $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{\tau}_{k+1} = \boldsymbol{L}[\boldsymbol{\tau}_k(t), \Delta\boldsymbol{q}_k(t)], 0 \leqslant t \leqslant T_\text{bnd} \quad (6.127)$$

式中，$\Delta\boldsymbol{q}_k(t) = \boldsymbol{q}_k(t) - \boldsymbol{q}_d(t)$，使得在某些适当定义的函数范数中 $\|\cdot\|$，当 $k \to \infty$ 时，$\|\Delta\boldsymbol{q}_k\| \to 0$。初始控制输入可以是任何一个能够产生稳定输出的控制输入，比如 PD 控制。这样的学习控制方案之所以有吸引力，是因为动力学的精确模型不需要是先验的。

已经有几种方法用来得出一个适当的学习法则 $\boldsymbol{L}$，以及证明输出误差的收敛性。纯 P 型学习法则是其形式之一：

$$\boldsymbol{\tau}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\tau}_k(t) - \boldsymbol{\Phi}\Delta\boldsymbol{q}_k(t) \quad (6.128)$$

之所以起了这个名字，是因为在每次迭代的过程中，输入转矩的修正项都是和误差 $\Delta\boldsymbol{q}_k$成正比的。现在让 $\boldsymbol{\tau}_d$用计算转矩控制来定义，亦即，

$$\boldsymbol{\tau}_d(t) = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{q}_\text{d}(t)]\ddot{\boldsymbol{q}}_\text{d}(t) + \boldsymbol{C}[\boldsymbol{q}_\text{d}(t), \dot{\boldsymbol{q}}_\text{d}(t)]\dot{\boldsymbol{q}}_\text{d}(t) + \boldsymbol{\tau}_\text{g}[\boldsymbol{q}_\text{d}(t)] \quad (6.129)$$

应该记得，函数 $\boldsymbol{\tau}_k$实际不需要计算的，只需要知道它存在即可。对于 P 型学习控制法则，我们有

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{k+1}(t) = \Delta\boldsymbol{\tau}_k(t) - \boldsymbol{\Phi}\Delta\boldsymbol{q}_k(t) \quad (6.130)$$

其中，$\Delta\boldsymbol{\tau}_k(t) = \boldsymbol{\tau}_k(t) - \boldsymbol{\tau}_d(t)$，使得

$$\|\Delta\boldsymbol{\tau}_{k+1}(t)\|^2 \leqslant \|\Delta\boldsymbol{\tau}_k(t)\|^2 - \beta\|\boldsymbol{\Phi}\Delta\boldsymbol{q}_k(t)\|^2 \quad (6.131)$$

如果存在正常数 $\lambda$ 和 $\beta$，那么对于任意的 $k$，有

$$\int_0^{T_{\mathrm{bnd}}} \mathrm{e}^{-\lambda t} \Delta \boldsymbol{q}_k^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{\tau}_k(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1+\beta}{2} \| \boldsymbol{\Phi} \Delta \boldsymbol{q}_k(t) \|^2 \tag{6.132}$$

接下来它遵循不等式（6.132），并在范数意义上，当 $k \to \infty$，$\Delta q_k \to 0$。这种控制方案的详细稳定性分析在参考文献［6.68，69］中给出。

## 6.10.2 带遗忘因子的P型学习控制

虽然纯P型学习控制已经达到了预期的目标，但是在实际情况下一些严格的假设可能是不成立的，例如，可能有初始设置错误。此外，还有可能有虽然小但是不可重复的动力学波动。最终，有可能返回一个（有界的）测量噪声 $\xi_k$，比如

$$\Delta \boldsymbol{q}_k(t) + \boldsymbol{\xi}_k(t) = [\boldsymbol{q}_k(t) + \boldsymbol{\xi}_k(t)] - \boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}(t) \tag{6.133}$$

因此，学习控制方案可能会无效。为了提高P型学习控制的鲁棒性，在递推式中引入一个遗忘因子

$$\boldsymbol{\tau}_{k+1}(t) = (1-\alpha)\boldsymbol{\tau}_k(t) + \alpha \boldsymbol{\tau}_0(t) - \boldsymbol{\Phi}[\Delta \boldsymbol{q}_k(t) + \boldsymbol{\xi}_k(t)] \tag{6.134}$$

最初将遗忘因子引入学习控制的想法来源于参考文献［6.70］。

已严格证明了，带有遗忘因子的P型学习控制可以确定函数收敛到一个期望的大小为 $O(\alpha)$ 的邻域。此外，如果长期记忆的内容在每 $k$ 次试验后都被刷新，其中 $k$ 为 $O(1/\alpha)$，那么轨迹就会收敛于一个期望控制目标的 $\varepsilon$ 邻域。$\varepsilon$ 的大小依赖于初始设置误差的幅度、动力学的不可重复波动以及测量噪声。详细的稳定性研究，请参考文献［6.71，72］。

## 6.10.3 小结与扩展阅读

应用学习控制，通过利用以往周期中收集到的数据，重复性任务（例如喷漆或拾取-放置操作）的执行得到了改善。在本节中，我们介绍了两种学习控制方案。首先是纯P型学习控制，并对其鲁棒性问题进行了阐述。接下来介绍了带遗忘因子的P型学习控制，这种方法提高了学习控制的鲁棒性。

对于学习控制的严格和完备的探究首先在参考文献［6.2，12］中独立地进行了讨论。

# 参考文献


6.1 C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin: *Theory of Robot Control* (Springer, London 1996)

6.2 J.J. Craig: Adaptive Control of Mechanical Manipulators. Ph.D. Thesis (UMI Dissertation Information Service, Ann Arbor 1986)

6.3 R.J. Schilling: *Fundametals of Robotics: Analysis and Control* (Prentice-Hall, Upper Saddle River 1989)

6.4 L. Sciavicco, B. Siciliano: *Modeling and Control of Robot Manipulator* (McGraw-Hill, New York 1996)

6.5 M.W. Spong, M. Vidyasagar: *Robot Dynamics and Control* (Wiley, New York 1989)

6.6 M.W. Spong, F.L. Lewis, C.T. Abdallah (Eds.): *Robot Control* (IEEE, New York 1989)

6.7 C.H. An, C.G. Atkeson, J.M. Hollerbach: *Model-Based Control of a Robot Manipulator* (MIT Press, Cambridge, 1988)

6.8 R.M. Murray, Z. Xi, S.S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* (CRC Press, Boca Raton 1994)

6.9 T. Yoshikawa: *Foundations of Robotics* (MIT Press, Cambridge 1990)

6.10 O. Khatib: A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation, IEEE J. Robot. Autom. **3**(1), 43–53 (1987)

6.11 J.Y.S. Luh, M.W. Walker, R.P.C. Paul: Resolved-acceleration control of mechanical manipulator, IEEE Trans. Autom. Contr. **25**(3), 468–474 (1980)

6.12 S. Arimoto, F. Miyazaki: Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability. In: *Robotics Research*, ed. by M. Brady, R. Paul (MIT Press, Cambridge 1984) pp. 783–799

6.13 L.C. Fu: Robust adaptive decentralized control of robot manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **37**(1), 106–110 (1992)

6.14 H. Seraji: Decentralized adaptive control of manipulators: Theory, simulation, and experimentation, IEEE Trans. Robot. Autom. **5**(2), 183–201 (1989)

6.15 J.G. Ziegler, N.B. Nichols: Optimum settings for automatic controllers, ASME Trans. **64**, 759–768 (1942)

6.16 Y. Choi, W.K. Chung: *PID Trajectory Tracking Control for Mechanical Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 289 (Springer, New York 2004)

6.17 R. Kelly: PD control with desired gravity compensation of robot manipulators: A review, Int. J. Robot. Res. **16**(5), 660–672 (1997)

6.18 M. Takegaki, S. Arimoto: A new feedback method for dynamic control of manipulators, Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **102**, 119–125 (1981)

6.19 P. Tomei: Adaptive PD controller for robot manipulators, IEEE Trans. Robot. Autom. **7**(4), 565–570 (1991)

6.20 R. Ortega, A. Loria, R. Kelly: A semi-globally stable output feedback PI$^2$ D regulator for robot manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **40**(8), 1432–1436 (1995)

6.21 D. Angeli: Input-to-State stability of PD-controlled robotic systems, Automatica **35**, 1285–1290 (1999)

6.22 J.A. Ramirez, I. Cervantes, R. Kelly: PID regulation of robot manipulators: stability and performance, Sys. Contr. Lett. **41**, 73–83 (2000)

6.23 R. Kelly: Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions, IEEE Trans. Autom. Contr. **43**(7), 934–937 (1998)

6.24 Z. Qu, J. Dorsey: Robust tracking control of robots by a linear feedback law, IEEE Trans. Autom. Contr.

36(9), 1081–1084 (1991)
6.25 H. Berghuis, H. Nijmeijer: Robust control of robots via linear estimated state feedback, IEEE Trans. Autom. Contr. **39**(10), 2159–2162 (1994)
6.26 Y. Choi, W.K. Chung, I.H. Suh: Performance and $\mathcal{H}_\infty$ optimality of PID trajectory tracking controller for Lagrangian systems, IEEE Trans. Robot. Autom. **17**(6), 857–869 (2001)
6.27 K. Aström, T. Hagglund: *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning* (Instrument Society of America, Research Triangle Park 1995)
6.28 C.C. Yu: *Autotuning of PID Controllers: Relay Feedback Approach* (Springer, London 1999)
6.29 F.L. Lewis, C.T. Abdallah, D.M. Dawson: *Control of Robot Manipulators* (Macmillan, New York 1993)
6.30 A. Isidori: *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 72 (Springer, New York 1985)
6.31 H. Berghuis, H. Nijmeijer: A passivity approach to controller-observer design for robots, IEEE Trans. Robot. Autom. **9**, 740–754 (1993)
6.32 J.J. Slotine, W. Li: On the adaptive control of robot manipulators, Int. J. Robot. Res. **6**(3), 49–59 (1987)
6.33 G. Liu, A.A. Goldenberg: Comparative study of robust saturation-based control of robot manipulators: analysis and experiments, Int. J. Robot. Res. **15**(5), 473–491 (1996)
6.34 D.M. Dawson, M. Grabbe, F.L. Lewis: Optimal control of a modified computed-torque controller for a robot manipulator, Int. J. Robot. Autom. **6**(3), 161–165 (1991)
6.35 D.M. Dawson, Z. Qu, J. Duffie: Robust tracking control for robot manipulators: theory, simulation and implementation, Robotica **11**, 201–208 (1993)
6.36 A. Jaritz, M.W. Spong: An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. **4**(6), 627–640 (1996)
6.37 A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*, 3rd edn. (Springer, New York 1995)
6.38 J.J. Slotine, W. Li: *Applied Nonlinear Control* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1991)
6.39 W.J. Rugh: *Linear System Theory*, 2nd edn. (Prentice-Hall, Upper Saddle River 1996)
6.40 M.W. Spong, M. Vidyasagar: Robust microprocessor control of robot manipulators, Automatica **23**(3), 373–379 (1987)
6.41 H.K. Khalil: *Nonlinear Systems*, 3rd edn. (Prentice-Hall, Upper Saddle River 2002)
6.42 M. Vidysagar: *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd edn. (Prentice-Hall, Englewood Ciffs 1993)
6.43 J.T. Wen: A unified perspective on robot control: The energy Lyapunov function approach, Int. J. Adapt. Contr. Signal Proc. **4**, 487–500 (1990)
6.44 R. Ortega, M.W. Spong: Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial, Automatica **25**(6), 877–888 (1989)
6.45 N. Sadegh, R. Horowitz: Stability and robustness analysis of a class of adaptive contollers for robotic manipulators, Int. J. Robot. Res. **9**(3), 74–92 (1990)
6.46 S. Dubowsky, D.T. DesForges: The application of model-reference adaptive control to robotic manipulators, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. **37**(1), 106–110 (1992)
6.47 A. Balestrino, G. de Maria, L. Sciavicco: An adaptive model following control for robotic manipulators, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. **105**, 143–151 (1983)
6.48 S. Nicosia, P. Tomei: Model reference adaptive control algorithms for industrial robots, Automatica **20**, 635–644 (1984)
6.49 R. Horowitz, M. Tomizuka: An adaptive control scheme for mechanical manipulators-Compensation of nonlinearity and decoupling control, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **108**, 127–135 (1986)
6.50 I.D. Laudau: *Adaptive Control: The Model Reference Approach* (Dekker, New York 1979)
6.51 R. Lozano, C. Canudas de Wit: Passivity based adaptive control for mechanical manipulators using LS type estimation, IEEE Trans. Autom. Contr. **35**(12), 1363–1365 (1990)
6.52 B. Brogliato, I.D. Laudau, R. Lozano: Passive least squares type estimation algorithm for direct adaptive control, Int. J. Adapt. Contr. Signal Process. **6**, 35–44 (1992)
6.53 R. Johansson: Adaptive control of robot manipulator motion, IEEE Trans. Robot. Autom. **6**(4), 483–490 (1990)
6.54 M.W. Walker: Adaptive control of manipulators containing closed kinematic loops, IEEE Trans. Robot. Autom. **6**(1), 10–19 (1990)
6.55 J.S. Reed, P.A. Ioannou: Instability analysis and robust adaptive control of robotic manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **5**(3), 74–92 (1989)
6.56 G. Tao: On robust adaptive control of robot manipulators, Automatica **28**(4), 803–807 (1992)
6.57 H. Berghuis, R. Ogata, H. Nijmeijer: A robust adaptive controller for robot manipulators, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1992) pp. 1876–1881
6.58 R. Johansson: Quadratic optimization of motion coordination and control, IEEE Trans. Autom. Contr. **35**(11), 1197–1208 (1990)
6.59 Z. Qu, D.M. Dawson: *Robust Tracking Control of Robot Manipulators* (IEEE, Piscataway 1996)
6.60 P. Dorato, C. Abdallah, V. Cerone: *Linear-Quadratic Control* (Prentice-Hall, Upper Saddle River 1995)
6.61 A. Locatelli: *Optimal Control: An Introduction* (Birkhäuser, Basel 2001)
6.62 A. Isidori: Feedback control of nonlinear systems, Int. J. Robust Nonlin. Contr. **2**, 291–311 (1992)
6.63 A.J. Van Der Schaft: Nonlinear state space $\mathcal{H}_\infty$ control theory. In: *Essays on Control: Perspective in Theory and its Applications*, ed. by H.L. Trentelman, J.C. Willems (Birkhäuser, Basel 1993) pp. 153–190
6.64 A.J. Van Der Schaft: $L_2$9-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback $\mathcal{H}_\infty$ control, IEEE Trans. Autom. Contr. **37**(6), 770–784 (1992)
6.65 J. Park, W.K. Chung, Y. Youm: Analytic nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ inverse-optimal control for Euler-Lagrange system, IEEE Trans. Robot. Autom. **16**(6), 847–854 (2000)
6.66 B.S. Chen, T.S. Lee, J.H. Feng: A nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control design in robotics systems under parametric perturbation and external disturbance, Int. J. Contr. **59**(12), 439–461 (1994)
6.67 J. Park, W.K. Chung: Design of a robust $\mathcal{H}_\infty$ PID control for industrial manipulators, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **122**(4), 803–812 (2000)
6.68 S. Arimoto: Mathematical theory or learning with

application to robot control. In: *Adaptive and Learning Control*, ed. by K.S. Narendra (Plenum, New York 1986) pp. 379–388
6.69 S. Kawamura, F. Miyazaki, S. Arimoto: Realization of robot motion based on a learning method, IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. **18**(1), 126–134 (1988)
6.70 G. Heinzinger, D. Frewick, B. Paden, F. Miyazaki: Robust learning control, Proc. IEEE Int. Conf. Dec. Contr. (1989)
6.71 S. Arimoto: Robustness of learning control for robot manipulators, Proc. IEEE Int. Conf. Dec. Contr. (Bellingham 1990) pp. 1523–1528
6.72 S. Arimoto, T. Naiwa, H. Suzuki: Selective learning with a forgetting factor for robotic motion control, Proc. IEEE Int. Conf. Dec. Contr. (Bellingham 1991) pp. 728–733

# 第7章 力 控 制

Luigi Villani，Joris De Schutter

孟明 译

处理好机器人与周围环境之间的接触是成功完成作业任务的一个基本要求。纯运动控制被证明是难以胜任的，这是因为不可避免的建模误差和不确定性可能引起接触力增大，并最终导致相互作用过程中的不稳定现象，特别是在刚性环境的场合中。机器人系统在弱结构化环境中要实现鲁棒和通用的行为，并能够像有人现场操作一样安全和可靠，力反馈和力控制是不可或缺的。本章首先分析了间接力控制策略，该策略设想通过确保适当的末端操作器的柔顺行为来保持一定限度的接触力，而不需要对环境的精确建模。然后分析了交互作业的建模问题，考虑了刚性环境和柔顺环境两种情况。对于交互作业的规范，相对合适的作业框架，建立了依据作业几何设定的自然约束和依据控制策略设定的人为约束。这种公式表示是综合力/运动混合控制方案的基本前提。



## 7.1 背景

在过去的三十年，机器人力控制的研究蓬勃发展。如此广泛关注的动机，来自于对为机器人系统提供增强的感知能力的普遍期望。期待具有力、触觉、距离和视觉反馈的机器人，能在不同于典型工业车间场合的非结构化环境中自主操作。

在遥操作早期的研究工作中，就设想利用力反馈来辅助人类操作者使用从机械手来远程操作物体。最近开发的协作机器人系统中，控制两个或多个机械手（即灵巧机器人手的手指）以限制其相互作用力和避免挤压共同夹持的物体。通过在无法预料情形下提供智能响应和增强人-机器人交互，力控制对于在开放环境中实现机器人系统的鲁棒和通用行为也发挥着根本性的作用。

### 7.1.1 从运动控制到交互控制

许多实际的作业需要机器人末端执行器操作一个对象或在某个表面上执行一些操作。对于这些作业的成功完成，控制机器人与周围环境的物理接触是非常关键的。工业生产中的典型例子包括打磨、去毛刺、机加工或装配。如果再考虑非工业应用，由于可能出现的状况是多种多样的，因此对可能的机器人作业进行完整分类实际上是不可行的。而且这样的分类对于去寻找一个与环境交互的通用控制策略也并不是真正有用的。

在接触过程中，环境会在末端执行器所跟随的几何路径上设置一些约束，称为运动学约束。对应与硬表面接触的情况通常称为约束运动。其他的接触作业情形可采用机器人与环境之间的动态交互来描述，可以是惯性的（比如在推木块）、耗散的（比如在有摩擦表面滑动）或弹性的（比如在推撞一个弹性柔顺

墙面)。在所有这些情形下，使用单纯的运动控制策略来控制交互是很容易失败的，下面将进行解释。

若在与环境交互的作业中采用运动控制的方法，只有作业被精确地规划时才能成功执行。这将需要机器人操作手（运动学和动力学）和环境（几何和机械特性）的精确模型。一个具有足够精度的机械手模型可以得到，但得到对环境的详细描述却是非常难的。

为了采用定位方法完成机械零件的配合，零件的相对定位精度要保证比零件机械公差还高一个数量级。通过这一观察就足以理解作业规划精度的重要性了。一旦已经准确得到一个零件的绝对位置，机械手就应该以同样的精度操纵其他零件运动。

实际上，规划误差可能引起接触力和力矩的增大，导致末端执行器偏离期望轨迹。另一方面，控制系统做出反应来减小这种偏离。这最终使接触力逐渐增强直到关节驱动器达到饱和或零件在接触部位发生破裂。

越高的环境刚度和位置控制精度，越容易使上面描述的某种情况发生。如果在相互作用过程中保证柔顺行为，就可以克服这个缺陷。柔顺行为可以被动或主动方式实现。

**1. 被动交互控制**

在被动交互控制中，由于机器人固有的柔顺，机器人末端执行器的轨迹被相互作用力所修正。柔顺可能来自于连杆、关节和末端执行器的结构性柔顺，或位置伺服系统的柔顺。具有弹性关节或连杆的柔性机器人手臂就是为了与人固有地安全交互所专门设计的。在工业应用中一种具有被动柔顺的机械装置已被广泛采用，它就是被称为远中心柔顺（RCC）的装置[7.1]。RCC是一个安装在刚性机器人上的柔顺末端执行器，专门为轴孔装配操作所设计和优化。

被动方法的交互控制是非常简单和廉价的，因为它不需要力/力矩传感器，并且预设的末端执行器轨迹在执行期间也不需要改变。此外，被动柔顺结构的响应远快于利用计算机控制算法实现的主动重定位。但是，由于对每个机器人作业都必须设计和安装一个专用的柔顺末端执行器，因此在工业应用中使用被动柔顺就缺乏灵活性。它也只能处理程序设定轨迹上小的位置和姿态偏离。最后，由于没有力的测量，它也不能确保很大的接触力永远不会出现。

**2. 主动交互控制**

在主动交互控制中，机器人系统的柔顺主要通过特意设计的控制系统来获得。这种方法通常需要测量接触力和力矩，它们反馈到控制器中用于修正甚至在线生成机器人末端执行器的期望轨迹。

主动交互控制可以克服前面提到的被动交互控制缺陷，但是它通常更慢、更昂贵、更复杂。要获得合理的作业执行速度和抗干扰能力，主动交互控制需要与一定程度的被动柔顺联合使用[7.2]。从定义可以看出，反馈只能在运动和力误差发生后才能产生，因此需要被动柔顺来保持反作用力低于一个可以接受的阈值。

**3. 力测量**

对于一般的力控制作业，需要六个力分量来提供完整的接触力信息，即三个平移力分量和三个力矩。通常，力/力矩传感器安装在机器人腕部[7.3]。但也有例外情况，比如力传感器可以安装在机器人手的指尖上[7.4]，外部的力和力矩也可以通过关节力矩传感器对轴转矩的测量来估计[7.5,6]。但是，大多数的力控制应用（包括工业应用）还是采用腕部力/力矩传感器。在这种情形中，通常假设安装在传感器与环境之间的工具（即机器人末端执行器）的重量和惯性是可以忽略的，或者是可以从力/力矩测量中适当地补偿。力信号可以通过应变的测量获得，即是刚性传感器。或者通过变形的测量（比如光学方式）来获得，即是柔顺传感器。如果希望增加被动柔顺，则后面一种方法更具优势。

### 7.1.2 从间接力控制到力/运动混合控制

主动交互控制策略可以分为两种类型，间接力控制和直接力控制。两种类型之间的主要区别在于前者没有直接的力反馈回路闭环，通过运动控制来实现力控制；而后者由于具有力反馈回路闭环，使控制接触力和力矩达到一个期望的值成为可能。

第一种类型属于阻抗控制（或导纳控制）[7.7,8]，其中由于与环境相互作用会导致末端执行器运动对于期望运动产生偏差，这种偏差被认为是通过带可调参数的力学阻抗/导纳而与接触力相关。采用阻抗（或导纳）控制的机器人操作手可以使用一个具有可调参数的等效质量-弹簧-阻尼器系统来描述。如果机器人控制通过产生力来对运动偏差作出反应，这种关系就是阻抗。而如果机器人控制通过施加一个期望运动的偏差来对相互作用力作出反应，就相当于导纳。阻抗控制和导纳控制的特例分别是刚性控制和柔顺控制[7.9]，这里只考虑了末端执行器对于期望运动的位置和姿态偏差与接触力和力矩之间的静态关系。需要注意的是，在机器人控制的文献中，术语阻抗控制和导纳控制常常用来指同一控制方案，对于刚性控制和柔顺控制也有相同的情况。此外，如果仅仅关心接触

力和力矩与末端执行器的线速度和角速度之间的关系，相应的控制方案称为阻尼控制[7.10]。

一般而言，间接力控制方案不需要测量接触力和力矩，得到的阻抗或导纳往往是非线性和耦合的。但是，如果有力/力矩传感器可用，把力测量值用于控制方案中就能得到线性和解耦的情况。

与间接力控制不同，直接力控制需要交互作业的显式模型。事实上，使用者必须相对于环境所施加的约束，按一致的方式指定期望的运动和期望的接触力和力矩。一个在该类别中被广泛采用的策略是力/运动混合控制，它的目的在于沿着非约束的作业方向控制运动和沿着约束的作业方向控制力（和力矩）。出发点是考虑对于许多机器人作业，引入称为柔顺坐标系[7.11]（或作业坐标系[7.12]）的正交参考坐标系是可行的，它允许以沿着和围绕该坐标系的三个正交轴作用的自然约束和人为约束的形式来指定作业任务。基于这样的分解，力/运动混合控制允许同时在两个互相独立的子空间中控制接触力和末端执行器的运动。对于平面接触表面[7.13]，作用于期望量和反馈量的简单选择矩阵可用来满足这个目标。然而，对于一般的接触作业，合适的投影矩阵是必须使用的，它也可以由显式约束方程得到[7.14-16]。可以提供几个混合运动控制方案的实现，比如在操作空间的基于逆动力学控制[7.17]、基于无源性的控制[7.18]或者内部为运动环的外部力控制环，这通常用在工业机器人中[7.2]。

如果不能获得精确的环境模型，力控制作用和运动控制作用可以被叠加在一起，得到的就是并行力/位置控制方案。在这个方法中，力控制器被设计的能够支配运动控制器。因此，为了确保力的调整，沿着约束的作业方向的位置误差是容许的[7.19]。

## 7.2 间接力控制

为了深入了解机器人操作手的末端执行器与环境之间相互作用时所出现的问题，有必要分析在存在接触力和力矩情况下运动控制策略的效果。为此，假设有一个参考坐标系$\Sigma_e$固连于末端执行器，并将原点的位置矢量记为$\boldsymbol{p}_e$，相对固定基坐标系的旋转矩阵记为$\boldsymbol{R}_e$。末端执行器的速度采用6×1的扭矢量$\boldsymbol{v}_e=(\dot{\boldsymbol{p}}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_e^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$来表示，其中$\dot{\boldsymbol{p}}_e$是平移速度，$\boldsymbol{\omega}_e$是角速度。该速度可以由$n\times1$关节速度矢量$\dot{\boldsymbol{q}}$，利用如下线性变换计算得到

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.1}$$

式中，矩阵$\boldsymbol{J}$是$6\times n$的末端执行器几何雅可比矩阵。为简单起见，只考虑非冗余非奇异机械手的情况。因此，$n=6$，并且雅可比矩阵是一个非奇异方阵。末端执行器作用于环境的力$\boldsymbol{f}_e$和力矩$\boldsymbol{m}_e$是力螺旋$\boldsymbol{h}_e=(\boldsymbol{f}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_e^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$的分量。

有必要考虑刚性机器人操作手在与环境接触情况下的操作空间动力学模型公式

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}_e+\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{h}_c-\boldsymbol{h}_e \tag{7.2}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}$是6×6操作空间惯性矩阵，$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{J}^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}^{-1}$是包含离心力和科氏效应的力螺旋，$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$是重力效应的力螺旋，则$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$、$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$和$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$是在关节空间里所定义的对应的量。矢量$\boldsymbol{h}_c=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}$是与输入关节力矩$\boldsymbol{\tau}$对应的等效末端执行器力螺旋。

### 7.2.1 刚性控制

在经典操作空间公式中，末端执行器的位置和姿态由6×1的矢量$\boldsymbol{x}_e=(\boldsymbol{p}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_e^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$来描述，其中$\boldsymbol{\varphi}_e$是从$\boldsymbol{R}_e$中推算出的一组欧拉角。因此，相对于期望坐标系$\Sigma_d$的原点的位置$\boldsymbol{p}_d$和旋转矩阵$\boldsymbol{R}_d$，末端执行器的期望位置和姿态可以用一个矢量$\boldsymbol{x}_d$来表示。末端执行器的误差可记为$\Delta\boldsymbol{x}_{de}=\boldsymbol{x}_d-\boldsymbol{x}_e$，在假设$\boldsymbol{x}_d$为常数的情况下，对应的速度误差可表示为$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{de}=-\dot{\boldsymbol{x}}_e=-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_e)\boldsymbol{v}_e$，这里

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi}_e)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}_e)\end{pmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{I}$是3×3单位矩阵；$\boldsymbol{0}$是3×3零矩阵；$\boldsymbol{T}$是关于变换$\boldsymbol{\omega}_e=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}_e)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_e$的3×3矩阵，取决于欧拉角的具体选择。

考虑在操作空间简单PD+重力补偿控制所对应的运动控制律

$$\boldsymbol{h}_c=\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varphi}_e)\boldsymbol{K}_P\Delta\boldsymbol{x}_{de}-\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q}) \tag{7.3}$$

式中，$\boldsymbol{K}_P$和$\boldsymbol{K}_D$是对称正定的6×6矩阵。

当不存在与环境的相互作用时（即当$\boldsymbol{h}_e=\boldsymbol{0}$时），与末端执行器期望位置与姿态对应，闭环系统的平衡$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{0}$、$\Delta\boldsymbol{x}_{de}=\boldsymbol{0}$是渐近稳定的。稳定性判据是基于正定李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}_e+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}_{de}\boldsymbol{K}_P\Delta\boldsymbol{x}_{de}$$

它沿着闭环系统轨迹的时间导数是负半定函数

$$\dot{V}=-\boldsymbol{v}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_D\boldsymbol{v}_e \tag{7.4}$$

在存在常量力螺旋$\boldsymbol{h}_e$的情况下，使用类似的李雅普诺夫判据可以得到一个不同的具有非零$\Delta\boldsymbol{x}_{de}$的渐近稳定平衡。这个新的平衡是下面方程的解

$$A^{-T}(\varphi_e)K_P\Delta x_{de}-h_e=0$$

它也可以写成如下形式

$$\Delta x_{de}=K_P^{-1}A^T(\varphi_e)h_e \tag{7.5}$$

或者等价地写为

$$h_e=A^{-T}(\varphi_e)K_P\Delta x_{de} \tag{7.6}$$

式（7.6）表明在稳定状态下，比例控制作用于位置和姿态误差，末端执行器表现得像一个关于外部力和力矩 $h_e$ 的六自由度弹簧。因此，矩阵 $K_P$ 起到一个主动刚性的作用，这意味着有可能通过调整 $K_P$ 的元素来确保末端执行器在交互作用过程中具有适当的弹性表现。类似地，式（7.5）表示一种柔顺关系，其中矩阵 $K_P^{-1}$ 起到主动柔顺的作用。这种方法设定期望位置和姿态以及末端执行器相对期望运动的位置和姿态偏差与施加于环境的力之间的适当静态关系，被称为刚性控制。

刚度/柔顺参数的选取并不容易，并且严重地依赖于所执行的作业。主动刚性的值越大意味着较高的位置控制精度是以更大的交互作用力为代价的。因此，如果希望在个别方向上满足一些物理约束，末端执行器在这个方向上的刚度就要表现得比较低以确保较小的交互作用力。反之，沿着没有物理约束的方向，末端执行器的刚度则应该表现得比较高以便精确地跟随期望位置。这允许不用过大的接触力和力矩就能解决期望位置与可达到的位置之间的偏差，这个偏差是由于环境所施加的约束导致的。

但是，必须指出的是，在基于式（7.6）的实际应用中不能有效地设定沿着不同方向选择的刚度特性。对由一个六自由度弹簧所连接的两个刚体，从以在无负荷平衡和弹性力螺旋两种情况下两个刚体无穷小扭转位移之间的线性变换形式表示的其机械刚度的经典定义来看，就能很容易地理解这个问题了。

在主动刚性情况下，这两个刚体分别是固连有坐标系 $\Sigma_e$ 的末端执行器和固连有期望坐标系 $\Sigma_d$ 的虚拟刚体。因此，在如下定义的无穷小扭转位移情况下

$$\delta x_{de}=\begin{pmatrix}\delta p_{de}\\ \delta\theta_{de}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\dot{p}_{de}\\ \Delta\omega_{de}\end{pmatrix}dt=-\begin{pmatrix}\dot{p}_e\\ \omega_e\end{pmatrix}dt$$

由式（7.6）可以导出如下的变换

$$h_e=A^{-T}(\varphi_e)K_PA^{-1}(\varphi_e)\delta x_{de} \tag{7.7}$$

式中，$\Delta\dot{p}_{de}=\dot{p}_d-\dot{p}_e$ 是位置误差 $\Delta p_{de}=p_d-p_e$ 的时间导数；$\Delta\omega_{de}=\omega_d-\omega_e$ 是角速度误差。方程（7.7）表明实际刚度矩阵是 $A^{-T}(\varphi_e)K_PA^{-1}(\varphi_e)$，它取决于由矢量 $\varphi_e$ 表示的末端执行器的姿态。所以，在实际应用中选择刚性参数是非常困难的。

这个问题可以通过定义一个具有与理想机械弹簧相同的结构和特性的几何一致主动刚性来解决。

**1. 机械弹簧**

考虑两个弹性耦合的刚体 $A$ 和 $B$，以及分别固连于 $A$ 和 $B$ 上两个参考坐标系 $\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$。假设在平衡状态时坐标系 $\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 是重合的，平衡状态附近的柔顺特性可以表示为线性变换

$$h_b^b=K\delta x_{ab}^b=\begin{pmatrix}K_t & K_c\\ K_c^T & K_o\end{pmatrix}\delta x_{ab}^b \tag{7.8}$$

式中，$h_b^b$ 是在坐标系 $B$ 中表示的作用于刚体 $B$ 的弹性力螺旋，出现于坐标系 $\Sigma_a$ 相对坐标系 $\Sigma_b$ 存在一个无穷小扭转位移 $\delta x_{ab}^b$ 的情况下，该位移也是在坐标系 $B$ 中表示的。由于 $\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 在平衡状态时是重合的，所以式（7.8）中的弹性力螺旋和无穷小扭转位移也可以等效地在坐标系 $\Sigma_a$ 中表示。也就是，$h_b^b=h_b^a$ 和 $\delta x_{ab}^b=\delta x_{ab}^a$。此外，对于作用于刚体 $A$ 上的弹性力螺旋，由于 $\delta x_{ba}^a=-\delta x_{ab}^b$ 有 $h_a^a=K_t\delta x_{ba}^a=-h_b^b$。变换（7.8）的这种性质称为端对称。

在式（7.8）中，$K$ 是 $6\times6$ 对称正半定刚度矩阵。$3\times3$ 矩阵 $K_t$ 和 $K_o$ 分别称为平移刚度和旋转刚度，也是对称的。可以看出，如果称为耦合刚度的 $3\times3$ 矩阵 $K_c$ 是对称的，旋转和平移之间有最大程度的解耦。这种情况下，坐标系 $\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 的重合原点所对应的点称为刚度中心。对于柔顺矩阵也有类似的定义和结果的表达式。尤其是，在柔顺矩阵 $C=K^{-1}$ 的非对角块是对称的情况下可以定义柔顺中心。刚度中心和柔顺中心不一定是重合的。

这里有一些平移和旋转之间不存在耦合的特殊情况，比如，刚体的相对平移引起一个沿一个过刚度中心轴的纯力所对应的力螺旋，还有刚体的相对旋转引起一个等价于绕一个过刚度中心轴的纯力矩的力螺旋。在这些情况中，刚度中心和柔顺中心相重合。具有完全解耦特性的机械系统例子有比如远中心柔顺（RCC）装置。

由于 $K_t$ 是对称的，在平衡状态存在相对于坐标系 $\Sigma_a=\Sigma_b$ 的旋转矩阵 $R_t$，因此 $K_t=R_t\Gamma_tR_t^T$，并且 $\Gamma_t$ 是一个对角阵，其对角元素是旋转矩阵 $R_t$ 的列所对应方向上的主平移刚度，这个方向称为平移刚度主轴。类似地，$K_o$ 可以表示为 $K_o=R_o\Gamma_oR_o^T$，其中 $\Gamma_o$ 的对角元素是绕旋转矩阵 $R_o$ 的列所对应轴的主旋转刚度，这个轴称为旋转刚度主轴。此外，假设在平衡状态 $\Sigma_a$ 和 $\Sigma_b$ 的原点与刚度中心重合，可以得到表达式 $K_c=R_c\Gamma_cR_c^T$，其中 $\Gamma_c$ 的对角元素是沿旋转矩阵 $R_c$ 的列所对应方向的主耦合刚度，这个方向称为耦合刚度

主轴。总而言之，相对于原点为刚度中心的坐标系，6×6的刚度矩阵可以根据主刚度参数和主轴来设定。

要注意的是式（7.8）所定义的机械刚度是描述存储势能的理想六自由度弹簧的特性。理想刚度的势能函数仅仅取决于连接的两个刚体的相对位置和姿态，并且是端对称的。实际的六自由度弹簧具有与理想弹簧类似的主要特性，但仍然总是具有引起能量耗散的寄生效应。

**2. 几何一致主动刚度**

为了实现几何一致的六自由度主动刚度，需要在控制律式（7.3）中适当地定义比例控制作用。在理想坐标系$\Sigma_d$相对末端执行器坐标系$\Sigma_e$存在有限位移的情况下，这个控制作用可以表示为作用在末端执行器上的弹性力螺旋。因此，微小位移下理想机械刚度的性质可以扩展到有限位移的情况。此外，为了保证李雅普诺夫意义上的渐近稳定性，必须定义一个合适的弹性势能函数。

简单起见，假设耦合刚度矩阵为零。因此，可以求和平移势能和旋转势能来计算弹性势能。

平移势能可以用

$$\boldsymbol{K}'_{Pt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{K}_{Pt}\boldsymbol{R}_d^T+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{K}_{Pt}\boldsymbol{R}_e^T$$

定义为

$$V_t=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{p}_{de}^T\boldsymbol{K}'_{Pt}\Delta\boldsymbol{p}_{de} \tag{7.9}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{Pt}$是3×3对称正定矩阵。在式（7.9）中使用$\boldsymbol{K}'_{Pt}$代替$\boldsymbol{K}_{Pt}$保证势能在有限位移情况下也是端对称的。在平衡状态（即$\boldsymbol{R}_d=\boldsymbol{R}_e$时）和具有各向同性平移刚度（即$\boldsymbol{K}_{Pt}=K_{Pt}\boldsymbol{I}$时）的情况下矩阵$\boldsymbol{K}'_{Pt}$和$\boldsymbol{K}_{Pt}$是一致的。

计算功$\dot{V}_t$得到

$$\dot{V}_t=\Delta\dot{\boldsymbol{p}}_{de}^{eT}\boldsymbol{f}_{\Delta t}^e+\Delta\boldsymbol{\omega}_{de}^{eT}\boldsymbol{m}_{\Delta t}^e$$

式中，$\Delta\dot{\boldsymbol{p}}_{de}^e$是位置位移$\Delta\boldsymbol{p}_{de}^e=\boldsymbol{R}_e^T(\boldsymbol{p}_d-\boldsymbol{p}_e)$的时间导数；$\Delta\boldsymbol{\omega}_{de}^e=\boldsymbol{R}_e^T(\boldsymbol{\omega}_d-\boldsymbol{\omega}_e)$。矢量$\boldsymbol{f}_\Delta^e$和$\boldsymbol{\mu}_\Delta^e$分别是在存在有限位置位移$\Delta\boldsymbol{p}_{de}^e$情况下作用于末端执行器的力和力矩。当在基坐标系中计算时，这些矢量具有如下表达式

$$\boldsymbol{f}_{\Delta t}=\boldsymbol{K}'_{Pt}\Delta\boldsymbol{p}_{de}\quad \boldsymbol{m}_{\Delta t}=\boldsymbol{K}''_{Pt}\Delta\boldsymbol{p}_{de} \tag{7.10}$$

这里

$$\boldsymbol{K}''_{Pt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}(\Delta\boldsymbol{p}_{de})\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{K}_{Pt}\boldsymbol{R}_d^T$$

其中，$\boldsymbol{S}(\cdot)$是计算矢量积的反对称算子。矢量$\boldsymbol{h}_{\Delta t}=(\boldsymbol{f}_{\Delta t}^T\quad \boldsymbol{m}_{\Delta t}^T)^T$是在存在有限位置位移$\Delta\boldsymbol{p}_{de}$和零旋转位移情况下作用在末端执行器上的弹性力螺旋。在具有各向同性平移刚度的情况下力矩$\boldsymbol{m}_{\Delta t}$为零。

要定义旋转势能，必须对坐标系$\Sigma_d$和$\Sigma_e$之间的姿态位移采用一个适当的定义。一个可能的选择是从矩阵$\boldsymbol{R}_d^e=\boldsymbol{R}_e^T\boldsymbol{R}_d$提取得到的单位四元组$\{\eta_{de},\ \epsilon_{de}^e\}$的矢量部分。因此，姿态势能具有形式

$$V_o=2\,\epsilon_{de}^{eT}\boldsymbol{K}_{Po}\epsilon_{de}^e \tag{7.11}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{Po}$是3×3对称正定矩阵。由于$\epsilon_{de}^e=-\epsilon_{ed}^d$，所以函数$V_o$是端对称的。

计算功$\dot{V}_o$得到

$$\dot{V}_o=\boldsymbol{\omega}_{de}^{eT}\boldsymbol{m}_{\Delta o}^e$$

其中

$$\boldsymbol{m}_{\Delta o}=\boldsymbol{K}'_{Po}\epsilon_{de} \tag{7.12}$$

这里

$$\boldsymbol{K}'_{Po}=2\boldsymbol{E}^T(\eta_{de},\epsilon_{de})\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{K}_{Po}\boldsymbol{R}_e^T$$

并且$\boldsymbol{E}(\eta_{de},\ \epsilon_{de})=\eta_{de}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}(\epsilon_{de})$。以上方程表明有限姿态位移$\epsilon_{de}=\boldsymbol{R}_e^T\epsilon_{de}^e$产生一个与纯力矩等效的弹性力螺旋$\boldsymbol{h}_{\Delta o}=(\boldsymbol{0}^T\quad \boldsymbol{m}_{\Delta o}^T)^T$。

因而，在期望坐标系$\Sigma_d$相对末端执行器坐标系$\Sigma_e$存在有限位置和姿态位移情况下，整个弹性力螺旋在基坐标系中可定义为

$$\boldsymbol{h}_\Delta=\boldsymbol{h}_{\Delta t}+\boldsymbol{h}_{\Delta o} \tag{7.13}$$

其中，$\boldsymbol{h}_{\Delta t}$和$\boldsymbol{h}_{\Delta o}$分别按照式（7.10）和式（7.12）计算。

在平衡状态附近的无穷小扭转位移$\delta\boldsymbol{x}_{de}^e$情况下，使用式（7.13）来计算弹性力螺旋，并舍弃高阶无穷小项得到线性变换

$$\boldsymbol{h}_e^e=\boldsymbol{K}_P\delta\boldsymbol{x}_{de}^e=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{Pt} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{Po}\end{pmatrix}\delta\boldsymbol{x}_{de}^e \tag{7.14}$$

因此，$\boldsymbol{K}_P$表示理想弹簧相对于原点在刚度中心的坐标系$\Sigma_e$（平衡状态下与$\Sigma_d$重合）的刚度矩阵。此外，由式（7.13）的定义可以看出，在大位移情况下矩阵$\boldsymbol{K}_{Pt}$和$\boldsymbol{K}_{Po}$的主刚度和主轴的物理/几何意义仍然保持不变。

上述结果意味着对于当前的作业，主动刚度矩阵$\boldsymbol{K}_P$可以按几何一致的方式来设置。

注意到几何一致性也可以由对式（7.11）姿态势能中姿态误差的不同定义来保证。例如，可以采用任何基于$\boldsymbol{R}_d^e$的角度/轴表示的误差（单位四元组属于这种类型），或者更一般地，采用齐次矩阵或指数坐标（对于具有位置和姿态误差的情况）。而且，由矩阵$\boldsymbol{R}_d^e$提取得到的*XYZ*欧拉角也可以使用。但是，在这种情况下可以看出旋转刚度的主轴不能任意地设置，而是必须与末端执行器坐标系的轴重合。

采用几何一致主动刚度的柔顺控制可以使用如下

控制律来定义

$$h_C = h_\Delta - K_D v_e + \eta(q)$$

这里使用的是式（7.13）中的 $h_\Delta$。在 $h_e=0$ 时平衡状态的渐近稳定性可以使用李雅普诺夫函数来证明

$$V = \frac{1}{2}v_e^T \Lambda(q) v_e + V_t + V_o$$

这里的 $V_t$ 和 $V_o$ 分别是在式（7.9）和式（7.11）中给出的，在坐标系 $\Sigma_d$ 静止的情况下，它们沿着闭环系统轨迹的时间导数具有与式（7.4）中一样的表达式。当 $h_e \neq 0$ 时，对应于期望坐标系 $\Sigma_d$ 相对于末端执行器坐标系 $\Sigma_e$ 的非零位移，可以得到不同的渐近稳定平衡。这个新的平衡是方程 $h_\Delta = h_e$ 的解。

通过适当选取刚度矩阵，刚度控制以末端执行器的位置和姿态误差为代价，使得交互作用力和力矩保持在有限范围内而不需要力/力矩传感器。但是，在出现能够建模为等效末端执行器力螺旋的扰动（比如关节摩擦）的情况下，采用值比较低的主动刚度可能导致相对于末端执行器期望位置和姿态的较大偏差。在没有与环境相互作用时也会出现这种情况。

### 7.2.2 阻抗控制

刚度控制是设计来实现交互作用时的理想静态特性的。事实上，控制系统的动态特性取决于机器人操作手的动态特性，而它是非线性和耦合的。一个要求更高的目标可能是实现末端执行器的理想动态特性。例如，具有6个自由度的二阶机械系统的动态特性，可以用给定的质量、阻尼和刚度来描述，称为机械阻抗。

要实现这个目标的出发点可能是用于运动控制的分解加速度方法，它的目的是利用逆动力学控制律在加速度层次上对非线性的机器人动力学进行解耦和线性化。存在与环境的相互作用情况下，将控制律

$$h_C = \Lambda(q)\alpha + \Gamma(q,\dot{q})\dot{q} + h_e \tag{7.15}$$

代入动力学模型式（7.2）得到

$$\dot{v}_e = \alpha \tag{7.16}$$

式中，$\alpha$ 是一个相对于基坐标系的加速度意义上适当设计的控制输入。考虑等式 $\dot{v}_e = \bar{R}_e^T \dot{v}_e^e + \dot{\bar{R}}_e^T v_e^e$，这里

$$\bar{R}_e = \begin{pmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{pmatrix}$$

选取

$$\alpha = \bar{R}_e^T \alpha^e + \dot{\bar{R}}_e^T v_e^e \tag{7.17}$$

得到

$$\dot{v}_e^e = \alpha^e \tag{7.18}$$

式中，控制输入 $\alpha^e$ 具有相对于末端执行器坐标系的加速度的意义。因此，设定

$$\alpha^e = K_M^{-1}(\dot{v}_d^e + K_D \Delta v_{de}^e + h_\Delta^e - h_e^e) \tag{7.19}$$

对于闭环系统可以得到下面的表达式

$$K_M \Delta \dot{v}_{de}^e + K_D \Delta v_{de}^e + h_\Delta^e = h_e^e \tag{7.20}$$

式中，$K_M$ 和 $K_D$ 是 $6\times6$ 对称正定矩阵；$\Delta\dot{v}_{de}^e = \dot{v}_d^e - \dot{v}_e^e$；$\Delta v_{de}^e = v_d^e - v_e^e$；$\dot{v}_d^e$ 和 $v_d^e$ 分别是期望坐标系 $\Sigma_d$ 的加速度和速度；$h_\Delta^e$ 是弹性力螺旋。这里所有的量都是以末端执行器坐标系 $\Sigma_e$ 为参考的。

上面描述受控制的末端执行器的动态特性的方程可以看做是推广的机械阻抗。在 $h_e=0$ 时的平衡状态的渐近稳定性可以通过考虑李雅普诺夫函数来证明

$$V = \frac{1}{2}\Delta v_{de}^{e\,T} K_M \Delta v_{de}^e + V_t + V_o \tag{7.21}$$

式中，$V_t$ 和 $V_o$ 分别在式（7.9）和式（7.11）中定义，并且它们沿系统（7.20）的轨迹的时间导数是负半定函数

$$\dot{V} = -\Delta v_{de}^{e\,T} K_D \Delta v_{de}^e$$

当 $h_e \neq 0$ 时，对应于期望坐标系 $\Sigma_d$ 相对于末端执行器坐标系 $\Sigma_e$ 的非零位移，可以得到一个不同的渐近稳定平衡。这个新的平衡是方程 $h_\Delta^e = h^e$ 的解。

在 $\Sigma_d$ 不变的情况下，如果选取 $K_M$ 为

$$K_M = \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

式（7.20）具有真正六自由度机械阻抗的意义，其中，$m$ 是质量，$M$ 是 $3\times3$ 惯性张量，$K_D$ 被选取作为具有 $3\times3$ 块的对角分块矩阵。物理等价系统是质量为 $m$ 的刚体，具有相对于固连在刚体上的坐标系 $\Sigma_e$ 的惯性张量 $M$，并受到外部力螺旋 $h^e$ 的作用。这个刚体通过一个具有刚度矩阵 $K_P$ 的六自由度理想弹簧与一个固连在坐标系 $\Sigma_d$ 上的虚拟刚体相连接，还受到阻尼为 $K_D$ 的黏滞力和力矩的作用。式（7.21）中的函数 $V$ 表示刚体的总能：动能和弹性势能的和。

图7.1简略给出了阻抗控制的框图。阻抗控制基于位置和姿态反馈以及力和力矩测量，如式（7.17）和式（7.19）中那样计算加速度输入。然后，逆动力学控制律利用式（7.15）中的 $h_c$ 计算关节驱动器转矩 $\tau = J^T h_c$。在没有交互作用情况下，这个控制方案保证末端执行器坐标系 $\Sigma_e$ 渐近地跟随期望坐标系 $\Sigma_d$。在与环境接触的情况下，按照阻抗（7.20）对

末端执行器施加柔顺动态特性，并且以$\Sigma_d$和$\Sigma_e$之间有限的位置和姿态位移为代价使接触力螺旋有界。与刚性控制不同，用于测量接触力和力矩的力/力矩传感器是必需的。

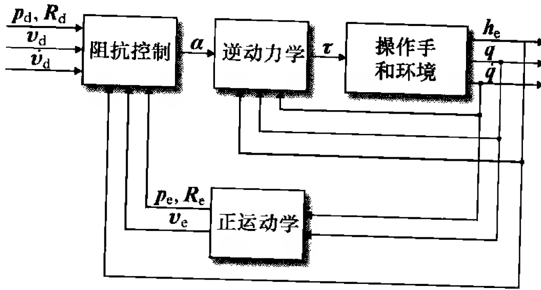



图7.1 阻抗控制

**1. 实现问题**

选择好的阻抗参数以获得令人满意的特性并不是一件容易的任务。事实上，闭环系统的动态特性在自由空间中与在交互作用过程中是不同的。由于在自由空间中必须保证运动跟踪和扰动抑制，而在交互作用过程中主要目标是实现适当的末端执行器柔顺动态特性，它们的控制目标也是不同的。还要注意在交互作用中控制系统的动态取决于环境的动态。

为了深入理解这些问题，假设末端执行器与环境相互作用可以被由一个连接末端执行器坐标系$\Sigma_e$与环境坐标系$\Sigma_o$的六自由度理想弹簧所得到的作用来近似。由此，根据式（7.8），在$\Sigma_e$相对$\Sigma_o$存在无穷小扭位移的情况下，末端执行器作用于环境的弹性力螺旋可以计算得到为

$$\boldsymbol{h}_e^e = \boldsymbol{K}\delta \boldsymbol{x}_{eo}^e \tag{7.22}$$

其中，在平衡状态$\Sigma_e$和$\Sigma_o$相重合，$\boldsymbol{K}$是刚度矩阵。上面的模型仅在交互作用情况下成立，而当末端执行器在自由空间中运动时接触力螺旋为零。

通过在机器人操作手动态模型（7.2）的右侧引入一个对应于作用在末端执行器上的等效扰动力螺旋的附加项，可以把作用于机器人操作手的扰动和未建模动态（关节摩擦力、建模误差等）考虑进去。这个附加项在式（7.18）的右侧产生一个附加加速度扰动$\boldsymbol{\gamma}^e$。因此，使用控制律式（7.19），可以得到下面的闭环阻抗方程

$$\boldsymbol{K}_M \Delta \dot{\boldsymbol{v}}_{de}^e + \boldsymbol{K}_D \Delta \boldsymbol{v}_{de}^e + \boldsymbol{h}_\Delta^e = \boldsymbol{h}_e^e + \boldsymbol{K}_M \boldsymbol{\gamma}^e \tag{7.23}$$

阻抗参数的整定过程可以从线性化的模型开始，在无穷小位移情况下该模型可以由式（7.23）计算得到，即

$$\boldsymbol{K}_M \delta \ddot{\boldsymbol{x}}_{de}^e + \boldsymbol{K}_D \delta \dot{\boldsymbol{x}}_{de}^e + (\boldsymbol{K}_P + \boldsymbol{K})\delta \boldsymbol{x}_{de}^e = \boldsymbol{K}\delta \boldsymbol{x}_{eo}^e + \boldsymbol{K}_M \boldsymbol{\gamma}^e \tag{7.24}$$

这里使用了式（7.22）和等式$\delta \boldsymbol{x}_{eo}^e = -\delta \boldsymbol{x}_{de}^e + \delta \boldsymbol{x}_{do}^e$。上面的方程对于有约束（$\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{0}$）和自由运动（$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$）都是成立的。

很明显，适当的位置和姿态误差动态可以通过适当地选取增益矩阵$\boldsymbol{K}_M$、$\boldsymbol{K}_D$和$\boldsymbol{K}_P$来设定。在所有矩阵都是对角阵的假设下，使无穷小扭转位移的六个分量具有解耦性质，这个任务是很容易的。在这种情况下，每个分量的瞬变特性可以通过使用关系式

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_P + k}{k_M}}, \qquad \zeta = \frac{1}{2}\frac{k_D}{\sqrt{k_M(k_P + k)}}$$

指定固有频率和阻尼率来设定。因此，如果选取的增益在相互作用（即$k \neq 0$）过程中确保获得给定的固有频率和阻尼率，当末端执行器在自由空间（即$k = 0$）中运动时将得到更低的固有频率和更高的阻尼率。至于稳态特性，末端执行器一般分量的误差为

$$\delta x_{de} = \frac{k}{(k_P + k)}\delta x_{do} + \frac{k_M}{k_P + k}\gamma$$

并且相应的交互作用力为

$$h = \frac{k_P k}{k_P + k}\delta x_{do} - \frac{k_M k}{k_P + k}\gamma$$

上述关系式表明，在相互作用过程中，只要相对于环境刚度$k$设定低的主动刚度$k_P$，以大的稳态位置误差为代价就可以使接触力很小，反之亦然。然而，接触力和位置误差又都取决于外界扰动$\gamma$。尤其是，$k_P$越低，$\gamma$对$\delta x_{de}$和$h$两者的影响越大。此外，在没有交互作用情况下（即$k = 0$时）低的主动刚度$k_P$也可能导致大的位置误差。

**2. 导纳控制**

这个问题的解决方法可以按下面把运动控制从阻抗控制中分离出来的方式来构想。运动控制作用特意设定为刚性以便增强扰动抑制，来确保跟踪由阻抗控制作用得到参考位置和姿态，而不是保证跟踪末端执行器的期望位置和姿态。也就是说，期望位置和姿态与测量的接触力螺旋一起输入到阻抗方程，通过适当的积分产生用于运动控制作为参考的位置和姿态。

要实现这个解决方法，有必要引入一个不同于期望坐标系$\Sigma_d$的参考坐标系。这个坐标系称为柔顺坐标系$\Sigma_c$，由量$p_c$、$\boldsymbol{R}_c$、$\dot{\boldsymbol{v}}_c$和$\boldsymbol{v}_c$所确定，这些量由$p_d$、$\boldsymbol{R}_d$、$\dot{\boldsymbol{v}}_d$和$\boldsymbol{v}_d$以及测量得到的力螺旋$\boldsymbol{h}_c$通过积分下面方程计算得到

$$\boldsymbol{K}_M \Delta \dot{\boldsymbol{v}}_{dc}^c + \boldsymbol{K}_D \Delta \boldsymbol{v}_{dc}^c + \boldsymbol{h}_\Delta^c = \boldsymbol{h}_c \tag{7.25}$$

式中，$h_{\Delta}^{c}$是期望坐标系$\Sigma_d$和柔顺坐标系$\Sigma_c$之间存在有限位移情况下的弹性力螺旋。这样，就得到了一个基于逆动力学的运动控制策略，以使末端执行器坐标系$\Sigma_e$与柔顺坐标系$\Sigma_c$相重合。为了保证整个系统的稳定性，运动控制器的带宽应该高于阻抗控制器的带宽。

图7.2给出了所设计的控制方案的框图。很明显，在没有相互作用时，柔顺坐标系$\Sigma_c$与期望坐标系$\Sigma_d$重合，并且位置与姿态误差动态和扰动抑制能力仅取决于内部运动控制环的增益。另一方面，存在交互作用的情况下，动态特性受阻抗增益（7.25）的作用影响。

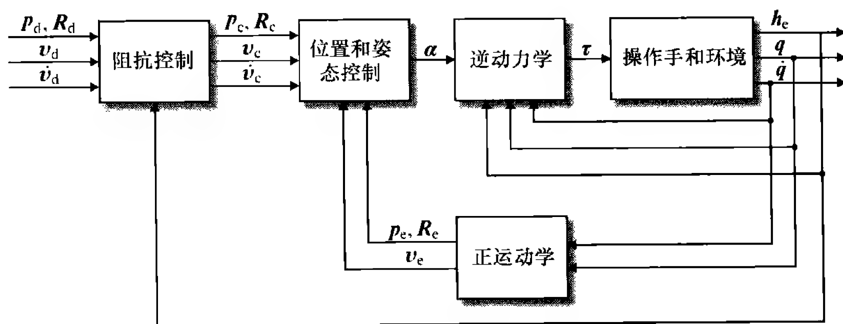



图7.2 带有内部运动控制环的阻抗控制（导纳控制）

由于在式（7.25）中，给定期望坐标系的运动，测量的力（输入）用于计算柔顺坐标系的运动（输出），力作为输入而位置或速度作为输出的变换相当于机械导纳，所以图7.2中的控制方案也称为导纳控制。反之，式（7.20）中将由期望运动轨迹得到的末端执行器位移（输入）变换到接触力螺旋（输出），则具有机械阻抗的意义。

**3. 简化方案**

逆动力学控制是基于模型的，并且需要修改当前工业机器人控制器，控制器通常配备有具有很高带宽的独立PI关节速度控制器。如果环境足够柔顺，这些控制器能够在很大程度上解耦机器人动力学，特别是在慢速运动情况下，来减轻外部作用力对操作手的影响。因此，被控制机器人的闭环动态可以在关节空间由

$$\dot{q}=\dot{q}_r$$

来近似，或者在操作空间等价为

$$\dot{v}_e=v_r \tag{7.26}$$

其中$\dot{q}_r$和$v_r$是由适当设计的外控制回路所产生的控制信号，用于内部速度运动控制回路。这些控制信号之间的关系为

$$\dot{q}_r=J^{-1}(q)v_r$$

对应于分解速度控制，速度$v_r$可以按照下式计算

$$v_r^e=v_d^e+K_D^{-1}(h_{\Delta}^e-h_e^e)$$

式中，控制输入是以末端执行器坐标系为参考的；$K_D$是一个6×6正定矩阵；$h_{\Delta}$是具有刚度矩阵$K_P$的弹性力螺旋式（7.13）。这样，相对应由阻尼$K_D$和刚度$K_P$所描述的末端执行器的柔顺特性，得到闭环方程为

$$K_D\Delta v_{de}^e+h_{\Delta}^e=h_e^e$$

在$K_P=0$情况下，得到的方案称为阻尼控制。

作为另一种选择，可以采用导纳类型的控制方案，这里柔顺坐标系$\Sigma_c$的运动可以按照位置$p_c$、姿态$R_c$和速度扭矢量$v_c$，以微分方程

$$K_D\Delta v_{dc}^c+h_{\Delta}^c=h_e^c$$

的解来计算，其中的输入是期望坐标系$\Sigma_d$的运动变量和接触力螺旋$h_e^c$。然后，$\Sigma_c$的运动变量输入到内部的位置和速度控制器。在$K_D=0$情况下，得到的方案称为柔顺控制。

## 7.3 交互作业

尽管要达到满意的动态特性，控制参数必须针对单独的作业任务进行整定，但间接力控制不需要明确的环境知识。另一方面，对于直接力控制算法的合成，一个交互作业的模型是必须的。

交互作业是由操作手与环境之间复杂的接触状况来描述的。要保证作业正确地执行，对相互作用力和力矩的解析描述是必要的，从建模的角度来看这是非常苛刻的要求。

实际的接触状况是一种自然地分布的现象，涉及接触表面的局部特性以及操作手与环境的全局动态。具体为：

1）由于一个或多个不同类型的接触，环境对末端执行器运动施加运动学约束，并且当末端执行器趋向于违反约束时会产生反作用力螺旋，例如，机器人使刚性工具在无摩擦刚性表面上滑动。

2）在存在环境动态情况下，当末端执行器受到运动学约束制约时，也可能对环境施加一个动态力螺旋，例如，机器人转动曲柄，与曲柄的动态是有关的，或者机器人推挤一个柔顺表面。

3）由于操作手的关节和连杆，以及腕部力/力矩传感器或工具的有限刚度，接触力螺旋可能取决于机器人结构性柔顺，例如，安装在RCC装置上的末端执行器。

4）在相互作用过程中接触表面可能产生局部变形，从而产生分散的接触区域，例如，工具或环境的软接触表面的情况。

5）在非理想光滑接触表面情况下，可能产生静摩擦和动摩擦。

通常在简化的假设下进行交互控制的设计和性能分析。考虑下面两种情况：

1）机器人和环境都是完全刚性的，环境所施加的仅仅是运动学约束。

2）机器人是完全刚性的，系统中所有的柔顺局限于环境中，并且接触力螺旋可以由线性弹性模型近似。

在这两种情况中，都是假设无摩擦接触。很明显这些状况都只是理想的。但是，控制的鲁棒性应该能够处理一些对理论假设放松的情况。在那些情况下，控制率可以改变以适应于处理非理想的特性。

### 7.3.1　刚性环境

环境所施加的运动学约束可以由一组方程表示，方程的变量描述必须满足的末端执行器位置和姿态。由于通过正运动学方程可知这些变量由关节变量确定，因此约束方程也可以在关节空间表示为

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0} \tag{7.27}$$

向量$\boldsymbol{\phi}$是$m\times1$的函数，且$m<n$，其中$n$是操作手的关节数，假设是非冗余的。不是一般性，这里考虑$n=6$的情况。只涉及系统广义坐标，形如（7.27）的约束称为完整性约束。形如$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{0}$的时变约束情况这里不考虑，但也可以采用类似的方法分析。此外，仅仅关注形如（7.27）等式所表示的双侧约束；这意味着末端执行器与环境一直保持接触。这里给出的分析称为动态静力分析。

假设向量（7.27）是二阶可微，并且它的$m$个分量至少在操作点的邻域是局部地线性无关的。因此，将式（7.27）微分，得到

$$\boldsymbol{J}_{\phi}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{0} \tag{7.28}$$

式中，$\boldsymbol{J}_{\phi}(\boldsymbol{q})=\partial\boldsymbol{\phi}/\partial\boldsymbol{q}$是$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q})$的$m\times6$雅可比矩阵，称为约束雅可比。根据以上假设，至少局部地在操作点的邻域内$\boldsymbol{J}_{\phi}(\boldsymbol{q})$的秩为$m$。

不考虑摩擦的情况下，广义相互作用力由趋于违反约束的反作用力螺旋来表示。这个末端执行器力螺旋在关节上产生的反作用力矩可以使用虚功原理计算为

$$\boldsymbol{\tau}_{e}=\boldsymbol{J}_{\phi}^{T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}$是$m\times1$的拉格朗日乘子向量。对应的末端执行器力螺旋可以计算为

$$\boldsymbol{h}_{e}=\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau}_{e}=\boldsymbol{S}_{f}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda} \tag{7.29}$$

其中

$$\boldsymbol{S}_{f}=\boldsymbol{J}^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}_{\phi}^{T}(\boldsymbol{q}) \tag{7.30}$$

从式（7.29）可以得出$\boldsymbol{h}_{e}$属于由$6\times m$矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$的列所张成的$m$维向量空间。线性变换（7.29）的逆为

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{S}_{f}^{\dagger}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{h}_{e} \tag{7.31}$$

式中，$\boldsymbol{S}_{f}^{\dagger}$表示矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$的加权伪逆，即

$$\boldsymbol{S}_{f}^{\dagger}=(\boldsymbol{S}_{f}^{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}_{f})^{-1}\boldsymbol{S}_{f}^{T}\boldsymbol{W} \tag{7.32}$$

式中，$\boldsymbol{W}$为适当的加权矩阵。

注意，尽管式（7.30）中矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$的值域是由接触的几何形状唯一定义的，矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$自身却不是唯一的；并且约束方程（7.27）、相应的雅可比矩阵$\boldsymbol{J}_{\phi}$和伪逆$\boldsymbol{S}_{f}^{\dagger}$，以及向量$\boldsymbol{\lambda}$也不是唯一定义的。

通常，对$\boldsymbol{\lambda}$的元素测量的物理单位不是同类的，矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$和矩阵$\boldsymbol{S}_{f}^{\dagger}$的列也不一定要表示同质的实体。这可能在变换（7.31）中产生不变性的问题。如果$\boldsymbol{h}_{e}$表示一个受到干扰的测量的力螺旋，作为结果，可能有分量在$\boldsymbol{S}_{f}$的值域范围之外。如果物理单位或参考坐标系改变了，矩阵$\boldsymbol{S}_{f}$要进行变换；但是带有变换的伪逆的式（7.31）的结果一般而言是取决于所采用的物理单位或取决于参考坐标系。原因在于伪逆是基于向量$\boldsymbol{h}_{e}-\boldsymbol{S}_{f}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda}$的范数的最小化问题的加权最小二乘解，并且只有使用这个向量的物理一致的范数才能保证不变性。在$\boldsymbol{h}_{e}$在$\boldsymbol{S}_{f}$的值域内的理想情况下，式（7.31）中的$\lambda$有唯一解，并且不考虑加权矩阵，这样就不会出现不变性的问题。

一个可能的解决方法在于选取以使它自身的列表示线性无关的力螺旋。这意味着式（7.29）使$\boldsymbol{h}_{e}$成为力螺旋的线性组合，并且$\boldsymbol{\lambda}$是无量纲的向量。在力螺旋空间物理一致的范数可以基于二次型$\boldsymbol{h}_{e}^{T}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{h}_{e}$来定义，如果$\boldsymbol{K}$是一个对应刚度的正定矩阵，其具有弹性能的意义。因此，可以选取$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{K}^{-1}$作为伪逆的加权矩阵。

注意，对于给定的 $S_f$，约束雅可比可以由式(7.30)计算为 $J_\phi(q)=S_f^T J(q)$；此外，可以通过积分(7.28)得到约束方程。

使用式(7.1)和式(7.30)，等式(7.28)可以重写形为

$$J_\phi(q)J^{-1}(q)J(q)\dot{q}=S_f^T v_e=0 \qquad (7.33)$$

根据式(7.29)的假设，其等价于

$$h_e^T v_e=0 \qquad (7.34)$$

式(7.34)表示理想反作用力螺旋（属于所谓的力控制子空间）和服从约束的末端执行器扭矢（属于所谓的速度控制子空间）之间的动态静力关系，称为互反性。在刚性和无摩擦接触的假设条件下，互反性的概念表达这样的物理事实，即力螺旋克服扭矢不做任何功。互反性经常会与正交性的概念混淆，由于扭矢和力螺旋属于不同的空间，所有后者在这里没有任何意义。

式(7.33)和式(7.34)意味着速度控制子空间是 $m$ 维力控制子空间的互反补，由矩阵的值域确定。因此，速度控制子空间的维数是 $6-m$，可以定义一个 $6\times(6-m)$ 的矩阵 $S_v$，它的列张成速度控制子空间，即

$$v_e=S_v(q)\nu \qquad (7.35)$$

式中，$\nu$ 是适当的 $(6-m)\times1$ 的向量。由式(7.33)和式(7.35)可知，下面的等式成立

$$S_f^T(q)S_v(q)=0 \qquad (7.36)$$

此外，线性变换(7.35)的逆可以计算为

$$\nu=S_v^\dagger(q)v_e \qquad (7.37)$$

式中，$S_v^\dagger$ 表示矩阵 $S_v$ 的适当的加权伪逆，与式(7.32)中的计算一样。

注意，与 $S_f$ 的情况一样，尽管矩阵 $S_v$ 的值域是唯一定义的，矩阵 $S_v$ 自身的选取却不是唯一的。此外，$S_v$ 的列也不一定要是扭矢，标量 $\nu$ 也可以具有不同种的物理量纲。但是，为了避免类似于 $S_f$ 情况中考虑的不变性问题，可以简便地选择 $S_v$ 的列作为扭矢以使向量 $\nu$ 是无量纲的。此外，式(7.37)中用于计算伪逆的加权矩阵可以设定为 $W=M$，而 $M$ 是 $6\times6$ 的惯性矩阵，这相当于在扭矢空间基于动能定义范数。有必要注意，对应参考坐标系的改变，扭矢和力螺旋的变换矩阵是不同的。然而，如果扭矢定义为角速度在上平移速度在下，那么它们的变换矩阵和力螺旋是一样的。

矩阵 $S_v$ 也有使用雅可比的表达形式，与式(7.30)中的 $S_f$ 一样。由于存在 $m$ 个独立几何约束(7.27)，可以用一个为独立变量的 $(6-m)\times1$ 的向量 $r$ 来描述与环境接触时机器人的构型。根据隐函数定理，这个向量可以定义为

$$r=\psi(q) \qquad (7.38)$$

式中，$\psi(q)$ 是任意 $(6-m)\times1$ 的二阶可微向量函数，使得 $\phi(q)$ 的 $m$ 个分量和 $\psi(q)$ 的 $n-m$ 个分量至少在操作点的邻域是局部地线性无关的。这意味着映射(7.38)与约束(7.27)一起是局部可逆的，它的逆定义为

$$q=\rho(r) \qquad (7.39)$$

式中，$\rho(r)$ 是 $6\times1$ 的二阶可微向量函数。方程(7.39)显式地给出了所有满足约束(7.27)的关节向量。此外，满足式(7.28)的关节速度向量可以计算为

$$\dot{q}=J_\rho(r)\dot{r}$$

式中，$J_\rho(r)=\partial\rho/\partial r$ 是 $6\times(6-m)$ 的满秩雅可比矩阵。所以，下面的等式成立

$$J_\phi(q)J_\rho(r)=0$$

它可以看作是由矩阵 $J_\phi^T$ 的列所张成的反作用力矩子空间与由矩阵 $J_\rho$ 的列所张成的带约束的关节速度子空间之间的互反性条件。

重写上面的方程为

$$J_\phi(q)J(q)^{-1}J(q)J_\rho(q)=0$$

并把式(7.30)和式(7.36)考虑进去，矩阵 $S_v$ 可以表示为

$$S_v=J(q)J_\rho(r) \qquad (7.40)$$

根据式(7.38)和式(7.39)，可以等价地表示为 $q$ 或 $r$ 的函数。

矩阵 $S_f$ 和 $S_v$ 以及它们的伪逆 $S_f^\dagger$ 和 $S_v^\dagger$ 称为选择矩阵。它们除了在控制综合中，在作业规范中也起着重要作用，即期望的末端执行器的运动和相互作用力与力矩的规范。

### 7.3.2 柔顺环境

在很多应用中，末端执行器与柔顺环境之间的相互作用力螺旋可以使用形如(7.22)的理想弹性模型来近似。但是，由于刚度矩阵 $K$ 是正定的，当环境变形与末端执行器无穷小扭转位移重合时，这个模型描述的是完全约束的情况。但是，一般来说末端执行器的运动只是受到环境的部分约束，这种情况可以通过引入合适的半正定刚度矩阵来建模。

可以通过将环境建模为一对刚体 S 和 O，并由一个柔顺为 $C=K^{-1}$ 的理想六自由度弹簧连接，来计算描述末端执行器与环境之间部分约束的相互作用的刚度矩阵。刚体 S 与坐标系 $\Sigma_S$ 固连，并与末端执行器

接触；刚体O与坐标系$\Sigma_0$固连，这个坐标系在平衡状态与坐标系$\Sigma_S$重合。存在力螺旋$\boldsymbol{h}_S$的情况下，环境在平衡状态附近的变形可以由坐标系$\Sigma_S$和$\Sigma_0$之间的无穷小扭转位移$\delta\boldsymbol{x}_{S0}$来表示，其可以计算为

$$\delta\boldsymbol{x}_{S0}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_S \tag{7.41}$$

为了简便起见，后面所有参考坐标系$\Sigma_S$的量都省略上标S。

对于所考虑的接触状况，因为环境可以变形，末端执行器的扭矢不是完全属于对应于刚性环境的理想速度子空间。因此，末端执行器坐标系$\Sigma_e$相对于$\Sigma_0$的无穷小扭转位移可以分解为

$$\delta\boldsymbol{x}_{eo}=\delta\boldsymbol{x}_v+\delta\boldsymbol{x}_f \tag{7.42}$$

式中，$\delta\boldsymbol{x}_v$是末端执行器在速度控制子空间的无穷小扭转位移，定义为力控制子空间的$6-m$维互反补，而$\delta\boldsymbol{x}_f$则是对应于环境变形的末端执行器的无穷小扭转位移。因此：

$$\delta\boldsymbol{x}_v=\boldsymbol{P}_v\delta\boldsymbol{x}_{eo} \tag{7.43}$$

$$\delta\boldsymbol{x}_f=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_v)\delta\boldsymbol{x}_{eo}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_v)\delta\boldsymbol{x}_{so} \tag{7.44}$$

式中，$\boldsymbol{P}_v=\boldsymbol{S}_v\boldsymbol{S}_v^{\dagger}$、$\boldsymbol{S}_v$和$\boldsymbol{S}_v^{\dagger}$是与在刚性环境情况下一样定义的。矩阵$\boldsymbol{P}_v$是滤除所有不在$\boldsymbol{S}_v$值域内的末端执行器的扭矢（和无穷小扭转位移）的投影矩阵，而$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_v$是滤除所有在$\boldsymbol{S}_v$值域内的末端执行器的扭矢（和无穷小扭转位移）的投影矩阵。扭矢$\boldsymbol{P}_v\boldsymbol{v}$表示自由度扭矢，而扭矢$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_v)\boldsymbol{v}$表示约束扭矢。

在无摩擦接触假设条件下，和刚性环境情况下一样，末端执行器与环境之间的相互作用力螺旋被局限于由矩阵$\boldsymbol{S}_f$的$m$维值域所定义的力控制子空间内，即

$$\boldsymbol{h}_e=\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{h}_s \tag{7.45}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}$是$m\times1$的无量纲向量。式（7.42）的两边都左乘$\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}$，并利用式（7.41）、式（7.43）、式（7.44）和式（7.45）得到

$$\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_{eo}=\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\lambda}$$

这里利用了等式$\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_v=\boldsymbol{0}$。因此，可以得到如下的弹性模型：

$$\boldsymbol{h}_e=\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{K}'\delta\boldsymbol{x}_{eo} \tag{7.46}$$

式中，$\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{S}_f(\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}_f)^{-1}\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}$是半正定的刚度矩阵，对应于部分约束的交互。

如果采用柔顺矩阵$\boldsymbol{C}$作为计算$\boldsymbol{S}_f^{\dagger}$的加权矩阵，则$\boldsymbol{K}'$可以表示为

$$\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{P}_f\boldsymbol{K} \tag{7.47}$$

式中，$\boldsymbol{P}_f=\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{S}_f^{\dagger}$是滤除不在$\boldsymbol{S}_f$的值域内的所有末端执行器的力螺旋的投影矩阵。

因为用于部分约束交互的柔顺矩阵的秩$m<6$，所以这个矩阵不能计算作为$\boldsymbol{K}'$的逆。但是，利用式（7.44）、式（7.41）和式（7.45），可以得到下面的等式

$$\delta\boldsymbol{x}_f=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{h}_e$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{C}'=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_v)\boldsymbol{C} \tag{7.48}$$

是秩为$6-m$的半正定矩阵。如果采用刚度矩阵$\boldsymbol{K}$作为计算$\boldsymbol{S}_v^{\dagger}$的加权矩阵，则矩阵$\boldsymbol{C}'$具有值得注意的表达式$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{S}_v(\boldsymbol{S}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}_v)^{-1}\boldsymbol{S}_v^{\mathrm{T}}$，表明$\boldsymbol{C}'$是对称的。

### 7.3.3 作业规范

交互作业可以利用期望的末端执行器力螺旋$\boldsymbol{h}_d$和扭矢量$\boldsymbol{v}_d$来指定。为了与约束一致，这些向量必须分别属于力控制和速度控制子空间。这可以通过指定向量$\boldsymbol{\lambda}_d$和$\boldsymbol{\nu}_d$来保证，并计算$\boldsymbol{h}_d$和$\boldsymbol{v}_d$为

$$\boldsymbol{h}_d=\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\lambda}_d,\quad \boldsymbol{v}_d=\boldsymbol{S}_v\boldsymbol{\nu}_d$$

式中，$\boldsymbol{S}_f$和$\boldsymbol{S}_v$必须在作业几何的基础上适当地定义，以保证考虑到选取参考坐标系和改变物理单位的不变性。

很多机器人作业具有一组正交参考坐标系，在这些坐标系里作业规范是非常容易和直观的。这样的坐标系称为作业坐标系或柔顺坐标系。交互作业可以通过设定沿/绕着每个坐标系轴的期望力/力矩或期望线/角速度来指定。由于这些期望的量是由控制器所施加，所以称之为人为约束；在刚性接触情况下，这些约束是那些由环境施加并称为自然约束的补充。

下面给出一些作业坐标系定义和作业规范的例子。

**1. 销孔装配**

这个作业的目的是把销推入到孔中，同时避免楔紧和卡阻现象。销具有两个运动自由度，因此速度控制子空间的维数是$6-m=2$，而力控制子空间的维数是$m=4$。作业坐标系可以如图7.3中所示那样选取，并通过指定下面的期望力和力矩以及期望的速度来完成作业

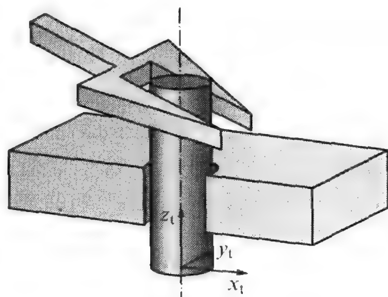



图7.3 圆柱销插入到孔中

1）沿着 $x_t$ 和 $y_t$ 轴的零力。

2）绕 $x_t$ 和 $y_t$ 轴的零力矩。

期望速度：

1）沿着 $z_t$ 轴的非零线速度。

2）绕 $z_t$ 轴的任意角速度。

作业持续直到在 $z_t$ 方向测量到很大的反作用力，表明销已经碰到孔的底部，这在图中没有表示出来。因此，矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$ 可以选取为

$$\boldsymbol{S}_f=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_v=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{S}_f$ 的列具有力螺旋的维数，$\boldsymbol{S}_v$ 的列具有扭矢的维数，如作业坐标系中所定义的。当参考坐标系改变时，它们相应地变换。作业坐标系既可以选择固连于末端执行器，也可以固连于环境。

**2. 旋转曲柄**

这个作业的目的是旋转具有自由转动手柄的曲柄。手柄具有两个运动自由度，对应于绕 $z_t$ 轴的转动和绕曲柄转轴的转动。因此速度控制子空间的维数是 $6-m=2$，而力控制子空间的维数是 $m=4$。作业坐标系可以如图7.4中所示那样选取，固连于曲柄。

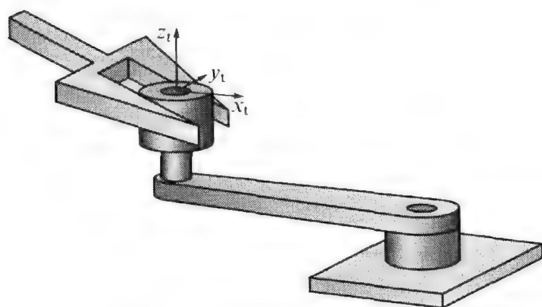



**图7.4 旋转具有空转手柄的曲柄**

通过指定下面的期望力和力矩以及期望的速度来完成作业：

1）沿着 $x_t$ 和 $z_t$ 轴的零力。

2）绕 $x_t$ 和 $y_t$ 轴的零力矩。

期望速度：

1）沿着 $y_t$ 轴的非零线速度。

2）绕 $z_t$ 轴的任意角速度。

因此，参考作业坐标系，矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$ 可以选取为

$$\boldsymbol{S}_f=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_v=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

在这种情况下，作业坐标系相对于曲柄是固定的，但相对于末端执行器坐标系（固定于手柄）和机器人基坐标系都是运动的。因此，当参考末端执行器坐标系或者基坐标系时，矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$ 都是时变的。

**3. 在平面弹性表面上滑动方块**

这个作业的目的是在平面表面上沿着 $x_t$ 轴滑动一个方块，同时用一个作用于弹性平面表面的给定力推它。物体具有3个运动自由度，因此速度控制子空间的维数是 $6-m=3$，而力控制子空间的维数是 $m=3$。作业坐标系可以选取固连于环境，如图7.5中所示。

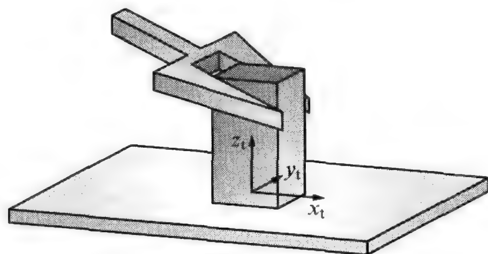



**图7.5 在平面弹性表面上滑动块状物体**

通过指定期望速度以及期望力和力矩来完成作业：

1）沿着 $x_t$ 轴的非零速度。

2）沿着 $y_t$ 轴的零速度。

3）绕 $z_t$ 轴的零角速度。

期望力和力矩：

1）沿着 $z_t$ 轴的非零力。

2）绕 $x_t$ 和 $y_t$ 轴的零力矩。

因此，矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$ 可以选取为

$$\boldsymbol{S}_f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{S}_v=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$6\times6$ 的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}'$ 对应于末端执行器与环境之间部分约束的相互作用，除了 $3\times3$ 主子式 $\boldsymbol{K}'_m$ 的元素，

$K'$的元素都是零。主子式由$K'$的第3、4、5行和第3、4、5列构成，可以表示为

$$K'_{\mathrm{m}}=\begin{pmatrix} c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} \\ c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} \\ c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} \end{pmatrix}^{-1}$$

式中，$c_{i,j}=c_{j,i}$是柔顺矩阵$C$的元素。

**4. 一般接触模型**

对于各种实际机器人作业的规范，作业坐标系的概念被证明是非常有用的。但是，它只适用于那些复杂度有限的作业几何，并且其分离的控制模式可以独立地分配到沿着单个坐标系的轴的3个纯平移和3个纯转动方向。对于更复杂的状况，比如多点接触的情况，作业坐标系就不存在了，必须采用更为复杂的模型。一个合适的解决方法是使用虚拟接触操作手模型，其中使用一个被操作物体与环境之间的虚拟运动学链来建模每个单独的接触，并且当接触时赋予被操作物体（瞬时地）相同的运动自由度。所有单独接触的虚拟操作手形成了并行操作手，其速度和力运动学方程可以利用真实操作手的标准运动学方程步骤得到，并且允许构建所有运动约束的扭矢量和力螺旋空间的基。

一个更为一般的方法，称为基于约束的作业规范。它开发了涉及复杂几何和/或多传感器（力/力矩、距离、视觉传感器）的使用的新应用，用于同时控制空间中的不同方向。作业坐标系的概念扩展到多个特征坐标系。每个特征坐标系可以使用沿着坐标系轴的平移和转动方向来对作业几何的一部分进行建模；约束的一部分也可以在每个特征坐标系中指定。通过合并在每个在单独特征坐标系中表示的部分的作业和约束规范，可以得到总的模型和总的约束集合。

### 7.3.4　基于传感器的接触模型估计

在假设精确的接触模型是一直可以得到的条件下，作业规范取决于对速度控制子空间和力控制子空间的定义。另一方面，在大多数实际执行中，选择矩阵$S_{\mathrm{f}}$和$S_{\mathrm{v}}$并不是已知的。但是许多交互控制策略是相当鲁棒的，可以克服建模误差。事实上，可靠地处理这些状况正是使用力控制的原因。在作业执行过程中，如果矩阵$S_{\mathrm{f}}$和$S_{\mathrm{v}}$可以使用运动和/或力测量来连续更新，力控制器的鲁棒性就会提高。

具体来说，假设一个名义模型是可以得到的。当接触状况进展不同于模型所预测的那样，测量的运动和力开始与预测的偏离。这些小的不一致可以被测量并用于在线调整模型，所使用的算法可以由像卡尔曼滤波这样的经典状态－空间预测－校正估计得到。

图7.6给出了一个名义的运动和力变量与测量的运动和力变量之间误差的例子，这是二维轮廓跟踪作业的典型情况。如果环境不是平面，接触法向的姿态会改变。因此，在名义接触法向和实际接触法向之间出现了一个角度误差$\theta$。名义接触法向对齐到作业坐标系（轴为$x_{\mathrm{t}}$和$y_{\mathrm{t}}$的坐标系）的$y_{\mathrm{t}}$轴，而实际接触法向对齐到实际作业坐标系（轴为$x_{\mathrm{r}}$和$y_{\mathrm{r}}$的坐标系）的$y_{\mathrm{r}}$轴。这个角度可以只通过速度或力的测量来估计。

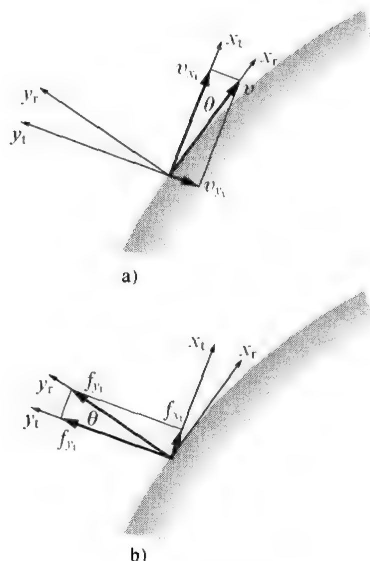



**图7.6　姿态误差的估计**

a）基于速度的方法　b）基于力的方法

1）基于速度的方法：实际执行的线性速度$\boldsymbol{v}$与实际轮廓（对齐到$x_{\mathrm{r}}$轴）相切，而不是完全沿着$x_{\mathrm{t}}$轴，有一个小的分量沿着$y_{\mathrm{t}}$轴。于是姿态误差$\theta$可以由$\theta=\tan^{-1}(v_{y_{\mathrm{t}}}/v_{x_{\mathrm{t}}})$来近似。

2）基于力的方法：测量的（理想的）接触力$\boldsymbol{f}$不是完全沿着名义法向方向对齐到$y_{\mathrm{t}}$轴，而是沿着$x_{\mathrm{t}}$轴有一个小的分量$f_{x_{\mathrm{t}}}$。于是姿态误差$\theta$可以由$\theta=\tan^{-1}(f_{y_{\mathrm{t}}}/f_{x_{\mathrm{t}}})$来近似。

基于速度的方法会受到系统机械柔顺的干扰；基于力的方法会受到接触摩擦的干扰。

## 7.4　力/运动混合控制

力/运动混合控制的目的是将对末端执行器运动

和接触力的同时控制分成两个解耦的单独子问题。在接下来的部分，对刚性环境和柔顺环境两种情况，给出了混合框架下的主要控制方法。

### 7.4.1 分解加速度方法

与运动控制情况一样，分解加速度方法的目的是通过逆动力学控制律，在加速度层次对非线性的机器人动力学进行解耦和线性化。在与环境存在相互作用的情况下，寻找力控制子空间和速度控制子空间之间的完全解耦。基本的想法是设计一个基于模型的内控制环来补偿机器人操作手的非线性动态以及解耦力和速度子空间；然后设计一个外控制环来保证扰动抑制和末端执行器期望力与运动的跟踪。

**1. 刚性环境**

对于刚性环境，外部力螺旋可以写成 $\boldsymbol{h}_e=\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\lambda}$ 的形式。通过求解式（7.2）得到 $\dot{\boldsymbol{v}}_e$ 并将其代入到式（7.33）的后一个等式的时间导数中，可以从式（7.2）中消去力乘子 $\boldsymbol{\lambda}$。这样可以得到：

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_f(\boldsymbol{q})\{\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{h}_c-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]+\dot{\boldsymbol{S}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_e\} \tag{7.49}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}_f(\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{S}_f)^{-1}$ 和 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\eta}$。因此，约束动态可以重写为

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}_e+\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\Lambda}_f(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{h}_c-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})] \tag{7.50}$$

式中，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\Lambda}_f\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$。注意，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_f=\boldsymbol{0}$，因此 $6\times6$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是滤除所有在 $\boldsymbol{S}_f$ 的值域内的末端执行器力螺旋的投影矩阵。它们对应于那些趋于违反约束的力螺旋。

式（7.49）说明力乘子向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 也瞬时地取决于施加的输入力螺旋 $\boldsymbol{h}_c$。因此，通过适当选取 $\boldsymbol{h}_c$，有可能直接控制那些趋于违反约束的力螺旋的 $m$ 个独立分量；这些分量可以利用式（7.29）由 $m$ 个力乘子计算得到。另一方面，式（7.50）表示的一组 6 个二阶微分方程，如果初始化到约束上，则方程的解一直自动地满足式（7.27）。

约束系统的降阶动态特性可由 $6-m$ 个二阶方程描述，这些方程通过在式（7.50）两边都左乘矩阵 $\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}$ 并利用

$$\dot{\boldsymbol{v}}_e=\boldsymbol{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}}+\dot{\boldsymbol{S}}_v\boldsymbol{\nu}$$

替换加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}_e$ 得到。最后得到方程为

$$\boldsymbol{\Lambda}_v(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{\nu}}+\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{\Lambda}_f(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{S}_v^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{h}_c-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}_v\boldsymbol{\nu}] \tag{7.51}$$

这里利用了 $\boldsymbol{\Lambda}_v=\boldsymbol{S}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}_v$、式（7.36）和 $\boldsymbol{S}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}_v$。此外，表达式（7.49）可以重写为

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\Lambda}_f(\boldsymbol{q})\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{q})[\boldsymbol{h}_c-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}_v\boldsymbol{\nu}]$$

这里利用了等式 $\dot{\boldsymbol{S}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_v=-\boldsymbol{S}_f^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}_v$。

通过选取控制力螺旋 $\boldsymbol{h}_c$ 如下，可以设计一个逆动力学内控制环

$$\boldsymbol{h}_c=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{S}_v\boldsymbol{\alpha}_v+\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{f}_\lambda+\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{S}}_v\boldsymbol{\nu} \tag{7.52}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}_v$ 和 $\boldsymbol{f}_\lambda$ 是适当设计的控制输入。

把式（7.52）代入到式（7.51）和式（7.49）得到

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\alpha}_v$$
$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{f}_\lambda$$

表明控制律（7.52）能使力控制和速度控制子空间之间完全解耦。

值得注意的是，假如矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$ 已知或在线估计，对于控制律（7.52）的执行，定义用于约束系统的构型变量向量的约束（7.27）和（7.38）是不需要的。在这些情况中，通过用向量 $\boldsymbol{\lambda}_d(t)$ 指定期望力和用向量 $\boldsymbol{\nu}_d(t)$ 指定期望速度，可以很容易地分配作业任务；而且，实现了力/速度控制。

期望力 $\boldsymbol{\lambda}_d(t)$ 可以通过设定

$$\boldsymbol{f}_\lambda=\boldsymbol{\lambda}_d(t) \tag{7.53}$$

获得，但是由于它不包含力反馈，这样选取对干扰力非常敏感。另外可以替代的选取为

$$\boldsymbol{f}_\lambda=\boldsymbol{\lambda}_d(t)+\boldsymbol{K}_{P\lambda}[\boldsymbol{\lambda}_d(t)-\boldsymbol{\lambda}(t)] \tag{7.54}$$

或者

$$\boldsymbol{f}_\lambda=\boldsymbol{\lambda}_d(t)+\boldsymbol{K}_{I\lambda}\int_0^t[\boldsymbol{\lambda}_d(\tau)-\boldsymbol{\lambda}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{7.55}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{P\lambda}$ 和 $\boldsymbol{K}_{I\lambda}$ 是合适的正定矩阵增益。比例反馈可以减小干扰力导致的力误差，而积分作用能够补偿常量扰动偏差。

力反馈的实现需要从对末端执行器力螺旋 $\boldsymbol{h}_e$ 的测量值中计算力乘子 $\lambda$，这可以利用式（7.31）来得到。

速度控制可以通过下面的设定来得到

$$\boldsymbol{\alpha}_\nu=\dot{\boldsymbol{\nu}}_d(t)+\boldsymbol{K}_{P\nu}[\boldsymbol{\nu}_d(t)-\boldsymbol{\nu}(t)]+\boldsymbol{K}_{I\nu}\int_0^t[\boldsymbol{\nu}_d(\tau)-\boldsymbol{\nu}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{7.56}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{P\nu}$ 和 $\boldsymbol{K}_{I\nu}$ 是合适的矩阵增益。可以明显看出，对于任意选取的正定矩阵 $\boldsymbol{K}_{P\nu}$ 和 $\boldsymbol{K}_{I\nu}$，$\boldsymbol{\nu}_d(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{\nu}}_d(t)$ 的渐近跟踪都保证是以指数收敛的。

向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的计算可以利用式（7.31）从可用的测

量得到，其中利用式（7.1）从对关节位置和速度的测量值可以计算出末端执行器的扭矢。

式（7.54）或式（7.55）与式（7.56）表示外控制环，它保证了力/速度控制和扰动抑制。

当式（7.27）和式（7.38）已知，按照式（7.30）和式（7.40）可以计算出矩阵 $\boldsymbol{S}_f$ 和 $\boldsymbol{S}_v$，并且通过指定期望力 $\boldsymbol{\lambda}_d(t)$ 和期望位置 $\boldsymbol{r}_d(t)$ 可以设计出力/位置控制。

力控制可以像上面那样设计，而位置控制可以通过设定

$$\boldsymbol{\alpha}_v = \ddot{\boldsymbol{r}}_d(t) + \boldsymbol{K}_{Dr}[\dot{\boldsymbol{r}}_d(t) - \boldsymbol{\nu}(t)] + \boldsymbol{K}_{Pr}[\boldsymbol{r}_d(t) - \boldsymbol{r}(t)]$$

得到。对于任意选取的正定矩阵 $\boldsymbol{K}_{Dr}$ 和 $\boldsymbol{K}_{Pr}$，$\boldsymbol{r}_d(t)$、$\dot{\boldsymbol{r}}_d(t)$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}_d(t)$ 的渐近跟踪都保证是以指数收敛的。利用式（7.38）从关节位置测量值可以计算得到位置反馈所需要的向量 $\boldsymbol{r}$。

**2. 柔顺环境**

在柔顺环境情况下，按照对末端执行器位移的分解（7.42），末端执行器的扭矢可以分解为

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{S}_v\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f\dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{7.57}$$

式中，第一项是自由扭矢；第二项是约束扭矢；向量 $\boldsymbol{\nu}$ 与式（7.40）中的定义一样；$\boldsymbol{C}'$ 在式（7.48）中定义。假设接触几何和柔顺是不变的，即 $\dot{\boldsymbol{S}}_v = \boldsymbol{0}$、$\dot{\boldsymbol{C}}' = \boldsymbol{0}$ 和 $\dot{\boldsymbol{S}}_f = \boldsymbol{0}$，对于加速度也有类似的分解成立

$$\dot{\boldsymbol{v}}_e = \boldsymbol{S}_v\dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f\ddot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{7.58}$$

可以采用逆动力学控制率（7.15），并得到闭环（7.16），其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是适当设计的控制输入。

考虑到加速度分解（7.58），选取

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{S}_v\boldsymbol{\alpha}_v + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{f}_\lambda \tag{7.59}$$

可以使力控制从速度控制中解耦。实际上，将式（7.58）和式（7.59）代入到式（7.16）中，并在所得到的方程两边都各左乘一次 $\boldsymbol{S}_v^\dagger$ 和一次 $\boldsymbol{S}_f^T$，可以得到下面解耦的方程

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha}_v \tag{7.60}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}_\lambda \tag{7.61}$$

因此，通过像刚性环境情况那样按照式（7.56）选取 $\boldsymbol{\alpha}_v$，对期望速度 $\boldsymbol{\nu}_d(t)$ 和加速度 $\dot{\boldsymbol{\nu}}_d(t)$ 的渐近跟踪都是以指数收敛保证的。控制输入 $\boldsymbol{f}_\lambda$ 可以选取为

$$\boldsymbol{f}_\lambda = \ddot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t) + \boldsymbol{K}_{D\lambda}[\dot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t) - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)] + \boldsymbol{K}_{P\lambda}[\boldsymbol{\lambda}_d(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)] \tag{7.62}$$

对于任意选取的正定矩阵 $\boldsymbol{K}_{D\lambda}$ 和 $\boldsymbol{K}_{P\lambda}$，都保证期望力轨迹（$\boldsymbol{\lambda}_d(t)$，$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t)$，$\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t)$）的渐近跟踪是以指数收敛的。

与刚性环境情况不同，对于力控制律（7.62）的实现反馈 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ 是必需的。这个量可以由末端执行器力螺旋的测量值 $\boldsymbol{h}_e$ 计算得到为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{S}_f^\dagger\dot{\boldsymbol{h}}_e$$

然而，由于力螺旋的测量信号往往是带有噪声的，反馈 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ 经常会替换为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{S}_f^\dagger\boldsymbol{K}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.63}$$

其中关节速度是采用转速计测量或对关节位置进行数值微分计算得到的，$\boldsymbol{K}'$ 是描述部分约束的相互作用的半正定刚度矩阵（7.47）。对于式（7.63）的计算，只有 $\boldsymbol{K}'$ 的知识（或估计）是必需的，并不需要刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。并且，控制律（7.59）的实现也是需要部分约束相互作用的柔顺矩阵 $\boldsymbol{C}'$ 的知识（或估计），而不需要完整的柔顺矩阵 $\boldsymbol{C}$。

如果接触几何是已知的，但只有环境刚度/柔顺的估计是可用的情况下，如果指定一个不变的期望力 $\boldsymbol{\lambda}_d$，控制律（7.59）与式（7.62）一起仍可以保证力误差的收敛。对于这种情况，控制律（7.59）具有形式

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{S}_v\boldsymbol{\alpha}_v + \hat{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{f}_\lambda$$

式中，$\hat{\boldsymbol{C}}' = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_v)\hat{\boldsymbol{C}}$，$\hat{\boldsymbol{C}}$ 是柔顺矩阵的一个估计。因此，式（7.60）仍然成立，而作为替代式（7.61），可以得到下面的等式

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{L}_f\boldsymbol{f}_\lambda$$

式中，$\boldsymbol{L}_f = (\boldsymbol{S}_f^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}_f)^{-1}\boldsymbol{S}_f^T\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{S}_f$ 是一个非奇异矩阵。因此，力控制和速度控制子空间仍保持解耦，并且速度控制律（7.56）不需要修改。另一方面，如果使用式（7.63）计算 $\boldsymbol{\lambda}$ 的时间导数作为反馈，只能得到估计 $\hat{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}$。利用式（7.63）、式（7.57）和式（7.46），可以得到下面的等式

$$\hat{\dot{\boldsymbol{\lambda}}} = \boldsymbol{L}_f^{-1}\dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

所以，使用常量 $\boldsymbol{\lambda}_d$、作为 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ 的替代的 $\hat{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{D\lambda} = K_{D\lambda}\boldsymbol{I}$，以式（7.62）计算力控制律 $\boldsymbol{f}_\lambda$，闭环系统的动力学方程为

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}} + K_{D\lambda}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{L}_f\boldsymbol{K}_{P\lambda}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{L}_f\boldsymbol{K}_{P\lambda}\boldsymbol{\lambda}_d$$

表明在存在不确定矩阵 $\boldsymbol{L}_f$ 情况下，通过适当选取增益 $K_{D\lambda}$ 和 $\boldsymbol{K}_{P\lambda}$，也可以保证平衡状态 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_d$ 具有指数渐近稳定性。

### 7.4.2 基于无源性的方法

基于无源性的方法利用了操作手动力学模型的无源特性，其对于有约束的动力学模型式（7.2）也是成立的。很容易看出对能在关节空间保证矩阵 $\dot{H}(q)-2C(q,\dot{q})$ 的反对称性的矩阵 $C(q,\dot{q})$ 的选取，也会使矩阵 $\dot{\Lambda}(q)-2\Gamma(q,\dot{q})$ 为反对称。这是在无源性控制算法基础上的拉格朗日系统基本特性。

**1. 刚性环境**

控制力螺旋 $h_c$ 可以选取为

$$h_c=\Lambda(q)S_v\dot{\nu}_r+\Gamma'(q,\dot{q})\nu_r+(S_v^{\dagger})^T K_\nu(\nu_r-\nu)+\eta(q)+S_f f_\lambda \quad (7.64)$$

式中，$\Gamma'(q,\dot{q})=\Gamma S_v+\Lambda\dot{S}_v$；$K_\nu$ 是合适的对称正定矩阵；$\nu_r$ 和 $f_\lambda$ 是适当设计的控制输入。

把式（7.64）代入式（7.2）中得到

$$\Lambda(q)S_v\dot{s}_\nu+\Gamma'(q,\dot{q})s_\nu+(S_v^{\dagger})^T K_\nu s_\nu+S_f(f_\lambda-\lambda)=0 \quad (7.65)$$

其中 $\dot{s}_\nu=\dot{\nu}_r-\dot{\nu}$ 和 $s_\nu=\nu_r-\nu$，表明闭环系统仍保留非线性和耦合。

式（7.65）两边都左乘矩阵 $S_v$，可以得到下面的降阶动力学表达式

$$\Lambda_v(q)\dot{s}_\nu+\Gamma_v(q,\dot{q})s_\nu+K_\nu s_\nu=0 \quad (7.66)$$

其中 $\Gamma_v=S_v^T\Gamma(q,\dot{q})S_v+S_v^T\Lambda(q)\dot{S}_v$。可以很容易看出矩阵 $\dot{\Lambda}(q)-2\Gamma(q,\dot{q})$ 的反对称性意味着矩阵 $\dot{\Lambda}_v(q)-2\Gamma_v(q,\dot{q})$ 也是反对称的。

另一方面，将式（7.65）两边都左乘矩阵 $S_f^T\Lambda^{-1}(q)$，可以得到下面的力动态表达式

$$f_\lambda-\lambda=-\Lambda_f(q)S_f^T\cdot\Lambda^{-1}(q)[\Gamma'(q,\dot{q})+(S_v^{\dagger})^T K_\nu]s_\nu \quad (7.67)$$

表明力乘子 $\lambda$ 瞬时地取决于控制输入 $f_\lambda$，但也在速度控制子空间取决于误差 $s_\nu$。

按以下选取，可以保证降阶系统（7.66）的渐近稳定性

$$\dot{\nu}_r=\dot{\nu}_d+\alpha\Delta\nu \quad (7.68)$$

$$\nu_r=\nu_d+\alpha\Delta x_\nu \quad (7.69)$$

式中，$\alpha$ 是正增益；$\dot{\nu}_d$ 和 $\nu_d$ 分别是期望加速度和速度；$\Delta\nu=\nu_d-\nu$，以及 $\Delta x_\nu=\int_0^t\Delta\nu(\tau)\mathrm{d}\tau$。

稳定性判据基于正定李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}s_\nu^T\Lambda_v(q)s_\nu+\alpha\Delta x_\nu^T K_\nu\Delta x_\nu$$

沿着式（7.66）的轨迹，其时间导数为

$$\dot{V}=-\Delta\nu^T K_\nu\Delta\nu-\alpha^2\Delta x_\nu^T K_\nu\Delta x_\nu$$

是一个半负定函数。因此，渐近地 $\Delta\nu=0$、$\Delta x_\nu=0$ 和 $s_\nu=0$。所以，保证了对期望速度 $\nu_d(t)$ 的跟踪。而且，式（7.67）的右侧保持有界并逐渐为零。所以，按照式（7.53）、式（7.54）或式（7.55）的选取，通过像分解加速度方法中那样设定 $f_\lambda$，就可以保证对期望力 $\lambda_d(t)$ 的跟踪。

注意，假如按照式（7.30）和式（7.40）来计算矩阵 $S_f$ 和 $S_v$，并且在式（7.68）和式（7.69）中使用向量 $\dot{\nu}_d=\ddot{r}_d$、$\nu_d=\dot{r}_d$ 和 $\Delta x_\nu=r_d-r$，如果式（7.38）中的向量 $r$ 指定为期望位置 $r_d(t)$，可以得到位置控制。

**2. 柔顺环境**

控制力螺旋 $h_c$ 可以选取为

$$h_c=\Lambda(q)\dot{v}_r+\Gamma(q,\dot{q})v_r+K_S(v_r-v_e)+h_e+\eta(q) \quad (7.70)$$

式中，$K_S$ 是合适的对称正定矩阵，而 $v_r$ 及其时间导数 $\dot{v}_r$ 则选取为

$$v_r=v_d+\alpha\Delta x$$

$$\dot{v}_r=\dot{v}_d+\alpha\Delta v$$

式中，$\alpha$ 是正增益；$v_d$ 及其时间导数 $\dot{v}_d$ 是适当地设计的控制输入；$\Delta v=v_d-v_e$，并且 $\Delta x=\int_0^t\Delta v\mathrm{d}\tau$。

把式（7.70）代入式（7.2）中得到

$$\Lambda(q)\dot{s}+\Gamma(q,\dot{q})s+K_S s=0 \quad (7.71)$$

其中 $\dot{s}=\dot{v}_r-\dot{v}_e$ 和 $s=v_r-v_e$。

通过以下设定，可以保证系统（7.71）的渐近稳定性：

$$v_d=S_v\nu_d+C'S_f\dot{\lambda}_d$$

式中，$\nu_d(t)$ 是期望速度轨迹；$\lambda_d(t)$ 是期望力轨迹。稳定性判据基于正定李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}s^T\Lambda(q)s+\alpha\Delta x^T K_S\Delta x$$

沿着式（7.71）的轨迹，其时间导数为，

$$\dot{V}=-\Delta v^T K_S\Delta v-a^2\Delta x^T K_S\Delta x$$

是一个负定函数。因此，渐近地 $\Delta v=0$ 和 $\Delta x=0$。在接触几何和刚度不变的情况下，下面的等式成立

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}_v(\boldsymbol{\nu}_d - \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_d - \dot{\boldsymbol{\lambda}})$$

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{S}_v\int_0^t(\boldsymbol{\nu}_d - \boldsymbol{\nu})\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f(\boldsymbol{\lambda}_d - \boldsymbol{\lambda})$$

表明属于互反子空间的速度和力跟踪误差，都渐近地收敛到零。

### 7.4.3 分解速度方法

分解加速度方法以及基于无源性的方法都需要改造现有工业机器人控制器。像阻抗控制那样，如果接触足够柔顺，运动控制的机器人闭环动态可以由对应于速度分解控制的式（7.26）近似。

按照末端执行器扭矢分解（7.57），要实现力和速度控制，控制输入 $\boldsymbol{v}_r$可以选取为

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{S}_v\boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{f}_\lambda \tag{7.72}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{\nu}_d(t) + \boldsymbol{K}_{I\nu}\int_0^t[\boldsymbol{\nu}_d(\tau) - \boldsymbol{\nu}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{7.73}$$

以及

$$\boldsymbol{f}_\lambda = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t) + \boldsymbol{K}_{P\lambda}[\boldsymbol{\lambda}_d(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)] \tag{7.74}$$

式中，$\boldsymbol{K}_{I\nu}$和 $\boldsymbol{K}_{P\lambda}$是合适的对称正定矩阵增益。速度控制和力控制子空间之间的解耦，以及闭环系统的指数渐近稳定性可以像分解加速度方法中一样证明。而且，由于力误差具有二阶动态，可以在式（7.74）上增加一个积分作用来提高扰动抑制能力，即

$$\boldsymbol{f}_\lambda = \dot{\boldsymbol{\lambda}}_d(t) + \boldsymbol{K}_{P\lambda}[\boldsymbol{\lambda}_d(t) - \boldsymbol{\lambda}(t)] + \boldsymbol{K}_{I\lambda}\int_0^t[\boldsymbol{\lambda}_d(\tau) - \boldsymbol{\lambda}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{7.75}$$

并且如果矩阵 $\boldsymbol{K}_{P\lambda}$和 $\boldsymbol{K}_{I\lambda}$是对称正定的，可以保证指数渐近稳定性。

与分解加速度方法中一样，如果在式（7.72）中使用环境刚度矩阵的估计 $\hat{\boldsymbol{C}}$，对于式（7.74）和式（7.75）仍然还能保证 $\boldsymbol{\lambda}$ 指数收敛到常量 $\boldsymbol{\lambda}_d$。

在有些应用中，除了刚度矩阵，环境几何也是不确定的。在这些情况中，可以不使用选择矩阵 $\boldsymbol{S}_f$和 $\boldsymbol{S}_v$把力控制子空间从速度控制子空间中分离出来，就能实现类似式（7.72）的力/运动控制律。使用完整速度反馈，运动控制律可以设定为式（7.73）。同样，使用完整的力和运动反馈，力控制律可以设定为式（7.75）。也就是说，在六维（6-D）空间的所有方向上都既施加了运动控制又施加了力控制。所得到的控制，称为带运动前馈的力控制或力/位置并行控制。由于存在力误差的积分作用，保证了力控制相对位置控制的主导地位。进而，以沿有约束作业方向的位置误差为代价保证了力的调节。

## 7.5 结论与扩展阅读

本章从一个统一的角度概述了力控制的主要方法。但是，还是有许多没有考虑到的方面，在处理交互的机器人作业时必须把它们仔细地考虑进去。力控制的两种主要模式（阻抗控制和力/运动混合控制）是基于几个简化假设的，它们在实际执行中仅仅部分地满足。事实上，力控制的机器人系统的性能取决于同变化的环境之间的相互作用，这种变化的环境是非常难以建模和正确辨识的。不仅在定量上而且在定性上，一般的接触状况远不是可以完全预测的：接触构型可能突然地改变，或者是不同于预期的类型。因此，用于评价一个控制系统的标准性能指标，比如稳定性、带宽、精度和鲁棒性，就不能像机器人运动控制那样只考虑机器人系统来定义，而必须一直参考当时特别的接触状况。而且，对所有这些不同状况进行分类也是不容易的，尤其是在动态环境情况下和涉及并行施加的多个接触的作业任务。

由于力控制问题固有的复杂性，在过去的三十年中有大量关于这个主题的研究论文发表。参考文献［7.20］提供了对第一个十年的发展现状的描述，而第二个十年的进展则在参考文献［7.21］和参考文献［7.22］中作了概述。最近，出版了两部关于力控制的专著参考文献［7.23，24］。在下文中提供了参考文献列表，本章所给出推导的更多细节以及这里没有覆盖到的主题都能在里面找到。

### 7.5.1 间接力控制

用于关节坐标系下的力控制的广义弹簧和阻尼的概念最初是在参考文献［7.3］中提出的，并在参考文献［7.10］中讨论了实现问题。参考文献［7.9］则提出了笛卡儿坐标系下的刚性控制。参考文献［7.25］中讨论了成功进行刚性零件装配的基于远中心柔顺的装置。参考文献［7.7］提出了机械阻抗模型的最初想法，用于控制操作手和环境之间的相互作用，并在参考文献［7.8］中给出了类似的公式。参考文献［7.26］分析了阻抗控制的稳定性，并在参考文献［7.27］中考虑了与刚性环境的相互作用问题。

为克服机器人操作手动态参数的不确定性，提出

了自适应阻抗控制算法[7.28,29]，而在参考文献［7.30］中则给出了鲁棒控制方案。阻抗控制还曾用于力/运动混合控制框架中[7.31]。

参考文献［7.32］是一个关于六自由度（空间的）刚度建模的参考工作，而在参考文献［7.33-35］中则详细地分析了空间柔顺的特性；参考文献［7.36］给出一个六自由度可变柔顺手腕，同时参考文献［7.37，38］给出一些关于构建为特定作业优化的可编程柔顺的研究。参考文献［7.39］介绍了利用旋转矩阵导出空间柔顺的基于能的方法；基于对末端执行器姿态的不同表示形式，包括单位四元组在内，各种六自由度阻抗控制方案在参考文献［7.40］中都能找到。在参考文献［7.41］中基于四元组的公式被推广到非对角分块刚度矩阵的情况。在无源性框架下对空间阻抗控制的一个严密的处理可见于参考文献［7.42］。

### 7.5.2 作业规范

参考文献［7.11］中介绍了自然和人为约束以及柔顺坐标系的概念。在作业坐标系形式体系下，参考文献［7.12，43］系统地发展了这些想法。参考文献［7.44，45］讨论了关于广义力和速度方向的互反性的理论问题，同时在参考文献［7.46］中论述了机器人学中广义逆的计算中的不变性。参考文献［7.47］中考虑了部分约束作业的问题，建立了半正定刚度和柔顺矩阵模型。在参考文献［7.48，49］中考虑了几何不确定性的估计问题，以及基于约束的作业规范与实时作业执行控制的连接问题。这个方法在参考文献［7.50］中得到推广，提出了一种用于指定复杂作业的基于约束的系统方法。

### 7.5.3 力/运动混合控制

关于力控制的早期研究可见于参考文献［7.10］。基于自然和人为约束作业的公式表示[7.11]，参考文献［7.13］介绍了最初的力/位置混合控制的概念。在参考文献［7.17］中给出了对操作手动态模型的显示包含，而在参考文献［7.51］中开发了一种对与动态环境相互作用建模的系统方法。采用逆动力学控制器的有约束公式表示在笛卡儿空间[7.14,52]以及在关节空间[7.15]进行了论述。与基于线性化方程的控制器一起，在参考文献［7.16］中也使用了有约束的方法。在参考文献［7.45］中所指出的不变性问题在其他的论文[7.44,53]中被正确地处理了。在参考文献［7.18，54，55］中针对自适应控制和在参考文献［7.56］中针对鲁棒控制，实现了从无约束运动控制到有约束情况下基于模型的方案的变换。

由于对于力误差施加积分作用，力控制相对运动控制占主导地位。基于这样的观念，为处理环境几何不确定性设计的方法有采用前馈运动方案的力控制[7.2]和并行力/位置控制[7.19]。在参考文献［7.57］中开发了一个并行力/位置校准器。积分作用来消除稳态力误差是传统的用法；其稳定性在参考文献［7.57］中得到证明，同时参考文献［7.59，60］对关于力测量时延的鲁棒性进行了研究。

在与环境接触过程中力控制可能引起不稳定表现已经被普遍地意识到了。在参考文献［7.61］中介绍了解释这个现象的动态模型，而实验研究可见于参考文献［7.62］和［7.63］。此外，控制方案通常是在操作手末端执行器正在与环境接触并且这个接触不会失去的假设下得到的。冲击现象可能会出现并应该得到仔细的考虑，而且对控制方案的整体分析也是需要的，包括从非接触到接触状况的转变，反之亦然，可参见例子[7.64-66]。

## 参 考 文 献


7.1 T.L. De Fazio, D.S. Seltzer, D.E. Whitney: The instrumented remote center of compliance, Ind. Robot **11**(4), 238–242 (1984)

7.2 J. De Schutter, H. Van Brussel: Compliant robot motion II. A control approach based on external control loops, Int. J. Robot. Res. **7**(4), 18–33 (1988)

7.3 I. Nevins, D.E. Whitney: The force vector assembler concept, First CISM-IFToMM Symp. Theory Pract. Robot. Manip. (Udine 1973)

7.4 M.T. Mason, J.K. Salisbury: *Robot Hands and Mechanics of Manipulation* (MIT Press, Cambridge 1985)

7.5 J.Y.S. Luh, W.D. Fisher, R.P.C. Paul: Joint torque control by direct feedback for industrial robots, IEEE Trans. Autom. Contr. **28**, 153–161 (1983)

7.6 G. Hirzinger, N. Sporer, A. Albu-Shäffer, M. Hähnle, R. Krenn, A. Pascucci, R. Schedl: DLR's torque-controlled light weight robot III – are we reaching the technological limits now?, IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (Washington 2002) pp. 1710–1716

7.7 N. Hogan: Impedance control: an approach to manipulation: parts I–III, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **107**, 1–24 (1985)

7.8 H. Kazerooni, T.B. Sheridan, P.K. Houpt: Robust compliant motion for manipulators. Part I: the fundamental concepts of compliant motion, IEEE J. Robot. Autom. **2**, 83–92 (1986)

7.9 J.K. Salisbury: Active stiffness control of a manipulator in Cartesian coordinates, 19th IEEE Conf. Decis. Contr. (Albuquerque, 1980) pp. 95–100

7.10 D.E. Whitney: Force feedback control of manipulator fine motions, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **99**, 91–97 (1977)

7.11 M.T. Mason: Compliance and force control for computer controlled manipulators, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **11**, 418–432 (1981)

7.12 J. De Schutter, H. Van Brussel: Compliant robot motion I. A formalism for specifying compliant motion tasks, Int. J. Robot. Res. **7**(4), 3–17 (1988)

7.13 M.H. Raibert, J.J. Craig: Hybrid position/force control of manipulators, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **103**, 126–133 (1981)

7.14 T. Yoshikawa: Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators – description of hand constraints and calculation of joint driving force, IEEE J. Robot. Autom. **3**, 386–392 (1987)

7.15 N.H. McClamroch, D. Wang: Feedback stabilization and tracking of constrained robots, IEEE Trans. Autom. Contr. **33**, 419–426 (1988)

7.16 J.K. Mills, A.A. Goldenberg: Force and position control of manipulators during constrained motion tasks, IEEE Trans. Robot. Autom. **5**, 30–46 (1989)

7.17 O. Khatib: A unified approach for motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation, IEEE J. Robot. Autom. **3**, 43–53 (1987)

7.18 L. Villani, C. Canudas de Wit, B. Brogliato: An exponentially stable adaptive control for force and position tracking of robot manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **44**, 798–802 (1999)

7.19 S. Chiaverini, L. Sciavicco: The parallel approach to force/position control of robotic manipulators, IEEE Trans. Robot. Autom. **9**, 361–373 (1993)

7.20 D.E. Whitney: Historical perspective and state of the art in robot force control, Int. J. Robot. Res. **6**(1), 3–14 (1987)

7.21 M. Vukobratović, Y. Nakamura: Force and contact control in robotic systems., Tutorial IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (Atlanta 1993)

7.22 J. De Schutter, H. Bruyninckx, W.H. Zhu, M.W. Spong: Force control: a bird's eye view. In: *Control Problems in Robotics and Automation*, ed. by K.P. Valavanis, B. Siciliano (Springer, Berlin, Heidelberg 1998) pp. 1–17

7.23 D.M. Gorinevski, A.M. Formalsky, A.Yu. Schneider: *Force Control of Robotics Systems* (CRC Press, Boca Raton 1997)

7.24 B. Siciliano, L. Villani: *Robot Force Control* (Kluwer Academic Publishers, Boston 1999)

7.25 D.E. Whitney: Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **104**, 65–77 (1982)

7.26 N. Hogan: On the stability of manipulators performing contact tasks, IEEE J. Robot. Autom. **4**, 677–686 (1988)

7.27 H. Kazerooni: Contact instability of the direct drive robot when constrained by a rigid environment, IEEE Trans. Autom. Contr. **35**, 710–714 (1990)

7.28 R. Kelly, R. Carelli, M. Amestegui, R. Ortega: Adaptive impedance control of robot manipulators, IASTED Int. J. Robot. Autom. **4**(3), 134–141 (1989)

7.29 R. Colbaugh, H. Seraji, K. Glass: Direct adaptive impedance control of robot manipulators, J. Robot. Syst. **10**, 217–248 (1993)

7.30 Z. Lu, A.A. Goldenberg: Robust impedance control and force regulation: theory and experiments, Int. J. Robot. Res. **14**, 225–254 (1995)

7.31 R.J. Anderson, M.W. Spong: Hybrid impedance control of robotic manipulators, IEEE J. Robot. Autom. **4**, 549–556 (1988)

7.32 J. Lončarić: Normal forms of stiffness and compliance matrices, IEEE J. Robot. Autom. **3**, 567–572 (1987)

7.33 T. Patterson, H. Lipkin: Structure of robot compliance, ASME J. Mech. Design **115**, 576–580 (1993)

7.34 E.D. Fasse, P.C. Breedveld: Modelling of elastically coupled bodies: part I – General theory and geometric potential function method, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **120**, 496–500 (1998)

7.35 E.D. Fasse, P.C. Breedveld: Modelling of elastically coupled bodies: part II – Exponential and generalized coordinate method, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. **120**, 501–506 (1998)

7.36 R.L. Hollis, S.E. Salcudean, A.P. Allan: A six-degree-of-freedom magnetically levitated variable compliance fine-motion wrist: design, modeling and control, IEEE Trans. Robot. Autom. **7**, 320–333 (1991)

7.37 M.A. Peshkin: Programmed compliance for error corrective assembly, IEEE Trans. Robot. Autom. **6**, 473–482 (1990)

7.38 J.M. Shimmels, M.A. Peshkin: Admittance matrix design for force-guided assembly, IEEE Trans. Robot. Autom. **8**, 213–227 (1992)

7.39 E.D. Fasse, J.F. Broenink: A spatial impedance controller for robotic manipulation, IEEE Trans. Robot. Autom. **13**, 546–556 (1997)

7.40 F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, L. Villani: Six-DOF impedance control based on angle/axis representations, IEEE Trans. Robot. Autom. **15**, 289–300 (1999)

7.41 F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, L. Villani: Robot impedance control with nondiagonal stiffness, IEEE Trans. Autom. Contr. **44**, 1943–1946 (1999)

7.42 S. Stramigioli: *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems – A Coordinate Free Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences (Springer, London 2001)

7.43 H. Bruyninckx, J. De Schutter: Specification of Force-controlled actions in the "task frame formalism" – a synthesis, IEEE Trans. Robot. Autom. **12**, 581–589 (1996)

7.44 H. Lipkin, J. Duffy: Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator, ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. **110**, 138–144 (1988)

7.45 J. Duffy: The fallacy of modern hybrid control theory that is based on 'orthogonal complements' of twist and wrench spaces, J. Robot. Syst. **7**, 139–144 (1990)

7.46 K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento: A theory of generalized inverses applied to robotics, Int. J. Robot. Res. **12**, 1–19 (1993)

7.47 T. Patterson, H. Lipkin: Duality of constrained elastic manipulation, IEEE Conf. Robot. Autom. (Sacramento 1991) pp. 2820–2825

7.48 J. De Schutter, H. Bruyninckx, S. Dutré, J. De Geeter, J. Katupitiya, S. Demey, T. Lefebvre: Estimation first-order geometric parameters and monitoring contact transitions during force-controlled compliant motions, Int. J. Robot. Res. **18**(12), 1161–1184 (1999)

7.49 T. Lefebvre, H. Bruyninckx, J. De Schutter: Polyedral contact formation identification for auntonomous compliant motion, IEEE Trans. Robot. Autom. **19**, 26–41 (2007)

7.50 J. De Schutter, T. De Laet, J. Rutgeerts, W. Decré, R. Smits, E. Aerbeliën, K. Claes, H. Bruyninckx: Constraint-based task specification and estimation for sensor-based robot systems in the presence of geometric uncertainty, Int. J. Robot. Res. **26**(5), 433–455 (2007)

7.51 A. De Luca, C. Manes: Modeling robots in contact with a dynamic environment, IEEE Trans. Robot. Autom. **10**, 542–548 (1994)

7.52 T. Yoshikawa, T. Sugie, N. Tanaka: Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators – controller design and experiment, IEEE J. Robot. Autom. **4**, 699–705 (1988)

7.53 J. De Schutter, D. Torfs, H. Bruyninckx, S. Dutré: Invariant hybrid force/position control of a velocity controlled robot with compliant end effector using modal decoupling, Int. J. Robot. Res. **16**(3), 340–356 (1997)

7.54 R. Lozano, B. Brogliato: Adaptive hybrid force-position control for redundant manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **37**, 1501–1505 (1992)

7.55 L.L. Whitcomb, S. Arimoto, T. Naniwa, F. Ozaki: Adaptive model-based hybrid control if geometrically constrained robots, IEEE Trans. Robot. Autom. **13**, 105–116 (1997)

7.56 B. Yao, S.P. Chan, D. Wang: Unified formulation of variable structure control schemes for robot manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **39**, 371–376 (1992)

7.57 S. Chiaverini, B. Siciliano, L. Villani: Force/position regulation of compliant robot manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **39**, 647–652 (1994)

7.58 J.T.-Y. Wen, S. Murphy: Stability analysis of position and force control for robot arms, IEEE Trans. Autom. Contr. **36**, 365–371 (1991)

7.59 R. Volpe, P. Khosla: A theoretical and experimental investigation of explicit force control strategies for manipulators, IEEE Trans. Autom. Contr. **38**, 1634–1650 (1993)

7.60 L.S. Wilfinger, J.T. Wen, S.H. Murphy: Integral force control with robustness enhancement, IEEE Contr. Syst. Mag. **14**(1), 31–40 (1994)

7.61 S.D. Eppinger, W.P. Seering: Introduction to dynamic models for robot force control, IEEE Contr. Syst. Mag. **7**(2), 48–52 (1987)

7.62 C.H. An, J.M. Hollerbach: The role of dynamic models in Cartesian force control of manipulators, Int. J. Robot. Res. **8**(4), 51–72 (1989)

7.63 R. Volpe, P. Khosla: A theoretical and experimental investigation of impact control for manipulators, Int. J. Robot. Res. **12**, 351–365 (1993)

7.64 J.K. Mills, D.M. Lokhorst: Control of robotic manipulators during general task execution: a discontinuous control approach, Int. J. Robot. Res. **12**, 146–163 (1993)

7.65 T.-J. Tarn, Y. Wu, N. Xi, A. Isidori: Force regulation and contact transition control, IEEE Contr. Syst. Mag. **16**(1), 32–40 (1996)

7.66 B. Brogliato, S. Niculescu, P. Orhant: On the control of finite dimensional mechanical systems with unilateral constraints, IEEE Trans. Autom. Contr. **42**, 200–215 (1997)

# 第8章 机器人体系结构与程序设计

David Kortenkamp, Reid Simmons

刘海波 沈晶 译

机器人软件系统日趋复杂，这种复杂性主要源自种类繁多的传感器和执行器的实时控制的需求，同时还要面对不可忽视的不确定性因素和各种噪声。机器人系统需要在不可预知的情境下完成任务，既要监测这些情境的变化，又要作出适当的响应。所有这些任务都需要并发地、异步地执行，这无疑会大大增加系统的复杂性。

采用精心构思的体系结构，再加上支持该体系结构的编程工具，则有助于解决这些复杂性问题。目前，还没有哪一种体系结构是万能的，尺有所短寸有所长，每种体系结构都有着不同的适用领域。针对特定应用进行体系结构选型时，要深入了解各种体系结构的优缺点，这一点非常重要。

本章详述建立机器人体系结构的各种方法。首先介绍基本术语及相关概念（包括机器人体系结构的发展历程），然后深入探讨目前的体系结构中常用的几种组件，包括行为控制（详见第38章）、执行、任务规划（详见第9章）以及这些组件互连的常用技术。作为重点，支持这些体系结构的编程工具和开发环境贯穿全文。接下来给出一个体系结构实例，最后进行扼要的总结，并介绍一些可供扩展阅读的文献资料。



## 8.1 概述

机器人体系结构这一术语常包括两层含义，既相联系又有区别。一是“结构”之意，指一个系统如何划分为子系统以及这些子系统之间如何相互作用。机器人系统的结构常用框图进行形式化表示，或者更正式一些采用统一建模语言（UML）技术来描述[8.1]。二是“风格”之意，指支撑特定系统的计算模式。譬如，有的机器人系统采用发布/订阅进行消息传递的通信模式，而有的则采用更加同步的客户机/服务器模式。

所有机器人系统都要采用某种体系结构和计算模式，但是很难精确地说现有的系统具体用的是哪一种。实际上，就算是单个的机器人系统，往往也揉合了若干种计算模式。这是因为，系统实现时可能无法清晰界定子系统的边界，从而很难明确地说它确属哪种结构，同样，体系结构又与特定领域的实现紧密联系在一起，其设计风格上也没有清晰的界线。

上述情况很令人遗憾。因为一个精心设计的、清晰的体系结构特别有利于机器人系统的规格说明、执行和验证。一般情况下，机器人的体系结构可以对机器人系统的设计和实现施加恰当的（不能过于严格）约束条件，从而有助于加速开发进程。例如，将行为组件划分成模块单元，便有助于增加其可理解性和可重用性，且便于单元测试与验证。

### 8.1.1 机器人体系结构的特殊需求

从某种意义来讲，机器人体系结构设计可以被看成是软件工程。但机器人体系结构又因机器人系统的特殊需求而有别于其他软件体系结构。从体系结构的

视角看，这些需求中最主要的是机器人系统要与不确定的、又经常是动态的环境进行异步的、实时的交互。此外，很多机器人系统还需要在各种时间尺度上做出响应，从毫秒级反馈控制到分钟级、小时级的复杂任务处理。

为了满足上述需求，很多机器人的体系结构都包含了实时行动、执行器及传感器控制、并发支持、异常情况检测与响应、不确定性处理、高级（符号级）规划与低级（数值级）控制集成等多种能力。

尽管同样的能力可以采用不同的结构模式来实现，但采用某种特定的模式可能会好于其他模式。举个例子，现在来看看机器人系统的通信模式能如何影响其可靠性。很多机器人系统都被设计成消息传递的异步通信过程。客户机/服务器是一种常用的通信模式，在该模式中，来自客户机的每个消息请求都与来自服务器的响应相对应。发布/订阅是另一种通信模式，其中消息都是被异步地广播出去的，所有此前提出过对这些消息感兴趣的通信模块都能收到消息的副本。采用客户机/服务器模式进行消息传递，通信模块发送一个请求后就进入阻塞状态，以等待响应。如果所期待的响应望穿秋水也等不来（如服务器模块崩溃了），则会发生死锁。即使请求模块不阻塞，其控制流依然会期待着响应。如果响应永不到达或者其他请求的响应不期而至，则会发生无法预料的结果。相反，采用发布/订阅模式的系统则更可靠一些，因为消息都已被假定为异步到达的，控制流不会再假设按哪种特定顺序处理消息，所以，消息丢失或者乱序产生的影响就比较小。

### 8.1.2 模块化与层次化

机器人体系结构的一个重要作用就是将系统分解成更简单的、在很大程度上比较独立的模块。正如前面讲过的，机器人系统经常被设计成通信过程，其通信接口很少且带宽相对较低。如此设计能使通信模块异步地处理与环境的交互过程，且最小化与其他模块的交互。显然，这样可以降低整个系统的复杂性，增加整个系统的可靠性。

通常，系统的分解是分层次的——一些模块组件建立在另一些模块组件之上。显式地支持此类分层分解的体系结构通过抽象技术来降低系统的复杂度。然而，尽管机器人系统的分层分解已是众望所归，但是究竟沿着哪一个维度进行分解还是众说纷纭、百花齐放。有些体系结构沿着时间维进行分解——每层操作的响应频率都比其下一层低一个数量级[8.2]。而有些体系结构则基于任务抽象进行分层——每层的任务通过调用其下一层的一组任务来完成[8.3-6]。在某些情况下，基于空间抽象进行分解会更好，比如既要处理局部导航又要处理全局导航的时候[8.7]。最主要的一点是，不同的应用场合需要用不同的分解方式，而采用的结构模式则要与之相适应。

### 8.1.3 软件开发工具

采用明确定义的结构模式来设计系统其好处是很明显的，同时，许多结构模式也有相关的软件工具为实现这种模式提供有力的支持。这些工具以多种形式存在，如函数库、专用编程语言或图形编辑器。这些工具屏蔽了概念上的复杂性，对结构模式的约束更清晰。

例如，进程间通信库（如通用对象请求代理体系结构 CORBA）[8.8]和进程间通信包（IPC）[8.9]，使得消息传递模式（如客户机/服务器和发布/订阅模式）实现起来非常轻松。诸如 Subsumption[8.10]和 Skills[8.11]等语言则有助于开发数据驱动的、实时行为，而 ESL（执行支持语言）[8.12]和 PLEXIL（规划执行交换语言）[8.13]等语言则为可靠实现高级任务提供支持。对于图形编辑器，如 ControlShell[8.14]、Labview[8.15]和 ORCCAD（开放机器人控制器计算机辅助设计）[8.6]等，则为系统集成提供了约束方式，并可自动生成支持该结构模式的代码。

无论哪种情况，这些工具都可以使特定模式的软件开发变得很容易。更重要的是，它们可以确保不（至少是很难）违背结构模式的约束条件。于是，用这些工具开发的系统更易于实现、理解、调试、验证和维护。同时这些系统也更可靠，因为这些软件工具为控制结构的一般需求提供了良好的设计能力，如消息传递、与执行器和传感器的接口以及并发任务处理等。

## 8.2 发展历程

机器人体系结构和程序设计始于20世纪60年代末斯坦福大学的 Shakey 机器人[8.16]（如图 8.1 所示）。Shakey 装配有 1 台摄像机、1 台测距仪和碰撞检测传感器，并通过无线和视频链路连接到 DEC PDP10 和 PDP-15 计算机。Shakey 的体系结构被分解为 3 个功能单元：感知、规划和执行[8.17]。感知系统将摄像机采集的图像转换为内部环境模型。规划器接受根据内部环境模型和目标生成一个可以达到目标的规划（即动作序列）。执行器接收规划结果并给机器

人发出动作指令。上述方法被称为感知-规划-动作(SPA)范型(如图8.2所示)。这种体系结构的主要特点是：感知数据被转换为一个环境模型，该模型为规划器所用，规划执行时不再直接与传感器打交道。其后很多年，机器人的控制结构和程序设计几乎无一例外地都采用了SPA范型。

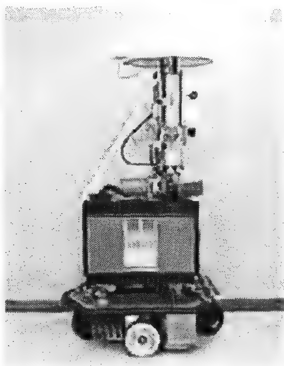


图8.1 Shakey(蒙sri.com惠允)

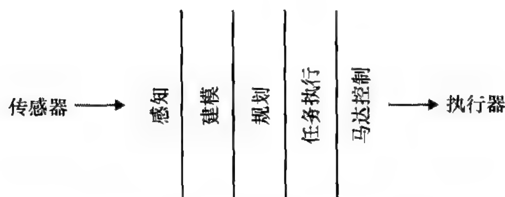



图8.2 感知-规划-动作(SPA)范型(引自文献[8.3]，许可使用)

### 8.2.1 包容结构

20世纪80年代初，SPA范型的问题逐渐暴露出来。第一，在真实环境中进行规划耗时太长，机器人此时处于阻塞状态等待规划结果。第二，也是更重要的一点，规划执行时不再处理感知信息，这在动态环境中是很危险的。于是一些新型的机器人控制结构范型开始崭露头角，其中包括反应型规划，可以快速生成规划结果，且规划过程更直接地依赖于感知信息而不是内部模型[8.4,18]。最有影响力的一项成果是Brooks提出的包容结构[8.3]。包容结构由相互作用的有限状态机分层构成——每层都是把传感器和执行器直接连接起来(如图8.3所示)。这些有限状态机被称为行为(有人因此将包容结构称为基于行为的机器人或者行为机器人技术[8.19]，参见第38章)。因为任一时刻都能有多种行为被激活，所以包容结构设计了仲裁机制，使得高级行为能够抑制低级行为。例如，机器人可以有一种简单地随机游走的行为，这种行为总是处于激活状态，于是机器人总是这儿走走那儿走走。片刻之后，高级行为接收到传感器的输入信息，检测到有障碍物，于是操纵机器人远离障碍物。高级行为也总是处于激活状态。在没有障碍物的环境中，高级行为从不生成信号，但若检测到障碍物，它便抑制低级行为而操纵机器人离开。一旦障碍物消失(高级行为停止发送信号)，低级行为便重新获得控制权。增加行为交互层就可以构建出越来越复杂的机器人。

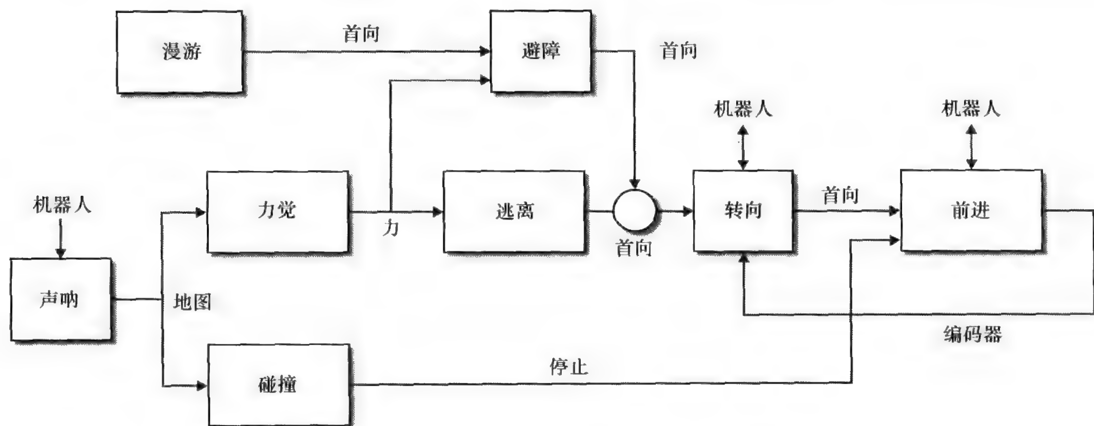



图8.3 包容结构实例(引自参考文献[8.3]，许可使用)

有不少机器人是采用包容方法构建的，且大部分都在MIT[8.20-22]，均相当成功。相比SPA机器人的反应迟钝、动作笨拙，包容机器人则反应灵敏、动作迅捷。它们不会被动态变化的环境所困扰，因为它们持续地感知环境并做出反应。这些机器人能像昆虫或小型啮齿动物一样跑来跑去。除了包容结构，还有另外

几种行为结构，通常都有不同的仲裁方案来融合行为输出结果[8.23,24]。

Arkin 提出的马达-控制图式[8.25]也是一种常见的基于行为的体系结构。在这种生物启发的方法中，马达与知觉图式[8.26]被动态地互连起来。马达图式基于知觉图式生成响应向量，然后用与势场法[8.27]相似的方式组合起来。为了完成更复杂的任务，自主机器人体系结构（AuRA）[8.28,29]中还将基于有限状态接收器（FSA）的导航规划器和规划序列器加入到反应图式中。

然而好景不长，基于行为的机器人不久就暴露出了能力上的局限。它很难把行为组合起来去实现长远目标，它也几乎不可能对机器人的行为进行优化。例如，想造一台能在办公楼里投递信件的基于行为的机器人很容易，只要能进行简单的办公楼漫游，并设计一个搜索房间的行为通过抑制漫游即可进入办公室。但如果用行为结构模式去设计一个系统，能根据当天的邮件进行推理，按照最优顺序进入办公室从而最小化投递时间，则难于上青天。其实，机器人最需要的是将早期体系结构的规划能力与基于行为的体系结构的反应能力紧密结合起来，这便催生了机器人的分层或分级控制结构。

### 8.2.2　分层控制结构

Firby 开发的反应动作包（RAP）系统是向反应与慎思相集成而迈出第一步后所取得的成果之一。在 Firby 的论文[8.30]中，可以看到第一个集成方案——三层结构。其中的中间层即 RAP 系统，是论文的核心内容。Firby 也构思了其他两层的形式和功能，尤其想到要把传统的慎思方法与当时初露端倪的情境推理技术结合起来，可惜未能实现。后来，Firby 将 RAP 与低级的控制层集成到了一起[8.31]。

与此同时，MITRE㊀的 Bonasso 也独立设计出了一种体系结构，底层用 Rex 语言将机器人行为编程为同步回路[8.33]，这些被称为 Rex 机的回路能够确保 Agent 内部状态与所处环境的语义一致性。中间层是采用 GAPPS 语言[8.34]实现的条件序列器，能够不断地激活和抑制 Rex 技能直到机器人完成任务。基于 GAPPS 的序列器很受青睐，因为它综合了众多的传统规划技术[8.35]。这项成果在 3T 结构（因其集成了规划、序列化和实时控制这 3 个控制过程并构成 3 个层级而得名）中登峰造极，已被用在几代机器人上[8.36]。

随后，人们又开发了不少与 3T 结构（如图 8.4 所示）类似的体系结构。ATLANTIS[8.37]便是一例，它将更多的控制功能留给了序列层。在该体系结构中，慎思层必须明确地被序列层调用。Saridis 提出的智能控制结构[8.38]也是一例，它使用 Vxwork 操作系统和 VME 总线，底层是伺服系统，并将上一层的执行算法也集成进来。上一层由一组能对低层子系统（如视觉、手臂运动和导航）进行协调的例程构成，采用 Petri 网转换器（PNT）实现（PNT 是一种调度机制），由与组织层相连接的调度器来激活。组织层是一个用 Boltzmann 神经网络实现的规划器，神经网络主要用来计算满足要求（这些要求是以文本格式输入进来的）的动作序列，然后，调度器通过 PNT 协调器来逐步执行规划结果。

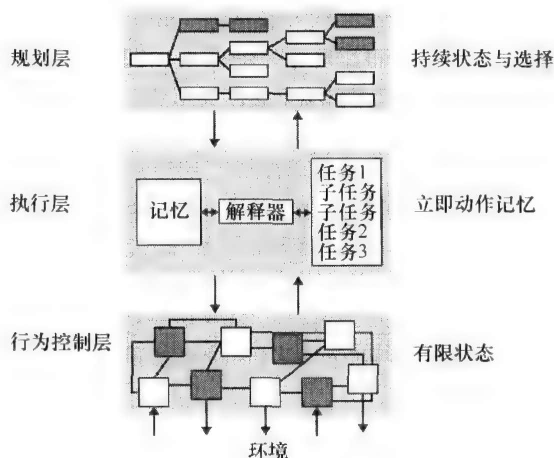



**图 8.4　三层结构原型**

自主系统体系结构 LAAS 是一种每层都有软件工具支持开发的体系结构[8.39]。最底层（功能层）由模块网络构成，这些模块都是由动态参数控制的感知算法，采用 GenoM（模块生成器）语言写成，GenoM 能生成标准模板以便于模块集成。与其他多大数三层结构都不同，LAAS 的执行层相当简单，只有纯粹的反射，而不对任务做任何分解，它只是起到一个桥梁作用——从高层接收任务序列，做出选择和参数化处理后送到功能层。执行层由 Kheops 语言写成，该语言能够自动生成可以被形式化验证的决策网。最上面的决策层由规划器和监督器构成，规划器是用 IxTeT（索引时间表）时序规划器[8.40,41]实现的，监督器是用 PRS（过程推理系统）[8.42,43]实现的。监督器与其

㊀ 译者注：美国的一个非盈利性研发机构。

他类型三层结构的执行层类似，能对任务进行分解、对可互换方法进行选择、对执行进行监测。通过将规划器和监督器集于一层，LAAS 使这二者结合更紧密，在何时重规划、如何重规划方面就有了更大的灵活性。实际上，LAAS 体系结构允许在较高级的抽象层上有多个决策层，如较高级的使命层和较低级的任务层。

遥控 Agent 是飞船自主控制的体系结构[8.44]，它实际上是由 4 层构成，即控制层（也称行为层）、执行层、规划层（或调度层）以及 MIR（模式鉴别与恢复）层，MIR 层包括故障检测与恢复功能。控制层就是传统的飞船实时控制系统。执行层是该体系结构的核心，它能分解、选择和监测任务的执行，能执行故障恢复以及资源管理（适时地启动和关闭设备以节约有限的飞船电力）。规划器（调度器）是一个批处理过程，它根据目标、初始（发射时的）状态和当前计划活动生成规划。这些规划可以是从任务启动到结束之间任一时段。规划中也可以包含“重新调用规划器生成下一阶段规划”的任务。配置管理是遥控 Agent 中的一个重要部分，它可以配置硬件以支持任务，并监测硬件保持在已知的、稳定的状态。配置管理的角色被划分到执行层和 MIR 层两层中，执行层中主要使用反射过程，MIR 层中使用飞船已声明的模块和慎思算法来确定如何重新配置硬件以响应检测到的故障[8.45]。

联合体系结构[8.47]将 3T 模式拓展到多机器人协调领域（见第 40 章）。在该体系结构中，每层不仅与上下层有接口，还与其他机器人的同一层次有接口，如图 8.5 所示。这样一来，分布式控制环可以设计在多个抽象级别上。参考文献［8.48］中的联合体系结构，其规划器使用基于分布式市场的方法进行任务分配。

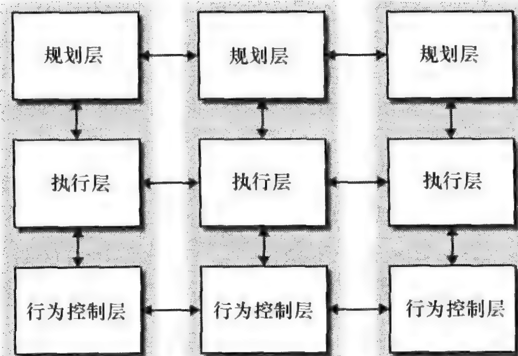



图 8.5 联合多机器人体系结构

文献中还有一些值得注意的多层体系结构。由美国国家标准局（NBS）为美国航空航天局（NASA）开发的 NASA/NBS 标准参考模型（NASREM）[8.2,49]就是早期的遥操作机器人参考模型，如图 8.6 所示，后来被称为实时控制系统（RCS）。它是一个多层模型，每层都采用相同的通用结构，从伺服层到推理层，随着抽象程度的升高，操作频率不断降低。除维护全局环境模型外，NASREM 和 3T 结构一样一开始就提供了所有数据和控制路径。但 NASREM 只是个参考模型，并非具体实现。NASREM 后来的实现基本都是遵从 SPA 方法做的，且主要应用在遥操作机器人（而不是自主机器人）上，但 Blidberg 早期的工作[8.50]是个例外。

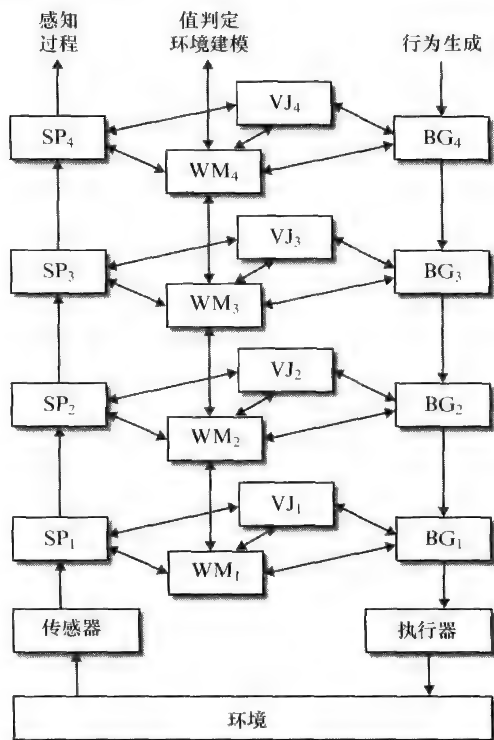



图 8.6 实施控制系统（RCS）参考体系结构
（引自参考文献［8.46］，许可使用）

在机器人三层体系结构争奇斗艳的时候，各种双层体系结构也在悄然绽放。自主机器人双层体系结构（CLARAty）就是被设计成用来支持 NASA 空间机器人（特别是行星漫步者机器人[8.51,52]）的软件可重用的。CLARAty 由一个功能层和一个决策层构成。功能层是一个面向对象算法层，能提供众多到机器人的抽象接口，如马达控制、载体控制、基于传感器的导航和移动操作等。每个对象都提供一

般的（不依赖于硬件的）接口，因此相同的算法可以运行在不同的硬件上。决策层融合了规划和执行能力，与LAAS体系结构一样，可以紧密协调规划和执行，使得为响应动态的偶然事件而连续进行重规划成为可能。

CLARAty的决策层具体说就是个CLEaR（闭环执行与恢复）[8.53]，它将基于修复的规划器CASPER（连续动作调度、规划、执行与重规划）[8.54]和TDL（任务描述语言）[8.55]组合起来。CLEaR为目标驱动的行为和事件驱动的行为提供了一种紧耦合方法。根据执行监测进行高频度的状态与资源更新，然后快速处理、连续重规划的能力，是CLEaR的核心内容。这使得规划器可以处理很多异常情况，这在任务多、资源少、不确定性强的情况下尤为重要。在CLEaR中，规划和执行组件都能处理资源冲突和异常情况，在特定的情况下，采用启发式方法来确定该调用哪个组件。OASIS（机载自主科考系统）[8.56]对CLEaR进行了拓展，将科学数据分析功能也纳入其中，于是，这种体系结构还可以由带有机缘巧合性质的科学目标来驱动，如寻找特殊的岩石或构造。OASIS是以规划器为中心的，在任务调度开始前仅需几秒钟就可以将任务发送到执行组件。

协作智能实时控制体系结构（CIRCA）也是一种双层结构，它关注的是如何确保可靠行为[8.57,58]。它实现了有界反应，这是一种机器人资源不总是那么充足时为保证完成所有任务而采取的响应。CIRCA由实时系统（RTS）和相当独立的人工智能系统（AIS）构成。RTS执行测试动作对（TAP）周期调度，TAP已经根据感知到的环境信息和有条件的响应动作确保了最坏情况下的行为。AIS的职责是创建调度，且确保在实时执行期间不出现灾难性故障。AIS是通过在状态转移图上的规划来做到这一点的，状态转移图中包括动作、外部事件和时间流逝（机器人等待时间太久也会发生不测）造成的状态转移。AIS测试每一个规划（TAP集），看其是否能被实际调度。如果不能，则调换一个规划模型——或者剔除任务（根据目标优先级），或者调整行为参数（如降低机器人速度）。AIS如此往复，直到找到一个可以成功调度的规划为止，然后便将这个新规划在一个原子操作步骤内下载到RTS中。

和CIRCA一样，前面提到过的ORCCAD也是一个确保可靠性的双层体系结构[8.6,59]，不同的是，ORCCAD是通过形式化验证技术来实现这种保证的。机器人任务（低级行为）和机器人过程（高级动作）都是由高级语言定义的，然后再翻译成Esterel语言[8.60]㊀进行逻辑验证，或者翻译成时控Argus语言[8.61]㊁进行时序验证。这些验证方法要做些调整，以适应生存性、安全性以及资源冲突的验证。

## 8.3　体系结构组件

本章以三层结构为原型探讨体系结构组件。图8.4给出了一种典型的三层体系结构。其底层为行为控制层，与传感器和执行器紧密相连。第二层为执行层，负责选择机器人当前行为以完成任务。最高层是任务规划层，负责在资源约束条件下实现机器人的长远目标。以办公室投递机器人为例，行为层负责机器人在房间和走廊中的移动、避障和开门等，执行层协调行为层以完成任务，如离开房间、进入办公室等，任务规划层负责确定最省时间的投递顺序、考虑投递优先级、调度、充电等，并将任务（如退出房间、进入110室）发送到执行层。上述各层需要协同工作并且交换信息。下一节先研究各组件的连接问题，然后逐一探讨三层结构中的各个组件。

### 8.3.1　连接组件

本章探讨过的所有体系结构组件之间都需要通信，包括交换数据和发送指令。组件通信（常称为中间件）模式的选择是机器人体系结构设计者做很多决策时必须考虑的最重要的、约束性最强的问题之一。根据以往的经验，开发机器人体系结构时，很多问题都与组件间的通信有关，且大量的调试时间也花在这里。此外，一旦选定了某种通信机制，再就极难更改，因此初期的决策多少年都不再改变。很多开发者使用他们自己的通信协议，这些协议通常是基于Unix套接字开发的。尽管这样做可以对消息进行定制，但是可靠性、高效性和外部通信包的易用性等优势将难以发挥出来。目前有两种基本的通信方法——客户机/服务器和发布/订阅。

---

㊀ 译者注：Esterel语言是一种用于开发复杂反应系统的同步程序设计语言。

㊁ 译者注：一种用于开发分布式程序的语言。

**1. 客户机/服务器**

在客户机/服务器（也称点对点）通信协议中，组件之间直接对话。远程过程调用（RPC）协议便是一个很好的例子，RPC中一个组件（作为客户机）可以调用另一个组件（作为服务器）的函数和过程。目前很流行的一种形式是通用对象请求代理体系结构（CORBA）。CORBA允许一个组件调用另一个组件实现的对象方法，所有的方法调用都在一个不依赖于编程语言的IDL（接口定义语言）文件中定义，每个组件都使用相同的IDL来生成代码，并与组件一起编译用以处理通信事务。这样做的好处是，当IDL文件改变时，使用该IDL的所有组件可以自动地被重新编译（使用make或类似的代码配置工具）。CORBA对象请求代理（ORB）在很多主流面向对象语言中都可以使用。尽管有免费的ORB可用，但依然有许多商用ORB存在，它们能提供更多的功能和更好的技术支持。CORBA的不足之处是使应用程序额外增加了一些代码。一些竞争者已经在努力解决这个问题，如ICE（Internet通信引擎）开发了自己的IDL文件版本，称作SLICE（ICE规格说明语言）。客户机/服务器协议最大的优点是事先将接口定义得非常清晰，当接口改变时，大家都能知道。另一个优点是在无中心模块又需要分发数据时它允许分布式通信方法。客户机/服务器协议的缺点是通信开销大，尤其在许多组件需要相同信息时。需要指出的是，CORBA和ICE还具有广播机制（在CORBA中称为事件通道或通知服务）。

**2. 发布/订阅**

在发布/订阅（也称广播）协议中，一个组件发布数据，其他任何组件都可以订阅这些数据。典型地，一个中央处理程序在发布者和订阅者之间发送数据。在一个典型的体系结构中，大部分组件既发布信息也订阅其他组件发布的信息。现存多种发布/订阅中间件解决方案，机器人中常用的是RTI公司的DDS（数据分布式服务），以前叫NDDS（网络数据分布式服务）[8.62]。另一种常用的发布/订阅范型是卡内基梅隆大学开发的IPC[8.9]。很多发布/订阅协议都使用XML（扩展标识语言）定义发布的数据，以图通过HTTP传输XML的便利性，这样便允许基于Web的应用程序之间的互操作。发布/订阅协议有一个很大的优点是简单易用且开销低。当不知道有多少组件需要一个数据块时（如多用户接口）发布/订阅协议就特别有用了。再有，组件也不会被陷入到对许多不同来源的信息重复请求的困境之中。发布/订阅协议通常很难调试，因为消息的语法经常隐藏在一个简单的字符串类型中，往往都是到运行时组件尝试解析一个接收到的消息失败时问题才能暴露出来。发布/订阅协议在用于由一个模块向另一个模块发送命令时可读性也不好，命令不是调用显式的方法或函数（含参数），而是通过发布消息的方式发出，消息中包含命令和参数，这些消息由订阅者去解析。最后，发布/订阅协议常用单一的中央服务器给所有订阅者分发消息，存在单点失效和瓶颈问题。

**3. JAUS**

近年来，在国防机器人技术领域浮现出一套标准，不仅对通信协议作了规范，而且对经由通信协议传递的消息的定义也作了规范。JAUS（无人系统联合体系结构）定义了一套可重用的消息与接口，可用在命令自主系统上[8.63-65]。这些可重用的组件降低了将新的硬件组件集成到自主系统中的开销。可重用技术还允许把为一套自主系统开发的组件拿到另一套自主系统上去用。JAUS有两个组件：一个领域模型和一个参考体系结构。领域模型是无人系统功能与信息的表示，包含对系统功能和信息能力的描述。前者包括系统的机动、导航、感知、负载和操作等能力的模型，后者包括系统的内部数据模型，如地图和系统状态。参考体系结构提供一个明确定义的消息集，这些消息引发动作的执行、消息的交换和事件的触发。JAUS系统中发生的每件事情都是由消息触发的，这种策略使得JAUS称为一种基于组件的、消息传递式的体系结构。

JAUS参考体系结构定义了系统的层次（如图8.7所示），层次拓扑将系统定义为实现机器人全部能力所必需的机器人本体、操作控制单元（OCU）和基础结构的集合。系统中的子系统是一些独立的单元（如机器人本体或OCU）。节点定义体系结构中各种处理能力并将JAUS消息路由到组件。组件提供各种执行能力并直接响应命令消息。组件可是传感器（如SICK激光传感器或视觉传感器）、执行器（如操作机构或运动机构）或机载设备（如武器或任务传感器），所谓拓扑（特定系统、子系统、节点和组件的布局）是在系统实现时根据任务需求确定的。

JAUS的内核是一个明确定义的消息集合。JAUS支持的消息类型有：①命令：引起模式改变或启动动作。②查询：用于从组件中请求信息。③告知：响应查询。④事件设置：传递参数以对事件进行设置。⑤事件通知：当时间发生时发送通知。

JAUS有大约30条预定义消息可供机器人控制之用。有控制机器人本体的消息，如“全局向量驱动器消息”执行移动机器人期望全局首向、高度和速度

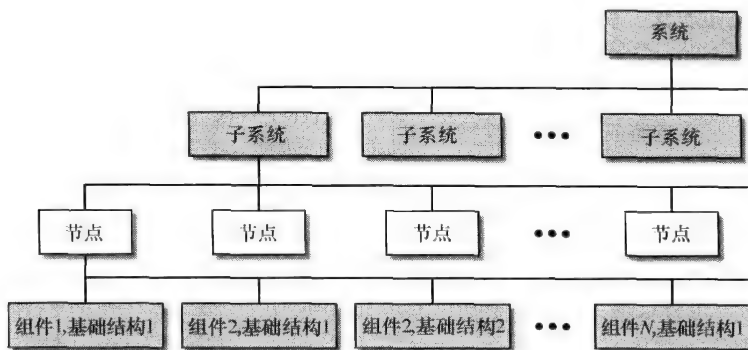



图8.7　JAUS参考体系结构拓扑（引自JAUS参考体系结构文档[8.63]）

的闭环控制。也有传感器消息，如“全局位姿传感器消息”发布机器人本体的全局位置和朝向数据。JAUS中还有操作消息，如“设置关节位置消息”会设置预期的关节位置值，“设置工具点消息”会在末端执行器的坐标系统中设定末端执行器工具点的坐标。

JAUS也有用户自定义消息，由消息头和跟随的特定格式构成，其中包含消息类型、目的地址（如系统、子系统、节点和组件）、优先级等。虽然JAUS主要是点对点的，JAUS消息也可以打上广播标记分发到所有组件。JAUS还为导航和操作定义了坐标系统以确保所有组件能知悉发送给它们的坐标。

## 8.3.2　行为控制

行为控制在机器人体系结构中表示控制的最底级别，它直接连接传感器与执行器。尽管这些行为控制大多都是用C或C++语言手工写成的函数，但人们还是开发了一些行为控制专用语言，包括ALFA[8.66]、行为语言[8.67]和Rex[8.68]。传统的控制理论（如PID函数、Kalman滤波器等）也归于这一级。在如3T这样的体系结构中，行为层像Brooks机一样运行，亦即由少数几个能感知环境并执行机器人动作的行为（也称技能）构成。

### 1. 实例

下面来看一个在办公楼中工作的投递机器人，其行为控制层包含了在楼中移动并执行投递任务所必需的控制功能。假定此机器人已知该楼地图，那么，它可能包含如下行为：①避障移动到一个位置；②避障沿着走廊移动；③找到一扇门；④找到门把手；⑤抓住门把手；⑥拧开门把手；⑦从门通过；⑧确定位置；⑨查看门牌号；⑩通知投递。

上述每个行为都将传感器（视觉、距离感知等）与执行器（轮子马达、操作马达等）紧密联系在一个反射环中。在如包容结构这样的体系结构中，所有行为都在一个分层控制方案中并发运行，其中某些行为会受到抑制。在AuRA[8.29]中，行为由势函数组合而成。其他体系结构[8.24,68]则使用显式的仲裁机制从潜在的冲突行为中进行选择执行。

在如3T[8.36]这样的体系结构中，并不是所有的行为都同时处于活动状态。典型地，只有少数不冲突的行为才能同时处于活动状态（如上例中的行为2和9）。执行层（见8.3.3节）的职责是激活或者抑制行为以完成高级任务并避免两个行为竞争同一资源（如一个执行器）的冲突。

### 2. 情境行为

这些行为有一个重要特点就是情境性，也就是说每个行为仅在其特定的场景中工作。例如，上述的行为②是沿着走廊移动，但此行为仅当机器人身处走廊时才适用。类似地，行为⑤抓住门把手，也仅当机器人处于能抓到门把手的距离范围内时才适用。将机器人放在某一情境时此行为会没有反应，但它能识别出该情境是不适合的，也能看出信号是不对的。

### 3. 失败觉察

对行为的一项关键要求是它们在不工作的时候应该能觉察到，这称为失败觉察[8.69]。例如，实例中的行为⑤（抓住门把手）抓一次失败后就不应该在空气中连续瞎抓，或者更简单地说，不能在撞了南墙后还不回头。早期的包容机器人有一个共性的问题，即行为不知道已经失败而还在继续采取动作，结果自然没有进展。在失败的情况下决策该做什么不是行为层的任务，行为层只需要宣告行为失败、停止活动。

### 4. 实现约束

行为控制层设计的主要目的是让机器人控制能实现包容结构的快速性和反应性。为此，行为控制层的

行为需要遵循包容结构的套路，尤其行为使用的算法要受状态和时间复杂度的约束。在行为控制层应该很少有或者没有搜索过程，很少有迭代运算。行为应该就是简单的传递函数，从传感器或者其他行为输入信号，向执行器或者其他行为输出信号，每秒重复这些动作若干次，这样在面对环境改变时才能表现出反应性。争议较多的是在行为层究竟设置多少个状态为宜。Brooks 几年前有一个非常经典的说法“最好以世界本身作为模型”[8.67]，也就是说，机器人无需维护和查询环境的内部模型，取而代之的是直接感知环境以获取数据。诸如地图、模型等状态在三层体系结构中均包含在高层中而不在行为控制层中。有些例外情况（如维护数据滤波计算的状态）则具体问题具体分析。Gat[8.70]认为行为层保持的任何状态都应该是短暂的、有限的。

## 8.3.3 执行

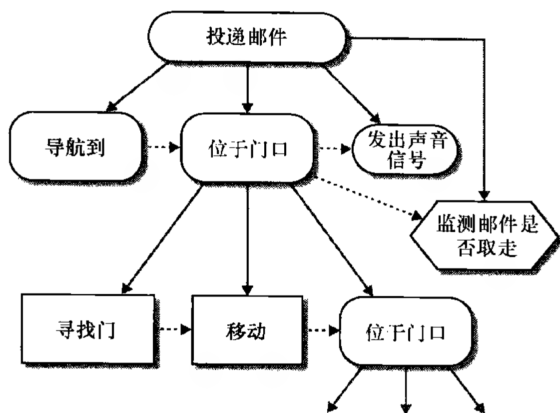
执行层是行为控制层（数值运算）与规划层（符号运算）之间的接口。执行层负责将高级规划翻译成低级行为、在适当的时候调用行为、监测执行并处理异常。有些执行层也分配资源并监测其使用情况，尽管这些任务从功能上大多是该由规划层执行的。

**1. 实例**

继续以办公室投递机器人为例。其高级任务主要是把邮件投递到一个指定的房间，执行层将此任务分解成一个子任务集。它可能使用几何规划器来确定要走过的走廊和要转弯的路口序列，如果沿线有门口，则还会插入一个任务去打开并穿过此门。在最后一段走廊中，执行层还要增加一个查看门牌号的并发任务。最后的子任务是告知屋里的人有信件，同时监测该信件是否被拿走。如果过了一段时间信件未被取走，将触发一个异常以调用一些恢复性动作，可能是再次告知，可能是检查是否走对屋了，也可能是通知规划器稍后重新调度投递任务。

**2. 能力**

上例中描述了很多执行层的能力。一开始，执行层就将高级任务（目标）分解成低级任务（行为），这典型的做法就是以过程的方式来完成。尽管有时执行层也可以使用专门的规划技术，如上例中使用的路线规划器，但被编码在执行器中的知识一般还是直接描述如何完成任务，而不是先描述需要做什么再由执行层自己规划出怎么做。典型的分解是一棵分层的任务树，如图 8.8 所示，任务树的叶节点是行为的参数化调用。




（圆角框为内部节点，矩形为叶子节点，六角形节点为执行监测器，实线箭头是父子节点关系，虚线箭头是时序约束）

**图 8.8 邮件投递任务的分层任务树**

除了将任务分解成子任务，执行层还要在任务之间添加和维护时间约束，通常只在同一层任务之间才加，但也有一些执行层语言允许在任意任务对之间加上时间约束。最常见的约束是串行和并发，但大多数执行层支持更有表现力的约束语言，如一个任务要在另一个任务开始 10s 后开始，或者一个任务要在另一个任务结束时结束。

当任务的时间约束条件满足时，执行层负责派发这些任务。在有些执行层中，任务也可以指定资源，如机器人的马达或者摄像机，这些资源在任务被派发前必须可用。和行为一样，在冲突的任务之间进行仲裁也是一个问题。但在执行层中，这种仲裁要么显式地编程实现（如用规则规定机器人在试图避障而偏离首选路线的情况下该做什么），要么采用优先级来处理（如充电比投递邮件更重要）。

执行层的最后两个重要的能力是执行监测和错误恢复。有人可能会迷惑，底层的行为都那么可靠了，还要这些能力干什么？原因有二：其一，如 8.3.2 节所述，行为是具有情境性的，而情境会不可预期的变化，例如，实现一个行为时可以假定有人能取走邮件，但是事实未必总是如此；其二，要试图达到某些目标，行为层可能会将机器人移动到一个执行层无法预期的状态，例如，人们可以利用机器人的避障行为将机器人赶到厕所里。尽管事实上行为层可以在这样的情境中保持机器人的安全，但执行层还是需要对情境进行检测，以便使机器人回到原来的路线上。

典型地，执行监测被实现成并发任务，或者直接分析传感器数据，或者在监测的情境出现时激活一个行为向执行层发送信号，这些分别对应轮询与中断驱

动两种监测方式。

执行层支持被触发的对监测器的各种响应。监测器可以生成子任务来处理某个情境，它可以终止已经生成的子任务，可以引起父任务的失败，或者也可以产生一个异常。后两种响应涉及错误恢复（也称异常处理）能力。很多执行层要求任务返回状态值（成功或失败），并允许父任务基于返回值有条件地执行。还有一些执行层使用分层异常机制抛出命名异常以定位在任务树中的节点。最近的注册了该异常处理器的子任务会尝试处理这个异常，如果处理不了，它会将此异常向任务树的上一层再次抛出。这种机制是受C++、Java和Lisp的异常处理机制启发而来的，它比返回值机制更具有表达能力，但由于控制流的非局部性特点，使得采用这种方法设计系统的难度要大得多。

**3. 实现约束**

大多数执行层的主要形式是分层有限状态控制器。Petri网[8.71]常用来表示执行层函数。此外，人们还开发了各种语言专门来辅助程序员实现执行层的各种能力。我们就几个方面扼要讨论一下以下几种语言：反应动作包（RAP）[8.4,30]、过程推理系统（PRS）[8.42,43]、执行支持语言（ESL）[8.12]、任务描述语言（TDL）[8.55]和规划执行交换语言（PLEXIL）[8.13]。

这些语言既有共性，又有不同。区别之一，语言是独立的（RAP、PRS、PLEXIL）还是现有语言的扩展（ESL是通用Lisp的扩展，TDL是C++的扩展）。独立语言总是易于分析和验证的，但扩展语言灵活性更好，尤其与已有软件集成时更见优势。尽管独立的执行层语言也都支持用户自定义函数接口，但这些接口在能力上（如都有什么类型的数据结构可以传递）往往是有限的。

所有这些执行层语言都对任务到子任务的分层分解提供支持。除PLEXIL外所有语言都允许任务的递归调用。RAP、TDL和PLEXIL在语法上能区别任务树（图）的叶节点和内部节点。

所有语言都提供了表示条件和迭代的能力，尽管在RAP和PLEXIL中这些不是核心语言结构，而必须通过其他结构的组合来表示。除了TDL，这些语言均对任务的前提条件和后续条件的编码以及成功条件的指定提供显式的支持。在TDL中，这些概念必须用更基本的结构编程实现。独立语言都允许在任务描述中定义局部变量，但对这些变量仅提供有限的计算处理。显然，在扩展语言中，其基础语言的全部能力都可以用来定义任务。

所有语言支持任务间简单的串行（序列）的和并发（并行）的时序约束，也支持超时设定，在等待指定的一段时间后触发。此外，TDL直接支持宽范围的时序约束——可以在任务的开始和结束之间设定约束（如，任务B在任务A开始后开始，或任务C在任务D开始后结束），也可以指定度量约束（如，任务B在任务A结束10s后开始，或任务C在下午1：00开始）。ESL和PLEXIL支持事件（如任务转移到新状态时）信令，可以类似地实现约束的表示类型。此外，ESL和TDL支持基于事件发生的任务终止，如当任务A开始时任务B终止。

在异常监测和异常处理方面，各种语言有着不同的考虑。ESL和TDL都提供显式的异常监测结构，并支持抛出异常和由注册处理器捕获异常的分层处理方式。这种异常处理方式与C++、Java和Lisp中使用的方式类似。ESL和TDL也支持清除过程，在任务终止时可以调用。RAP和PLEXIL并没有分层异常处理机制，而是使用返回值来指示失败。但PLEXIL支持清除过程，当任务失败时运行该过程。PRS支持执行监测，但不支持异常处理。ESL和PRS支持资源共享，并都对自动阻止任务间到资源的连接提供支持。在其他执行语言中，这项功能是需要分别实现的，尽管有规划在这方面扩展PLEXIL。

最后，RAP、PRS和ESL均包含符号数据库（环境模型），该数据库或者直接连接传感器或者连接行为层以保持与真实环境的同步。通过数据库查询可以确定前提条件是否为真、哪种方法可用等。PLEXIL使用查找表实现类似的功能，不过它的实现方式（比如，是通过数据库查找还是通过调用行为层函数）对任务是透明的。TDL则将这项工作留给了程序员，由程序员来确定这些任务如何与环境进行关联。

### 8.3.4 规划

分层结构中的规划组件负责根据高级目标确定机器人的长远活动计划。行为控制组件关注的是眼皮底下的事儿，执行组件关注的是刚刚发生的和即将发生的事儿，而规划组件则是面向未来的。在办公室投递机器人的实例中，规划组件要考虑一天的投递、机器人的资源、地图、确定最优投递路线和调度，包括机器人什么时候应该充电。当情境改变时，规划组件也负责重新规划。例如，如果赶上办公室锁门，规划组件将确定一个新的投递计划，而将锁门办公室的投递任务安排到当天稍晚些时候。

**1. 规划类型**

第9章将详细描述机器人规划的方法，本章概述

与规划器不同类型有关的一些问题，因为它们都与分层结构有关。

最常用的两种方法是分层任务网（HTN）规划器和规划器/调度器。HTN规划器[8.72,73]将任务分解成子任务，其分解方式与执行层类似。主要的不同是，HTN规划器总是在较高的抽象级别进行操作、会考虑到资源的利用且具有处理任务间冲突的方法，如，多个任务需要相同的资源，或者一个任务否定了另一个任务所需的前提条件。HTN规划器所需的知识通常相当容易确定，因为它直接指明任务如何完成。

规划器/调度器[8.74,75]在时间和资源有限的领域很有用。它们创建高级规划，在任务应该发生时进行调度，但通常留给执行层去确定具体如何实现任务。规划器/调度器的工作通常是将任务布置在时间线上，对机器人上可用的各种资源（如马达、电力、通信等）分别采用不同的时间线。规划器/调度器所需的知识包括任务要完成的目标、所需的资源、持续时间和任务间的约束。

很多体系结构提供专门的规划专家系统，能高效地求解特定的问题，特别地，还包括运动规划器，如路径规划器和轨迹规划器。有时，体系结构的规划层直接调用这些专门的规划器，而在其他体系结构模式中，运动规划器是体系结构中较低层（执行层甚至行为层）的一部分。把这些专门的规划器放在哪儿通常属于选型问题或者性能问题（参见8.5节）。

此外，有些体系结构提供多个规划层[8.39,44,76]。通常，最顶层有一个使命规划层，它在很抽象的层次上对相对较长的一段时间进行规划。这层主要负责选择在下一段时间内要实现哪个高级目标（并且有时需要确定按什么顺序实现这些目标），以最大化某个目标函数，如净盈利。稍低一些的任务规划层负责确定怎样和何时完成每个目标。这样细分通常是出于对效率的考虑，因为同时进行既长期又细致的规划是很困难的。

**2. 规划与执行的集成**

在机器人体系结构中将规划与执行组件集成到一起有两种主要方法。一种方法是规划组件由执行组件按需调用，并返回一个规划，然后规划组件进入休眠状态，直到再次被调用。ATLANTIS [8.70]和遥控Agent[8.44]等体系结构都使用这种方法，这要求执行组件要么给规划组件留下足够的时间完成规划，要么在规划完成前对系统的安全负责。例如，在遥控Agent中，会显式调度一个专门的规划任务。第二种方法是规划组件根据需要将高级任务向下发送到执行组件，并监测这些任务的进展情况。如果任务失败，则立即重新规划。在这种方法中，规划组件始终运行，并一直进行着规划、重规划。信号必须在规划器和执行组件之间实时传递以使它们保证同步。如3T[8.36]等体系结构采用的就是第二种方法。第一种方法在系统处于相对静态的环境时适用，规划次数很少，相对可预期。第二种方法更适用于动态环境，重规划很频繁且难以预期。

在规划与执行集成时还需要做的决策是到何时停止任务分解、在何处监测规划执行以及如何处理异常。如果一直规划到基本动作或行为，规划器对于执行期间将会发生什么会有很好把握，但这是以更多的计算为代价的。再有，有些任务分解很容易进行过程描述（采用执行语言），而非声明描述（采用规划语言）。同样，执行层的监测效率更高些，因为监测点靠近机器人的传感器，而规划器可能会利用更多的全局知识更早和（或）更精确地检测到异常。关于处理异常，执行层自己能够处理很多异常，其代价只是破坏了规划器在调度任务时的预期结果，而另一方面，若由规划器处理异常通常会涉及到重规划，其计算代价是高昂的。

然而，对于所有这些集成问题通常有一种折中方案。例如，可以只将某一部分任务进行更深层次的分解；或者一部分异常放在执行层处理，而另一部分异常交由规划器处理。一般来讲，恰当的方法都需要折中考虑，并需要具体问题具体分析（参见8.5节）。

## 8.4 案例研究——GRACE

本节介绍一个相当复杂的自主移动机器人的体系结构。机器人GRACE（Graduate Robot Attending Conference，出席会议的研究生机器人）是5家研究机构（卡内基梅隆大学、海军研究实验室、西北大学、Metrica公司和Swarthmore学院）共同努力的成果，设计用于参加AAAI（美国人工智能学会）的机器人挑战赛。挑战赛要求机器人作为与会者参加AAAI举办的全国人工智能大会，机器人必须要找到注册台（预先不知道会议中心的布置），并注册会议，然后根据会议提供的地图找到路线并及时到达指定地点进行技术交流。

在给定了任务的复杂性和技术集成的需求后，机器人的体系结构设计尤为重要。这些技术已由上述5家机构先期开发过，包括动态环境中的定位、在行人面前的安全导航、路径规划、动态重规划、人体视觉跟踪、告示牌、标记、手势和人脸的识别、语音识别与自然语言理解、语音合成、知识表示以及与人社交

等技术。

GRACE 以 RWI（Real World Interface）[⊖] 的 B21 机器人为基础，配有一个由平板液晶显示器（LCD）显示的表情丰富的计算机动画人脸（如图 8.9 所示）。B21 上配备触觉、红外和声纳等传感器，最靠近底座的是一个 SICK 激光扫描测距仪，具有 180 度的视野。此外，GRACE 还装配了几台摄像机，包括一台由 Metrica TRACLabs 制造的云台立体摄像机、一台 Canon 产的云台变焦单色摄像机。GRACE 借助高品质语音合成软件 Festival 讲话，使用无线耳麦（Shure TC 的计算机无线收发套件）接收语音信息。

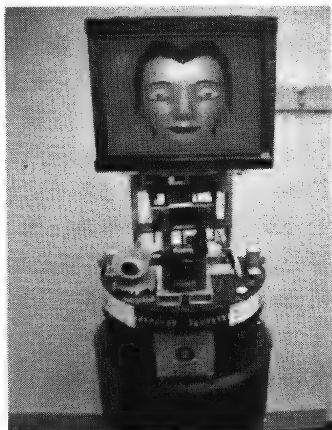


图 8.9　机器人 GRACE

GRACE 体系结构的行为层由一些控制特定硬件部件的独立进程构成，这些程序提供抽象接口，或用于硬件控制，或用于从传感器返回信息。为了使用各种设备不同的编码类型，大部分接口既支持同步的、阻塞的调用，也支持异步的、非阻塞的调用（对于非阻塞调用，接口允许程序员指定数据返回时的回调函数）。行为层包括机器人运动和定位（也提供激光测距信息）、语音识别、语音合成、面部动画、彩色视觉与立体视觉（如图 8.10 所示）等接口。

该体系结构中对执行层的每项能力都采用独立的进程实现，这么做主要是由于底层代码都是由不同公司开发的，尽管让大量进程并发运行可能会效率很低，但要想把所有功能都放在单个进程中完成，则实在太难。此外，使用分离的进程还便于开发和调试，因为每次只需要与系统中需要测试的部分打交道。

执行层由完成挑战赛每个子任务的独立程序构成，包括寻找注册台、乘电梯、排队、与注册人员交流、走到报告区和作报告，如图 8.10 所示。与很多已实现的机器人系统一样，GRACE 体系结构没有规划层，因为这里涉及的高级规划任务要么是一成不变的，要么是很简单易行的，直接编程即可。有些执行层程序采用 TDL（参见 8.3.3 节）写成，这样便于并发控制和各种任务的监测。

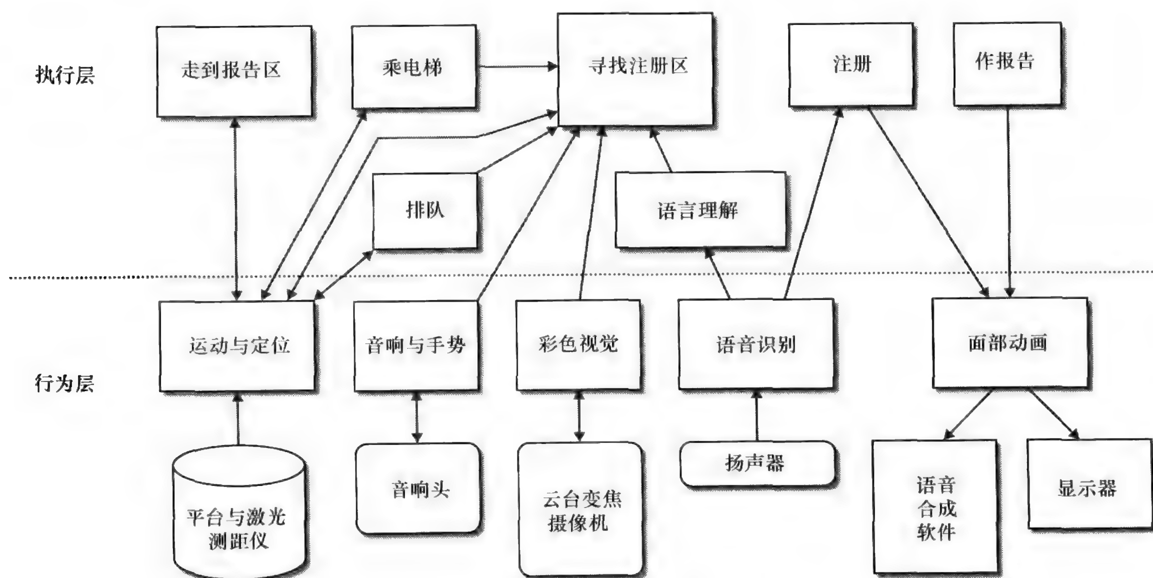



图 8.10　GRACE 的体系结构

⊖　译者注：RWI 目前是 iRobot 公司的一个分部。

寻找注册台是必不可少的一项任务（前已述及，GRACE并不知道注册台在哪儿，也不知道会议中心长什么样）。GRACE采用TDL构造了有限状态机，这样它就可以维护多个目标，如利用电梯到达某一楼层、按照指南找到电梯（如图8.11所示），最顶级的目标是找到注册台。当GRACE与人交互拿到了去注册台的指南时，一些中间目标就创建出来了。如果没有指南可用，GRACE就随机逛一逛，直到用激光扫描仪探测到人，它便会和人交流以得到指南。GRACE可以处理简单的命令，如左转、向前5m，也能处理一些高级指令，如乘电梯、下一路口左转。此外，GRACE还会提问，如“我这是走到注册台了吗?”、“这是电梯吗?”GRACE在各个时刻都使用基于TDL的有限状态机来确定如何交互最恰当，这样可以防止“思维”混乱。

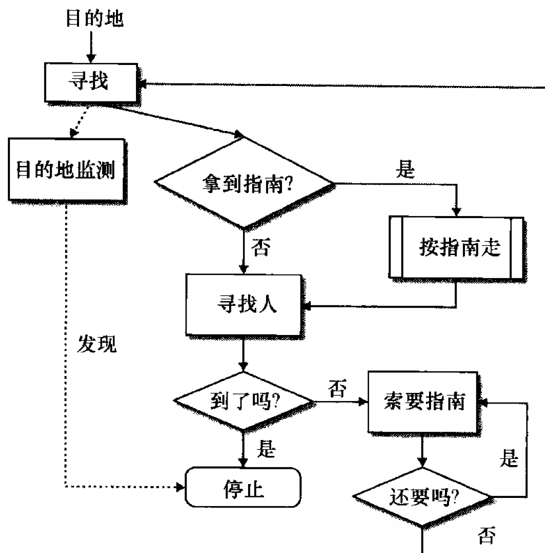



图8.11 GRACE按照指南走到注册台的有限状态机

进程间通信采用IPC消息包[8.9,77]。IPC支持发布/订阅和客户机/服务器两种消息机制，能在进程间透明传递复杂的数据结构。使用IPC进行进程间通信的一个好处是能够记录下所有的消息通信信息，既能记录消息名称，也能记录数据内容。事实证明，有时要弄清楚系统为什么没能按照预期动作执行，非这些记录不可。是进程发送了无效数据？还是没有及时发出消息？是接收进程因故阻塞了？还是时间上的问题？尽管分析这些消息日志往往令人乏味，但某些时候这也是找到那些间歇性故障的唯一手段。

2002年7月，GRACE成功地完成了在加拿大埃德蒙顿的Shaw会议中心的挑战。行为层的进程总的来说是如预期那样工作的，这要归功于这些模块都是从以前开发的系统中移植过来的（也就是说已经过很好的测试）。而执行层的进程在非标称情境下则出了不少问题。问题主要出在传感数据的理解上以及对会议中心看起来会是什么样的错误假定，例如，有些隔断是玻璃的，而激光传感器几乎检测不到。不过总而言之，该体系结构还是不负众望，把一大堆复杂的软件相当快地集成起来并能高效地一起运行。

## 8.5 机器人体系结构设计艺术

设计机器人体系结构说是科学，但更是艺术。体系结构设计的目标是使得编程实现一个机器人更容易、更安全、更灵活。因而，一个机器人体系结构开发者所做的决策会受到其个人经验（如熟悉哪些程序设计语言）、机器人与环境以及要执行的任务等多方面影响。体系结构的选型不可轻视，因为根据创造者的经验，一旦选定体系结构，那就是多少年都不动摇的。改变机器人的体系结构是个难题，且当大量代码已经实现时再改体系结构会使开发进度倒退。

机器人体系结构设计艺术始于设计者要问的一系列问题，这些问题包括：

- 机器人要执行什么任务？是长期任务还是短期任务？是用户发起的还是机器人发起的？任务是重复性的还是随着时间总在变化的？
- 执行任务需要哪些动作？那些动作如何表示？动作之间如何协调？执行时需要用多快的速度选择和改变动作？为了保证机器人安全，每个动作以什么样的速度执行？
- 任务需要处理什么数据？机器人如何从环境或者用户获取数据？用什么传感器来获取这些数据？数据如何表示？用什么处理方法将传感器数据抽象成体系结构内部表示？数据所需的更新频率如何？数据能够更新的频率又如何？
- 机器人需要什么样的计算能力？这些计算能力要输出什么样的数据，又要输入什么样的数据？机器人的这些计算能力如何进行划分和结构化处理，又如何互连？计算能力的最佳分解（粒度）是什么？每项计算能力要对其他计算能力知晓多少？有可重用（来自其他机器人或者其他项目等）的计算能力吗？不同的计算能力驻留在何处（如板载或者板外）？
- 机器人的用户是什么人？他们要用机器人做什么？他们需要对机器人的计算能力有什么样的理解？用户怎么了解机器人在做什么？用户的交互是对

等的、监管的还是旁观性质的?

● 如何评价这个机器人? 成功的标准是什么? 失败的模式又有哪些? 如何规避失败?

● 用一种机器人的体系结构处理不止一套任务? 还是用不止一种机器人去处理? 需要不止一班开发人马吗?

一旦设计者对所有(或大部分)问题有了答案，便可以开始针对想让机器人执行的操作的类型和想让用户如何与之交互的方式设计一些用例。这些用例应该详细说明机器人与环境和用户有关的外部行为。从这些用例，可以逐步开始机器人功能的初始划分。划分的同时应该画出序列图，以便显示信息和控制流随着时间推移在机器人体系结构各种组件间的传递情况[8.78]。此后，可以开发一个更正式的体系结构组件间的接口规格说明。这项工作可以借助诸如 CORBA 的 IDL(接口定义语言)这样的语言来完成，也可以采用发布/订阅协议定义要分发的消息来完成。这是至关重要的一步，因为一旦开始实施再想更改，代价可就大了。如果接口要修改，就要通知到所有用此接口的组件与改后接口的保持一致。机器人体系结构集成时最常见的问题是组件预期的数据与其正在收到数据不匹配。

接口定义清晰的分层体系结构有个好处就是各层可以并行开发。行为控制层拿人当成执行层就可以开始在机器人上实现和测试了。执行层采用状态机桩⊖模拟机器人上的预期行为就可以开始实现和测试了。这些桩仅仅是响应调用适时地答个到而已。然后，各层就可以集成测试时序和其他运行时间题了。只有在组件的角色和接口都被定义和考虑清楚的情况下，这种并行方法才能加速机器人体系结构的开发进程。做集成时，实时调试问题也需要考虑。根据我们的经验，机器人体系结构的大部分开发时间还是花在行为控制层，也就是说，与执行和规划相比，感知和行动依然是机器人的"硬件"。做出一个良好的、鲁棒的行为控制层，就等于向合格的机器人体系结构迈出了一大步。

## 8.6 结论与扩展阅读

设计机器人体系结构有助于使完成任务的行为并发执行，能让机器人系统控制执行器、解译传感器、规划、监测执行并处理意外事件和把握良机。体系结构给出了领域相关的软件开发的概念框架，还常常提供一些编程工具以便于开发软件。

然而，没有万能的体系结构。研究人员已经开发了各种各样的体系结构可用于不同的应用场合，但还没有明确的规则能确定在给定应用场合下选哪种体系结构最适用，本章给出了一些指导方针以助于开发人员在工作中选择恰当的体系结构。可以说，分层体系结构已经越来越普及，这要归功于他们的灵活性及其在多个抽象级别上同时操作的能力。

《AI and Mobile Robots》[8.79]一书中有若干关于体系结构的章节(本章参考了不少)。大多数机器人教材[8.19,80,81]中都有机器人体系结构的章节。20 世纪 90 年代中期，AAAI 举办的人工智能春季研讨会上连续几年都有机器人体系结构议题，但该研讨会的论文集并未广泛发行。关于 GRACE 的更多信息可以查阅参考文献 [8.82-84]。

## 参考文献


8.1 I. Jacobson, G. Booch, J. Rumbaugh: *The Unified Software Development Process* (Addison Wesley Longman, Reading 1998)

8.2 J.S. Albus: RCS: A reference model architecture for intelligent systems, Working Notes: AAAI 1995 Spring Symposium on Lessons Learned from Implemented Software Architectures for Physical Agents (1995)

8.3 R.A. Brooks: A robust layered control system for a mobile robot, IEEE J. Robot. Autom. **2**(1), 14–23 (1986)

8.4 R.J. Firby: An Investigation into Reactive Planning in Complex Domains, Proc. of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence (1987)

8.5 R. Simmons: Structured control for autonomous robots, IEEE Trans. Robot. Autom. **10**(1), 34–43 (1994)

8.6 J.J. Borrelly, E. Coste-Maniere, B. Espiau, K. Kapelos, R. Pissard-Gibollet, D. Simon, N. Turro: The ORCCAD architecture, Int. J. Robot. Res. **17**(4), 338–359 (1998)

8.7 B. Kuipers: The spatial semantic hierarchy, Artif. Intell. **119**, 191–233 (2000)

8.8 R. Orfali, D. Harkey: *Client/Server Programming with JAVA and CORBA* (Wiley, New York 1997)

8.9 R. Simmons, G. Whelan: Visualization Tools for Validating Software of Autonomous Spacecraft, Proc. of International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (Tokyo 1997)


⊖ 译者注：状态机桩就是一种模拟的状态机的函数。

8.10 R. A. Brooks: The Behavior Language: User's Guide, Technical Report AIM-1227, MIT Artificial Intelligence Lab (1990)
8.11 R.J. Firby, M.G. Slack: Task execution: Interfacing to reactive skill networks, Working Notes: AAAI Spring Symposium on Lessons Learned from Implemented Architecture for Physical Agents (Stanford 1995)
8.12 E. Gat: ESL: A Language for Supporting Robust Plan Execution in Embedded Autonomous Agents, Proc. of the IEEE Aerospace Conference (1997)
8.13 V. Verma, T. Estlin, A. Jónsson, C. Pasareanu, R. Simmons, K. Tso: Plan Execution Interchange Language (PLEXIL) for Executable Plans and Command Sequences, Proc. 8th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (Munich 2005)
8.14 S.A. Schneider, V.W. Chen, G. Pardo-Castellote, H.H. Wang: ControlShell: A Software Architecture for Complex Electromechanical Systems, Int. J. Robot. Res. **17**(4), 360–380 (1998)
8.15 National Instruments: *LabVIEW* (National Instruments, Austin 2007), http://www.ni.com/labview/
8.16 N.J. Nilsson: A Mobile Automaton: An Application of AI Techniques, Proc. of the First International Joint Conference on Artificial Intelligence (Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco 1969) pp. 509–520
8.17 N.J. Nilsson: *Principles of Artificial Intelligence* (Tioga, Palo Alto 1980)
8.18 P.E. Agre, D. Chapman: Pengi: An implementation of a theory of activity, Proc. of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence (1987)
8.19 R.C. Arkin: *Behavior-Based Robotics* (MIT Press, Cambridge 1998)
8.20 J.H. Connell: SSS: A Hybrid Architecture Applied to Robot Navigation, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (1992) pp. 2719–2724
8.21 M. Mataric: Integration of Representation into Goal-Driven Behavior-Based Robots, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (1992)
8.22 I. Horswill: Polly: A Vision-Based Artificial Agent, Proc. of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI) (1993)
8.23 D.W. Payton: An Architecture for Reflexive Autonomous Vehicle Control, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (1986)
8.24 J.K. Rosenblatt: DAMN: A Distributed Architecture for Mobile Robot Navigation. Ph.D. Thesis (Carnegie Mellon Univ., Pittsburgh 1997)
8.25 R.C. Arkin: Motor schema-based mobile robot navigation, Int. J. Robot. Res. **8**(4), 92–112 (1989)
8.26 M. Arbib: Schema Theory. In: *Encyclopedia of Artificial Intelligence*, ed. by S. Shapiro (Wiley, New York 1992) pp. 1427–1443
8.27 O. Khatib: Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots, Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (1985) pp. 500–505
8.28 R.C. Arkin: Integrating behavioral, perceptual, and world knowledge in reactive navigation, Robot. Autonom. Syst. **6**, 105–122 (1990)
8.29 R.C. Arkin, T. Balch: AuRA: Principles and practice in review, J. Exp. Theor. Artif. Intell. **9**(2/3), 175–188 (1997)
8.30 R.J. Firby: Adaptive Execution in Complex Dynamic Worlds. Ph.D. Thesis (Yale Univ., New Haven 1989)
8.31 R.J. Firby: Task Networks for Controlling Continuous Processes, Proc. of the Second International Conference on AI Planning Systems (1994)
8.32 R.P. Bonasso: Integrating Reaction Plans and layered competences through synchronous control, Proc. International Joint Conferences on Artificial Intelligence (1991)
8.33 S.J. Rosenschein, L.P. Kaelbling: The synthesis of digital machines with provable epistemic properties, Proc. of the Conference on Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge (1998)
8.34 L.P. Kaelbling: Goals as parallel program specifications, Proc. of the Sixth National Conference on Artificial Intelligence (1988)
8.35 L. P. Kaelbling: Compiling Operator Descriptions into Reactive Strategies Using Goal Regression, Technical Report, Teleos Research, TR90-10, (1990)
8.36 R.P. Bonasso, R.J. Firby, E. Gat, D. Kortenkamp, D.P. Miller, M.G. Slack: Experiences with an architecture for intelligent, reactive agents, J. Exp. Theor. Artif. Intell. **9**(2/3), 237–256 (1997)
8.37 E. Gat: Integrating Planning and reacting in a heterogeneous asynchronous architecture for controlling real-world mobile robots, Proc. of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI) (1992)
8.38 G.N. Saridis: Architectures for Intelligent Controls. In: *Intelligent Control Systems: Theory and Applications*, ed. by Gupta, Sinhm (IEEE Press, Piscataway 1995)
8.39 R. Alami, R. Chatila, S. Fleury, M. Ghallab, F. Ingrand: An architecture for autonomy, Int. J. Robot. Res. **17**(4), 315–337 (1998)
8.40 M. Ghallab, H. Laruelle: Representation and control in IxTeT, a temporal planner, Proc. of AIPS-94 (1994)
8.41 P. Laborie, M. Ghallab: Planning with sharable resource constraints, Proc. of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (1995)
8.42 M.P. Georgeff, F.F. Ingrand: Decision-Making in an Embedded Reasoning System, Proc. of International Joint Conference on Artificial Intelligence (1989) pp. 972–978
8.43 F. Ingrand, R. Chatila, R. Alami, F. Robert: PRS: A high level supervision and control language for autonomous mobile robots, Proc. of the IEEE International Conference On Robotics and Automation (1996)
8.44 N.P. Muscettola, P. Nayak, B. Pell, B.C. Williams: Remote agent: To boldly go where no AI system has gone before, Artif. Intell. **103**(1), 5–47 (1998)
8.45 B.C. Williams, P.P. Nayak: A Model-based Approach to Reactive Self-Configuring Systems, Proc. of AAAI (1996)
8.46 J.S. Albus: Outline for a theory of intelligence, IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. **21**(3), 473–509 (1991)
8.47 B. Sellner, F.W. Heger, L.M. Hiatt, R. Simmons, S. Singh: Coordinated Multi-Agent Teams and Sliding Autonomy for Large-Scale Assembly, Proc IEEE **94**(7), 1425–1444 (2006), special issue on multi-agent systems
8.48 D. Goldberg, V. Cicirello, M.B. Dias, R. Simmons,

S. Smith, A. Stentz: Market-Based Multi-Robot Planning in a Distributed Layered Architecture. In: *Multi-Robot Systems: From Swarms to Intelligent Automata*, Vol. II, ed. by A. Schultz, L. Parker, F.E. Schneider (Kluwer, Dordrecht 2003)
8.49 J.S. Albus, R. Lumia, H.G. McCain: NASA/NBS Standard Reference model for Telerobot Control System Architecture (NASREM), National Bureau of Standards, Tech Note #1235, NASA SS-GFSC-0027 (1986)
8.50 D.R. Blidberg, S.G. Chappell: Guidance and control architecture for the EAVE vehicle, IEEE J. Ocean Eng. **11**(4), 449–461 (1986)
8.51 R. Volpe, I. Nesnas, T. Estlin, D. Mutz, R. Petras, H. Das: The CLARAty architecture for robotic autonomy, Proc. of the IEEE Aerospace Conference (Big Sky 2001)
8.52 I.A. Nesnas, R. Simmons, D. Gaines, C. Kunz, A. Diaz-Calderon, T. Estlin, R. Madison, J. Guineau, M. McHenry, I. Shu, D. Apfelbaum: CLARAty: Challenges and steps toward reusable robotic software, Int. J. Adv. Robot. Syst. **3**(1), 023–030 (2006)
8.53 T. Estlin, D. Gaines, C. Chouinard, F. Fisher, R. Castaño, M. Judd, R. Anderson, I. Nesnas: Enabling Autonomous Rover Science Through Dynamic Planning and Scheduling, Proc. of IEEE Aerospace Conference (Big Sky 2005)
8.54 R. Knight, G. Rabideau, S. Chien, B. Engelhardt, R. Sherwood: CASPER: Space Exploration through Continuous Planning, IEEE Intell. Syst. **16**(5), 70–75 (2001)
8.55 R. Simmons, D. Apfelbaum: A Task Description Language for Robot Control, Proc. of Conference on Intelligent Robotics and Systems (Vancouver 1998)
8.56 T.A. Estlin, D. Gaines, C. Chouinard, R. Castaño, B. Bornstein, M. Judd, I.A.D. Nesnas, R. Anderson: Increased Mars Rover Autonomy using AI Planning, Scheduling and Execution, Proc. of the International Conference On Robotics and Automation (2007) pp. 4911–4918
8.57 D. Musliner, E. Durfee, K. Shin: World modeling for dynamic construction of real-time control plans, Artif. Intell. **74**(1), 83–127 (1995)
8.58 D.J. Musliner, R.P. Goldman, M.J. Pelican: Using Model Checking to Guarantee Safety in Automatically-Synthesized Real-Time Controllers, Proc. of International Conference on Robotics and Automation (2000)
8.59 B. Espiau, K. Kapellos, M. Jourdan: Formal Verification in Robotics: Why and How?, Proc. International Symposium on Robotics Research (Herrsching 1995)
8.60 G. Berry, G. Gonthier: The Esterel synchronous programming language: Design, semantics, implementation, Sci. Comput. Program. **19**(2), 87–152 (1992)
8.61 M. Jourdan, F. Maraninchi, A. Olivero: Verifying quantitative real-time properties of synchronous programs, Proc. 5th International Conference on Computer-aided Verification (Springer, Elounda 1993), LNCS 697
8.62 G. Pardo-Castellote, S.A. Schneider: The Network Data Delivery Service: Real-Time Data Connectivity for Distributed Control Applications, Proc. of International Conference on Robotics and Automation (1994) pp. 2870–2876
8.63 JAUS Reference Architecture Specification, Volume II, Part 1 Version 3.2 (available at http://www.jauswg.org/baseline/refarch.html)
8.64 JAUS Tutorial Powerpoint slides (available at: http://www.jauswg.org/)
8.65 JAUS Domain Model Volume I, Version 3.2 (available at http://www.jauswg.org/baseline/current_baseline.shtml)
8.66 E. Gat: ALFA: A Language for Programming Reactive Robotic Control Systems, Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation (1991) pp. 116–1121
8.67 R.A. Brooks: Elephants don't play chess, J. Robot. Autonom. Syst. **6**, 3–15 (1990)
8.68 L.P. Kaelbling: Rex- A symbolic language for the design and parallel implementation of embedded systems, Proc. of the 6th AIAA Computers in Aerospace Conference (Wakefield 1987)
8.69 E. Gat: Non-Linear Sequencing and Cognizant Failure, Proc. AIP Conference (1999)
8.70 E. Gat: On the role of stored internal state in the control of autonomous mobile robots, AI Mag. **14**(1), 64–73 (1993)
8.71 J.L. Peterson: *Petri Net Theory and the Modeling of Systems* (Prentice Hall, Upper Saddle River 1981)
8.72 K. Currie, A. Tate: O-Plan: The open planning architecture, Artif. Intell. **52**(1), 49–86 (1991)
8.73 D.S. Nau, Y. Cao, A. Lotem, H. Muñoz-Avila: SHOP: Simple hierarchical ordered planner, Proc. of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (1999) pp. 968–973
8.74 S. Chien, R. Knight, A. Stechert, R. Sherwood, G. Rabideau: Using iterative repair to improve the responsiveness of planning and scheduling, Proc. of the International Conference on AI Planning and Scheduling (2000) pp. 300–307
8.75 N. Muscettola: HSTS: Integrating planning and scheduling. In: *Intelligent Scheduling*, ed. by M. Fox, M. Zweben (Morgan Kaufmann, San Francisco 1994)
8.76 R. Simmons, J. Fernandez, R. Goodwin, S. Koenig, J. O'Sullivan: Lessons Learned From Xavier, IEEE Robot. Autom. Mag. **7**(2), 33–39 (2000)
8.77 R. Simmons: *Inter Process Communication* (Carnegie Mellon Univ., Pittsburgh 2007), www.cs.cmu.edu/IPC
8.78 S.W. Ambler: *UML 2 Sequence Diagramms* (Ambisoft, Toronto 2007), www.agilemodeling.com/artifacts/sequenceDiagram.htm
8.79 D. Kortenkamp, R.P. Bonasso, R. Murphy: *Artificial Intelligence and Mobile Robots* (AAAI Press/The MIT Press, Cambridge 1998)
8.80 R. Murphy: *Introduction to AI Robotics* (MIT Press, Cambridge 2000)
8.81 R. Siegwart, I.R. Nourbakhsh: *Introduction to Autonomous Mobile Robots* (MIT Press, Cambridge 2004)
8.82 R. Simmons, D. Goldberg, A. Goode, M. Montemerlo, N. Roy, B. Sellner, C. Urmson, A. Schultz, M. Abramson, W. Adams, A. Atrash, M. Bugajska, M. Coblenz, M. MacMahon, D. Perzanowski, I. Horswill, R. Zubek, D. Kortenkamp, B. Wolfe, T. Milam, B. Maxwell: GRACE: An autonomous robot for the AAAI Robot Challenge, AAAI Mag. **24**(2), 51–72 (2003)

8.83 R. Gockley, R. Simmons, J. Wang, D. Busquets, C. DiSalvo, K. Caffrey, S. Rosenthal, J. Mink, S. Thomas, W. Adams, T. Lauducci, M. Bugajska, D. Perzanowski, A. Schultz: Grace and George: Social Robots at AAAI, AAAI 2004 Mobile Robot Competition Workshop (AAAI Press, 2004), Technical Report WS-04-11, pp. 15–20

8.84 M.P. Michalowski, S. Sabanovic, C. DiSalvo, D. Busquets, L.M. Hiatt, N.A. Melchior, R. Simmons. Socially: Distributed Perception: GRACE plays social tag at AAAI 2005, Auton. Robot. **22**(4), 385–397 (2007)

# 第9章 机器人智能推理方法

Joachim Hertzberg, Raja Chatila

沈晶 刘海波 译

人工智能（AI）推理技术涉及推理、规划和学习，已有大量成功应用的记录。那么，它能作为自主移动机器人的方法工具箱吗？未必！因为移动机器人关于动态的、部分可知的环境的推理与基于知识的纯软件系统（其中多数著名成果已记录在案）中的推理可能有着本质的不同。

本章主要探讨基于符号的人工智能推理中与机器人有关的内容。先一般性介绍知识表示与推理的基本方法，包括基于逻辑的方法和基于概率的方法。然后专门探讨与机器人有关的一些特殊问题，包括基于逻辑的高级机器人控制、模糊逻辑以及时间约束推理的问题。最后，详细介绍推理的两种一般性应用——动作规划和学习。

一般性的推理目前还不是自主移动机器人配备的标准功能。本章除了介绍与机器人有关的人工智能推理的研究现状外，还会指出为实现机器人智能推理而有待进一步研究解决的问题。

本章首先在9.1节总体上回顾一下知识表示和演绎推理，然后在9.2节较为详细地探讨专门考虑机器人相关应用的推理问题。介绍完推理的方法后，再介绍推理的一般性应用，即9.3节的动作规划和9.4节的机器学习，9.5节进行总结。



尽管关于移动机器人中使用符号推理的必要性和明智性有过争论，但目前在机器人的控制系统的某个部分或某层中应该或者可以包含推理这一点上似乎达成了共识。将推理功能融入控制器的其他部分并保证控制周期时间足够短（以使机器人能在动态环境中安全地行动）是个难题，混合控制体系结构（参见第8章）将成为解决这个难题的典型软件结构。

符号推理在这里是按照经典人工智能（AI）中的含义来理解的，即基于符号的慎思，如一阶谓词逻辑（FOPL）或贝叶斯概率理论，但其中通常有些限制或扩展，并需要在表达能力与推理速度之间进行权衡，以求二者的最佳组合。

## 9.1 知识表示与推理

推理时要求推理器（这里就是指机器人）对要推理的环境的某些部分（或某些方面）有一个明确的表示，这就立即引出两个问题：什么样的格式适用于这种明确的表示？要表示的知识来自哪里？

第二个问题是指基于先前的符号描述和从传感器或与其他Agent通信获取的环境信息对机器人的环境（至少是环境的一部分）实时地生成并维护一种符号描述的问题。总的来说，这个问题迄今尚未解决。它涉及人工智能的基础理论，如符号接地[9.1]和对象锚定[9.2]问题㊀，因此，机器人中实际的符号推理仅限

㊀ 译者注：即符号与真实对象之间的对应关系问题。

于能被保持到最近的那部分知识。显然，这包括关于环境的静态知识（如建筑物中的拓扑环境及其相互关系）、符号表中可用的临时知识（如设备管理数据库中的知识）以及最富挑战性的从传感器数据中提取的符号数据。通过摄像机数据进行目标识别（参见第23章）就是一个与这里探讨的问题有关的方法。

本节探讨第一个问题的答案，即适用于知识表示的形式化问题。这里的适用性必须同时考虑到两个方面（恰如硬币的两个面）：一方面是认知适用性——这种形式能将环境的目标侧面简洁准确地表达出来吗？另一方面是计算适用性——这种形式能将典型的推理结果切实高效地推导出来吗？二者之间需要权衡。很丰富、很有表现力从而在认识论上很有吸引力的形式，却往往伴随着难于处理甚至逻辑上不可判定的问题，反之亦然。于是，知识表示（KR）可以定位为“AI的一个研究领域，致力于设计表示特定领域的知识”[9.3]。

本节着力探讨两类形式化方法，即逻辑和概率理论及各自的推理过程。要想了解关于KR领域的介绍和最近的研究成果，我们推荐读者阅读本章后面给出的一般性AI和KR文献。此外，还有个知识表示国际会议——*International Conference on Knowledge Representation*（KR），两年一次，每逢偶数年召开。

### 9.1.1 逻辑

一阶谓词逻辑（FOPL）是AI领域中知识表示形式化方法的原型。但必须得说明，它并不能同时满足前已述及的可认知性和可计算性要求，在很多情况下，甚至两个都不能满足。然而，它是从概念上和数学上理解用确定知识进行表示和推理的形式化方法的基础。

这里假定读者都已了解FOPL的基本概念，不再赘述，大家可以参阅众多的AI教材和介绍。每一部经典AI教材都会介绍FOPL，参考文献［9.4，5］亦不例外。参考文献［9.6］、［9.7］和［9.8］分别介绍了逻辑的原理、应用和数学方法。

在逻辑系统中，对知识进行形式化表示便于从该知识得出推论（利用已经证明为完备可靠的逻辑演算进行推理）。自动演绎是逻辑和AI的一个分支领域，已经实现了大量很有力的演绎系统可供使用（参见参考文献［9.4］第9章的介绍，参考文献［9.9］是较新的、综合性的汇编）。

依靠逻辑推理，机器人能推断出大量很难或不可能获取的事实。例如，假定机器人通过获取和解译传感数据，感知到办公楼中的$D_{509}$号门现在是关着的，在有些专门的FOPL语言中用$Closed(D_{509})$表示，假定是符号的直觉的解译。进一步假设机器人关于办公楼的静态知识库包括以下语句：

$Connects(D_{509}, C_5, R_{509})$，

$Connects(D_{508}, C_5, R_{508})$，

$Connects(D_{508a}, R_{508}, R_{509})$，

$\forall d, l_1, l_2 [Connects(d, l_1, l_2) \leftrightarrow Connects(d, l_2, l_1)]$，

$\forall d. [Closed(d) \leftrightarrow \neg Open(d)]$，

$\forall l. [At(l) \rightarrow Accessible(l)]$，

$\forall l_1, l_2. [Accessible(l_1) \rightarrow (\exists d. [Connects(d, l_1, l_2) \wedge Open(d)] \rightarrow Accessible(l_2))]$

常量$D_i$和变量$d$表示门，$R_i$表示房间，$C_i$表示走廊，变量$l$和$l_i$表示位置，即房间和走廊。假定机器人的定位系统告诉它当前房间或走廊的位置就用$At(\cdot)$。

那么，假定机器人知道它自己$At(C_5)$，观察到$Closed(D_{509})$意味着$\neg Open(D_{509})$，更有趣的是，仅当$Open(D_{508}) \wedge Open(D_{508a})$为真时才有$Accessible(R_{509})$，这样，比如执行一项到$R_{509}$房间的投递任务，机器人可以重规划经过$R_{508}$的路线，除非已知$D_{508}$和$D_{508a}$中至少有一扇是关着的，如果其中一扇或两扇的状态都不知道（根据当前的知识库，就意味着既不是Open(·)也不是Closed(·)。那么，$R_{509}$的可达性既不能被证明为可行也不能被证明为不可行，于是规划通过$D_{508}$和$D_{508a}$将作为可选项保留，同时现场收集它们必要的状态信息。

如这个小例子所示，FOPL是一个有力的表示与推理工具，而且，其理论也易于理解。不过，众所周知FOPL中的结果一般是不可判定的，这就意味着一个可靠的、完备的演绎算法在一些特定推理情况下甚至不能保证终止，就更不用说迅速得出结果了。

然而，这并不意味着逻辑就完全不能作为表示和推理的工具。很多应用并不需要FOPL完全的表达性，此外，有很多有趣的FOPL语言子集是可判定的，并在很多实际情况中可由算法高效地处理。于是，为了更广泛的应用，KR研究人员一直在努力寻找FOPL子集及适用的推理过程，可以胜任可认知性和可计算性需求。下面详细探讨其中的命题逻辑和描述逻辑。

**1. 命题系统**

在相当多的实际情况中，FOPL理论（公式集）实际表示有限域。从逻辑上讲，它们具有有限的海伯伦域，或至少能改写成具有有限海伯伦域的形式。在

这种情况下，用FOPL语法表示域理论可能依然是最得心应手的。但所有超越纯命题系统的表示仅仅是为了符号上的方便。例如，一条陈述机器人在一个时刻只能处于一个位置（房间或走廊）的公理：

$$\forall l_1,l_2.[At(l_1)\rightarrow(\neg At(l_2)\vee l_1=l_2)]$$

对于有限的建筑物，可以展开为一种冗长但却等价的形式，这种形式可以明确地处理所有位置。例如，在一个六层楼中；

$$At(R_{001})\rightarrow[\neg At(R_{002})\wedge\neg At(R_{003})\wedge\cdots\neg At(R_{514})\wedge\neg At(C_{0a})\wedge\neg At(C_{0b})\wedge\cdots\wedge\neg At(C_5)],$$

$$At(R_{002})\rightarrow[\neg At(R_{001})\wedge\neg At(R_{003})\wedge\cdots\neg At(R_{514})\wedge\neg At(C_{0a})\wedge\neg At(C_{0b})\wedge\cdots\wedge\neg At(C_5)],$$

…

其中，一个谓词（如上面的 $At$）的每一个自由变元都取值后，字面上即被看作命题变量。

这里有个好消息，FOPL理论在有限海伯伦域上对应的展开理论是命题性的，因此是可判定的，而且，在一些实际条件下，如FOPL中的变元是很清楚的（即如涉及房间和走廊的变元 $l_1$ 和 $l_2$ 的信息可用），则可以用更精简的FOPL语法机械地生成。

潜在的坏消息是，现在的命题系统可以由大量命题语句构成，一般情况下，需要生成所有FOPL语句中的变元置换的所有组合，这会导致计算复杂度随着FOPL变元的域的尺寸呈指数级增长。

不过，命题可满足性检查或模型检查技术正在突飞猛进，能使有成千上万个变元要处理的命题系统在常规硬件上以秒级的计算时间进行处理。当存在可满足性命题公式模型或很多事实的真假性已知时（如通过独立定位已知机器人 $At(C_5)$），这些方法会特别有效，而这两种都是实际知识表示中常见的情况。

参考文献［9.4］第7章介绍了模型检查。有一类算法都是基于经典的Davis-Putnam（DPLL）算法[9.10]，它试图系统地构建一个给定理论的命题模型，有效地传播变元的解释约束。另一类算法应用局部搜索技术，试图使用随机（Monte Carlo）变元指派生成解释。参考文献［9.11］收录了近来的论文并总结了研究现状，其中有一篇介绍SAT2002竞赛结果的论文，详细讨论了最近可满足性检查器关于综合问题（非同一般的难）的性能。

**2. 描述逻辑**

20世纪70年代出现了描述逻辑（DL），这是AI领域知识表示中的一种严格的形式化方法，它包括语义网络和框架系统。从逻辑上讲，DL有很多变种，形成一类FOPL的可判定子集。

使用DL语言表示某特定领域的知识需要两个部分。首先，领域的顶层本体要形式化，它引入一般性的领域概念及概念间的关系。所有本体中有一个特别有趣的关系类型是超类-子类关系。DL（某种意义上是强制可判定性）严格禁止在概念间设定循环关系。超类关系隐含着概念上的层次关系，可以定义属性继承，很多地方类似于面向对象程序设计。由于历史原因，基于描述逻辑的领域知识表示中，这第一部分常被称作TBox（或术语知识）。

DL语言中的概念与一元谓词相关。举个例子，一个机器人导航领域的本体可以包括 *Door*、*Location* 等概念，概念的层次是通过定义概念相等（=）或子概念属性（如，$Room\subseteq Location$ 和 $Corridor\subseteq Location$）来建立的。概念可以用概念合取、析取和否定（分别用∩、∪和¬ 表示）组合而成，如，可以将概念如此定义：$Location=Room\cup Corridor$、$Door=Closed\cup Open$ 和 $Open=\neg Closed$。

DL语言中的任务与二元谓词对应，如引向（*leadsTo*）门和某个位置。任务的逆、交和并可以如预期的一样定义，如 $leadsTo=leadsFrom^{-1}$ 就是定义逆任务的一例。任务可以复合，如定义 $adjacent=leadsFrom\circ leadsTo$（位置 $l$ 邻接 $m$ 当且仅当通过某个门能从 $l$ 到 $m$）。最后，概念与任务可以组合起来定义新的概念和任务。特别地，也可以用量词限定任务填充算子，即，可以用个体对象（参见后面的内容）连续替换任务参数，例如，可以定义 $BlockedLoc=Location\cap\neg\exists leadsFrom.Open$（假定了算子的直觉绑定规则）。不同的DL变种中，其他可用的算子有所不同，详见参考文献［9.3］。

作为用DL表示领域知识的第二部分，需要给概念和任务引入个体对象，领域知识表示的这一部分称作ABox或断言知识，如，可以断言 $Room(R_{509})$、$leadsTo(D_{509},R_{509})$ 和 $Closed(D_{509})$。

DL提供大量推理服务，都是基于已知的TBox和ABox中的逻辑推理，它们包含概念定义的一致性、概念的包容与分离、ABox关于TBox的一致性以及概念与任务实例，在DL中所有这些都是可判定的。例如，给定了TBox和ABox的上述基本内容，就可以推断出每一项都是一致的，且有 $BlockedLoc(R_{509})$（请注意，这里只有 $D_{509}$ 号门能通向房间 $R_{509}$）。这些DL推理在理论上很难处理，但在很多实际情况中运行效率还是很高的。

参考文献［9.3］全面综述了DL研究现状。

2004年，WWW联盟（W3C）定义了Web本体语言（OWL）[9.12]，作为语义网络的技术基础。该语言中有一部分是OWL-DL，从某种意义上就是前已述及的经典的DL。OWL-DL本体已经可以通过Web公开使用，参见参考文献［9.13］中的入门介绍。

### 9.1.2 概率理论

无论什么时候要表示实际知识，基于逻辑的KR形式化方法都是值得考虑的，由此可以进行演绎推理。但机器人要用到的关于环境的部分知识，并不真正具备这一特点。选择一种KR形式化方法（就如同选择一种程序设计语言），从某种程度上是一种尝试、经验、熟悉度或集成考虑。KR术语中，某些领域形式化方法的认知适用性已经不再是可以精确判定的问题。

然而，逻辑（至少其经典变种）不能满足某些应用类型的知识表示需求。处理不确定性问题便是其一，甚至可以说是全部，因为不确定性本质上就是个超载的概念。知识不足是其一个方面，这种情况逻辑方法可以处理，因为一些事实的真假值可以保持在未确定状态。但若知识库中如有太多的未确定知识，逻辑方法便无法进行令人感兴趣的演绎推理，因为这时候在逻辑上一切皆有可能。不过，直觉上不同的可能结果在“可能性”上会有显著区别。

KR领域中采用贝叶斯概率作为表示和推理此类不确定性问题的手段，它利用的是事实间的相关性而不是严格蕴含。需要注意的是，这种方法融合了缺少精确的、完备的知识的各种来源。有些知识是未知的，要么从原理上就是不可知的，要么就是建立精确理论或确定进行可靠演绎推理相关的全部信息的代价太高。无论哪种情况，用概率（而不是用二值真值）都可以求得近似结果。需要注意的是，这里真值的概念与经典逻辑中的是相同的，客观地，一个事实被假定要么为真，要么为假，概率就是对相信事实为真的主观程度进行建模。需要注意的是，这与模糊逻辑不同，后面会简要讲解（参见9.2.2节）。

与9.1.1节类似，这里假定对概率论的基本概念都熟悉。参考文献［9.4］中的第13章有很好的基础性介绍。想再深入了解，还有大量的各种导论教材。参考文献［9.14］是其中较新出版的一部。

贝叶斯概率理论中的推理其要义是：已知其他先验概率及所依赖的相关概率，来推断一些感兴趣事件的概率。实际上，有一种重要的概率推理叫诊断推理，即，已知因果规则（指定从因到果的条件概率），从观察到的结果倒推回隐含在背后的原因。于是，对于潜在的原因$C$和观察到的结果$E$，问题表述为：已知先验概率$P(C)$和$P(E)$，确定后验概率$P(C\mid E)$。解当然是由贝叶斯规则给出如下：

$$P(C\mid E)=\frac{P(E\mid C)P(C)}{P(E)}$$

然而，和逻辑推理一样，这个理论上很有吸引力的原理已经被证明：如果只是朴素地应用则是不实用的。考虑到可能不只有1个结果$E$被观察到，而是$n$个，而且并不都是条件独立的。用贝叶斯规则的一般形式，计算正确的后验概率是很简单的，但谁能指定所涉及的所有概率呢？最坏情况是$O(2^n)$，其中$n$在实际中轻而易举就会达到几百。

直到20世纪80年代末期，这个问题才或多或少地解决了。一种方式是将$E_i$故意看成是独立的，然后简单地用$n$个独立条件概率$P(E_i\mid C)$近似完全的联合概率分布。参考文献［9.4］第14.7节对此及其他同类方法进行了综述。

贝叶斯网络（BN）从其问世[9.15]一直沿用至今。其思想是在有向循环图中表示出随机变量，其中，当且仅当一个节点直接条件依赖于对应的父节点变量时，该节点就是父节点集的直接前驱。于是，巨大的完全概率分布就被无损地分解成通常很小的局部联合概率，其诀窍是使用许多已知的变量间的条件独立来大大降低表示和推理的难度。

图9.1给出了一个简单的贝叶斯网络，表示$D$由$B$和$C$引起，由条件概率表给出的概率指定局部的联合概率分布。此外，图中的结构表明，知道了$B$和$C$，$D$就独立于$A$（知道了父节点时，该节点便独立于其祖先），知道了$A$，$B$便独立于$C$，即，$P(C\mid A,B)=P(C\mid A)$和$P(B\mid A,C)=P(B\mid A)$。网络可以双向利用：自底向上，可以使用已知的条件概率去解释观察到的现象（诊断），例如，如果观察到$D$，可以推断出更有可能的原因（$B$或$C$）；自顶向下，可以传播证据来计算现象出现的概率，如，已知$A$（原因）计算$D$的概率。

对于随着时间演化的系统，使用贝叶斯网络的不变结构以便使用相同的推理过程更新变量值这一点很重要。这样的网络称为动态贝叶斯网络（DBN）。图9.2给出了一个这样的网络，从时刻$T$到时刻$T+1$。

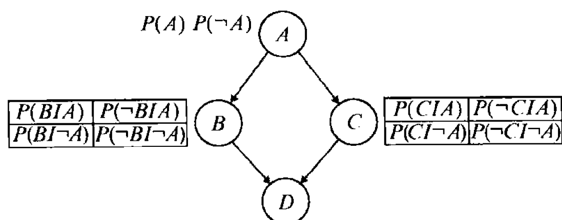



图 9.1 附带条件概率表的简单贝叶斯网络结构（D 的条件概率表依赖于 B 和 C，此处省略。）

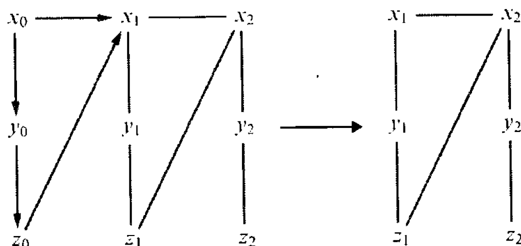



图 9.2 两个相继时间步的动态贝叶斯网络实例（其结构不随时间改变）

在 9.3.3 节中，还会看到专门用于不确定性规划的概率技术，如马尔可夫决策过程。

## 9.2 机器人的知识表示问题

本章余下内容中的推理方法与一般应用均使用（从某种程度上讲）逻辑的基本形式化方法的变种或贝叶斯概率理论。两种形式化方法（特别是当包含变种时）都如此通用和有力，以至于可以在任何 KR 应用中有所贡献。

然而，机器人控制系统的推理与其他基于知识的系统中的推理在很多方面都有所不同。基于知识的机器人是一个嵌入式系统，工作在闭环控制中，通常是在资源相当有限的动态环境中，它必须解译自己的传感器输入，至少要自主执行一部分判断为适当的动作。因此，基于知识的机器人控制有特殊需要，可以说，这些需要在离线的专家系统中是没有的，专家系统通过提示专业领域中有经验的人来输入信息，然后将输出结果写入到文档中，给更有经验的人去分析，如果他们感觉正确，还可能去执行。自然地，这种区别形成了机器人控制对 KR 的特殊需要，这种特殊需要可能许多其他 KR 用户都不感兴趣，处于主流领域之外。本节简要地探讨三个问题。

正式开始之前，先说几句知识表示在设计智能机器人或智慧机器人时的作用问题。已有确凿的证据表明，一些无需表示的智能形式[9.16]已在机器人中得以实现。本书第 38 章会介绍一些这方面的背景知识。显然，如果根据符号进行的推理不能以真实传感数据和执行器控制为基础，那最复杂的表示和推理系统对机器人也毫无用处。再者，表示与推理还能对机器人性能改善、软件设计和用户接口开发大有裨益，例如，野外机器人、服务机器人和介入机器人等应用（见 Part F）。混合机器人控制系统（见第 8 章）是当前常用的一种方式，它将 KR 技术实例与机器人中的反应控制组件融合在一起。

### 9.2.1 高级机器人控制逻辑

机器人领域本质上是动态的，包括至少一个物理 Agent，即机器人。用基于逻辑的形式化方法进行表示，会产生一些概念上和技术上的问题，参考文献［9.4］的第 10.3 节对此进行了介绍。

很简单，这些来自于动作逻辑模型的精确表示和高效推理的需要。从逻辑上讲，一个独立动作改变有限数量事实的真值，而保持其他的不变。例如，在某抽象级别上将从一处走到另一处的动作建模成原子动作，它在执行前后会改变机器人的位置。依靠模型化，它可以改变电池状态和里程数，但不改变建筑物的布局和总统的名字。用逻辑语言精确地形式化动作以使事实（应用动作序列后可能改变也可能不变）可被有效推理的问题，已经形成了一个术语，称为“框架问题”。文献中已对此多有关注，也有大量实际的解决方案。

另一个问题涉及由独立变化的事实做出的必要的基于知识的更新。例如，考虑一个机器人坐在某扇门 D 之前（由自定位系统告知其位置）相信门 D 是开着的，但机器人感知到的是一扇关着的门。逻辑上，这是一个矛盾。目前从理论上有几种方法可以使知识与感知一致。一种方法是假定 D 是从学习到它是开着的之后关上的，这可能是最直观的解释。逻辑上，恰如预期的一样，例如，或者感知失效，或者机器人是被时空挪移到本就关着的门前。在这些解释中，有些在表面上看起来更合理，有些在逻辑上需要取消更少的基于知识的公式从而成为首选。理想状态下，在用新信息替换旧信息时，必须确认已经取消的公式的推论不再可信。

理论上，这些问题要多难有多难。实际上，它们可以被充分限定在一个精确的逻辑框架内求解。根据情境演算的经典范例[9.17]，典型的求解方案会在公式中采用一些情境或保持时间的概念，这使得变化可以被跟踪。典型的求解方案也会放弃推理的完备性，而采用类似 PROLOG 的推理引擎。这样的解决方案在

机器人控制中已见报道的应用有三个案例，即GOLOG[9.18]、事件演算[9.19]和FLUX[9.20]。

### 9.2.2 模糊逻辑方法

由于历史原因，处理经典AI问题的大量方法和技术已经超出了AI的核心范围，这些方法在不同的领域中有时被称作软计算，有时被称作计算智能，其中就包括模糊逻辑。模糊逻辑显然也是一种符号推理方法，而且，它与模糊控制有着共同的理论基础。因为模糊控制已经以这样或那样的方式大量应用在机器人控制器中，所以模糊逻辑也理所当然地成为机器人知识表示的一种形式化方法。

首先，模糊逻辑的本体论基础与FOPL和概率理论的有所不同，后者假定谓词客观上或为真或为假，可能不知道其真值，但它确实存在。模糊逻辑则假定真值客观上以某种程度呈现。许多自然语言范畴具有模糊特点，如，说某人“大”，可以解释为在某些极端情况下客观上是真或假，但如何客观地说一个高185cm重80kg的男人算不算大呢？

模糊逻辑被看成是命题逻辑（在此领域中常被称作清晰逻辑）的推广。因此，模糊逻辑使用规范的联结词∧、∨、¬等，但要将其真值函数的定义从集合{0，1}推广到[0，1]区间。有几种看起来挺合理的推广方法，常用的一种是定义：

$$\text{value}(\neg P)=1-\text{value}(P)$$

$$\text{value}(P\vee Q)=\max\{\text{value}(P),\text{value}(Q)\}$$

其他联结词的定义可以如法炮制，已有大量不同的定义付诸应用。

模糊演绎推理与命题演绎推理目的典型地不同，因此推理机制也不同。一些模糊逻辑理论中的可满足性通常已经不再是人们感兴趣的问题，因为它也只是在某种程度上的可满足，而大多数模糊系统通常都能至少有点儿可满足性。模糊逻辑知识库通常用在模糊推理规则集上的前向链推理方式中，从其他已知的模糊值推断出模糊变量的模糊值，这就是模糊知识库成功应用于机器人控制器的方式，如用在Saphira控制结构中[9.21]。举例来说，用如下规则确定移动机器人的转向角是有意义的：

**if**(freeRange *right is_narrow*) ∧ (freeRange *front is_medium*) ∧ (freeRange *left is_wide*)

**then** set angle *medium_left*

其中，斜体部分（*right*、*is_narrow* 等）是模糊变量。在某特定时刻，前提变量的模糊真值可通过定义变量映射然后读取距离传感器数据来确定，如将 *is_medium* 映射到均值为2m的正态分布上，设置角度为 *medium_left* 可以映射为以向左30°为均值的正态分布上，而实际设置的角度最终将通过去模糊化来计算，即，将最适用的规则或规则集的模糊变量组合起来，一个看起来比较合理的标量值可能是结果模糊值的重心。

尽管在软计算与核心AI之间存在着世界观上的争论，但模糊推理组件与其他AI组件还是能很好地共处于一个机器人控制器中，各司其职，Saphira体系结构便是一例。

### 9.2.3 时间约束推理

与很多一般的AI系统不同，为了应对环境的动态性，机器人必须基于传感数据实时进行决策，因此它们的决策应该在有限的时间内生成。如果这些决策需要考虑未来计划，即如果需要规划，问题就来了——实时决策实际上与规划的无界性并不兼容（规划的通用形式是个很难处理的问题），再加上基于FOPL推理机制又只是半可判定的。

为了考虑实时约束，人们提出了反应规划等方法[9.22]，均放弃了太多的超前规划（一次只规划一步）。然后，时间约束的解决方案通常来自机器人系统的体系结构设计（参见第8章），它集成决策层和反应层（可以在有限时间内做出反应）。决策层常包含规划器和监控系统，用预定义的过程或脚本确保任务执行监视。该监视组件必须既是目标驱动的又是事件驱动的，目标驱动用以完成任务，事件驱动用以对环境变化做出反应。过程推理系统（PRS[9.23,24]）便是这样的一个例子，它包括一个过程集、一个由感知和系统状态演化来更新的数据库以及一个解释器，解释器用以根据数据库的内容启动适用的过程。

随时算法[9.25,26]㊀都被开发成对时间约束的可能响应。其基本思想是，算法操作时间越长，其解越接近最优。然而，如果缩短时间，算法也能产生一个解，可能远未达到最优，但可使系统继续执行而不用被阻塞等待决策结果。随时算法评价解的质量，并用性能配置文件预测该质量如何随着时间的推移而被改善。

㊀ 译者注：一类随时可以中断执行并输出近似最优解的算法。

## 9.3　动作规划

本章余下的内容将从推理方法转向两类推理应用，即动作规划与学习。

从传统 AI 的意义上讲，规划意味着 Agent 对要达到给定目标集所要采取的一系列动作进行慎思，调度意味着给动作集分配时间和其他潜在的资源，以使满足给定的时限并遵守时间约束。这两个活动在概念上是不同的，并在历史上常被以级联方式处理——先规划，再调度。不过，最近随着更多高效时序推理方法和规划算法的出现，有将二者以集成方式处理的趋势。这是因为，先根据一些指标生成最优规划，再为此规划设计最优调度，可能无法产生一个时间和资源上都是最优的调度。但将二者分开考虑也是有意义的，因为它们并不总是需要组合起来。总之，本书将跳过调度的集成，参考文献［9.27］第Ⅳ部分有一个全面的综述。

机器人控制已在规划的最先应用之列，如 STRIPS 系统[9.28,29]就已被用来为 SHAKEY[9.30]机器人生成规划（即待执行的抽象级动作序列）。在机器人控制体系结构中，包含抽象动作的规划要被分解成物理操作，这些物理操作要有足够的柔性，除了应对偶然性、意外性和失效外还要能实现规划，这正如人对规划的智能用法的直观期望一样。业已证明，设计这样一种机器人控制体系结构是非常重要的。

本部分内容从如何为规划器的规划域建模入手，然后在 9.3.2 节介绍在很多简化假设下高效工作的规划算法，9.3.3 节松弛这些假设，处理不确定性（如可观测性缺失）问题，9.3.4 节收篇简要探讨机器人规划。

想全面了解动作规划有关内容，推荐阅读参考文献［9.27］。在 AI 教科书（如参考文献［9.4］中的第 11、12、16 和 17 等章节）中会有关于动作规划的简介。参考文献［9.31］对规划方法的最新进展有简要的综述。*International Conference on Automated Planning and Scheduling*（*ICAPS*）是目前本领域最主要的国际会议，每年召开一次。PLANET 在线研究数据库[9.32]中包含一系列持续更新的体现目前发展水平的规划器、调度器和相关工具的链接。参考文献［9.33］中包含一个当前现状的应用前景展望以及一个 2003 年末时对这一领域的前景展望。

### 9.3.1　规划域描述

Agent 对行动过程的慎思需要将它的可能动作都表示出来，包括动作执行效果、对环境随时间变化保持跟踪并合理处理任何不确定性和缺少信息的情况。从这个意义上讲，规划涵盖了本章中前面介绍的各种推理方法。

慎思的极端形式是事前进行环境仿真，涉及 Agent 的各种可能动作，然后从中选择出看起来最好的动作予以执行。实际上，至少有两个理由可以说明这是不可能的。首先，通常并非真实仿真所需的全部信息都是可用的，规划是为了真实环境，其中许多参数都是未知或不可知的，且不在 Agent 控制之下；其次，即使完全仿真的全部信息都是已知的，但是很有可能因为计算复杂度高而使得真实环境总是超前于仿真。因此，规划域表示要故意抽象掉很多或大部分细节，以便使得有效规划成为可能。正如在 KR 的所有形式中一样，域模型的精确性和完备性需要对推理速度进行折中。

究竟有多少细节和哪些细节要表示，这是建立规划系统时要做出的工程决策。因此，对域可能要做些简化假设，主要包括：有限性（域只有有限个对象、动作和状态）；信息完备性（规划器在规划时具备所有相关信息）；确定性（每个动作的执行结果都是确定的）；瞬时性（动作没有持续时间）；停滞性（规划期间环境不发生改变）。

通常，限制性假设可以提高算法效率，但在执行时当简化解遭遇真实环境时便可能出现问题。值得注意的是，使用简化域模型绝不意味着假定环境客观上就是如此。举例来说，仅对标准情况（假定最简情况）进行规划然后处理执行时发生的各种异常是有意义的。在机器人规划中，这种思想可以追溯到 SHAKEY[9.29]。

目前常用的域表示法主要有两类。稍后会介绍 PDDL 型的描述，9.3.3 节将对不确定域表示法进行粗略介绍。此外，与这两类域表示法正交的演绎规划有多种形式，它们使用纯逻辑表示法的一些变种，有关介绍内容可参见参考文献［9.27］中的第 12 章。

秉承上述所有假设的简单特点，域描述主要包含两部分。第一部分是一个受限一阶谓词语言$\mathcal{L}$的规格说明，由与环境建模有关的表示关系的谓词符号和表示对象的常量构成；第二部分是一个动作描述集$\mathcal{A}$，对于每个动作 $a \in \mathcal{A}$，都由前件 $\mathrm{pre}(a)$ 和后件 $\mathrm{post}(a)$ 构成，前件即$\mathcal{L}$中的事实集，当其值为真时 $a$ 方可执行；后件也是$\mathcal{L}$中的事实集（正的或负的），执行 $a$ 后其值变为真。

举个简单的例子（源自参考文献［9.27］第 35

页)，表9.1给出了在相邻接的位置 $l$ 到位置 $m$ 移动机器人 $r$ 的动作图式。在规划过程中，通过用常量对象代换变量，动作图式被实例化成规划中发生的动作。

**表9.1　相邻接的位置 $l$ 到位置 $m$ 移动机器人 $r$ 动作图式**

```
(:action move
:parameters (? r-robot ? l ? m-location)
:precondition(and(adjacent ? l ? m)
(at ? r ? l)
(not(occupied ? m)))
:effect(and(at ? r ? m)(occupied ? m)
(not(occupied ? l))(not(at ? r ? l))))
```

给定一个域，那么一个具体的规划问题就用 $\mathcal{L}$ 语言由下列组件确定：

1）初始状态 $I$，是 $\mathcal{L}$ 语言中在开始执行之前即为真的所有事实的集合。

2）目标条件 $G$，是 $\mathcal{L}$ 语言中由执行一个规划所诱导的事实集。

在该框架下的规划是典型的实际动作（自由变量）的偏序集，这些实际动作是要按照顺序执行的。

规划域描述语言（PDDL）[9.34]是目前用于描述规划域的事实上的标准。实际上，PDDL代表着一整类语言，允许或禁止诸如参数类型、恒等处理、条件动作效果以及一些FOPL语句的限制形式等特征。举一个条件结果的例子，考虑机器人在 *move* 动作中可不可以加载一些容器“? $c$”，那么，作为一个附加结果指定“? $c$”将随机器人移动：

```
(when(loaded ? r ? c)
                              % condition
(and(at ? c ? m)(not(at ? c ? l))))
                                 % effect.
```

除了上述形式，原始的PDDL还有些扩展版本，其中PDDL2.1[9.35]是最值得一提的，它允许信息被表示成时序规划，如，允许动作有持续时间。

规划是计算困难的。对于PDDL型问题的命题变种（即用有限的语言 $\mathcal{L}$），规划的存在性当然是可判定的，但求解规划问题是P空间完全的[9.36]。

### 9.3.2　偏序规划生成

许多规划系统及其基础规划算法都接受前已述及的限制性假设，即信息的完备性、确定性、瞬时性和停滞性，因此，刚才给出的规划问题的定义都适用。于是，要找的那种规划就是一个动作集，通过执行这些动作可将初始情境变换到目标条件为真的情境（目标情境不必唯一）。对此规划模型不必做有限性假设，但为简化起见我们还是要这样做，这意味着所有动作实例可以被假设为是真实的。

通常，规划中的动作不能以任意顺序随意执行，但也必须按一定的顺序执行，以确保每个动作的所有前件在该动作执行的一刻为真。这个顺序不必是全序的或线性的，但可以是偏序的或非线性的。相应类型的规划被称为非线性或偏序规划，总之，定义为一个动作实例集 $A$ 和偏序关系 $<$ 对 $<A, <>$。无序动作可以以任意顺序执行，考虑到动作建模，它们也可以并发执行，这意味着在同一个原子时间步内执行（假设具备瞬时性）。

对于一个规划，作为给定规划问题的一个解，每个动作 $a \in A$，在每个与 $<$ 兼容的可能执行顺序中都需要其前件为真，按任何一种可能顺序执行之后，目标条件必须为真。

自20世纪七八十年代的一阶偏序规划方法开始，到SNLP（系统非线性规划）算法[9.37]及其衍生算法达到巅峰状态，一系列高效的偏序规划算法应运而生，这些算法通过各种技术来提高效率，如系统化、反向链、最小承诺、密集推理等。参考文献［9.4］中的第11.3节对此作了介绍，并提供了一些参考文献。按这条线下来的方法通常被称为传统规划。

下面是生成一个解规划的算法思想：从仅包含初始事实和目标条件的空规划开始，迭代检查在当前规划中出现的所有条件在所有 $<$ 允许的执行顺序中是否为真，如果发现某条件 $c$ 还不满足，可以通过以下两种方法来处理：或者插入一个新的动作作为结果生成 $c$，或者调整规划中已有的一个动作使 $c$ 在需要的时候变为真。如果所有动作彼此独立，这样工作起来效率会很高，但通常它们并不独立——一个 $c$ 一旦在规划中实现，它就会由于某个动作结果中包括 $\neg c$ 而威胁到其后的条件。传统规划系统中，人们在算法规则或启发式方面做了不少努力，探究了如何有效阻止或处理规划中的子目标相互作用。

将子规划预定义为宏是很多应用系统中都采用的技术，宏在规划内形成一种分层结构，由此得名分层任务网络（HTN），参考文献［9.27］中第11章对此有介绍。形式上，子规划可以表示成任务，即带有前件和后件的动作，规划时可以拓展到其底层子规划。任务可以分层。只要还包含未扩展的任务，规划

就没有完成。之所以使用HTN是由于规划域建模者知道，通常（实际上，在所有的实际应用中）反复使用的子规划不必由规划器每次从头开始构造。而且，HTN的分层特性可以使更大规模的规划以易于人管理的方式展现出来。HTN已被用了很长时间，效果甚佳。SIPE（交互规划与执行监控系统）[9.38]是其中适用于实际应用的首选规划器，最近的SHOP（简单分层有序规划器）[9.39]是其中的佼佼者。

从GRAPHPLAN[9.40]开始，这一领域便致力于开发偏序规划算法（被参考文献［9.27］称为新传统规划）的相关技术，偏序规划算法背离了传统算法，而保持生成顶级性能规划器。下面将详细介绍其中的两个方法，即规划图和变换成可满足性问题。

近来对规划器性能的改善大部分都归功于把规划形式化为一类特殊的搜索问题，于是强有力的启发式方法便可派上用场，详见参考文献［9.27］第Ⅲ部分。

**1. 规划图**

GRAPHPLAN的关键思想之一是从预处理阶段开始构建规划，即：

1）确定在$n$个时间步内可解的必要条件（其中$n$在找到解之前一直递增）。

2）输出一个结构化表示，如果存在一个$n$时间步偏序规划，便可基于此结构将其相对高效地抽取出来。

这种结构便是规划图（PG），即一个真实事实节点和真实动作节点的分层有向无环二部图，其中事实节点和动作节点的层次可以互换。图9.3给出了有3个接续层的示意图。

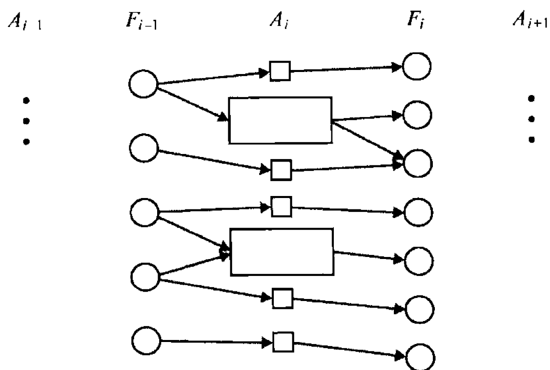



**图9.3 一个规划图结构（圆圈代表事实节点，矩形框代表动作节点，小方框代表伪算子）**

第一层$F_0$由代表问题完全初始情境的全部事实节点构成，最后一层也是事实层。当且仅当事实在动作前件之中时，用边连接相应事实节点和动作节点；当且仅当事实在动作结果中时，将动作节点与事实节点相连。除了域描述的动作集$A$，PG还包括伪动作用于将事实层的每个事实复制到下一个事实层（在语法上，$f$的伪动作与$f$具有完全一样的前件和结果）。PG在任一$A_i$层中包含动作节点（对应可用的全部动作），给定$F_{i-1}$的事实，$F_i$包含所有$A_i$动作后件中包含的全部事实。

对于一个给定的有限的规划问题，PG是由层内节点序列唯一确定的。它无需搜索就可扩展，只需从最后一个事实层向前链接，把所有适用的动作插入到下一个动作层，将这些动作的结果插入到下一个事实层。动作和事实集随着层数单调增长，因此PG的生成可以在有限域内终止。

规划问题可解的必要条件是存在一个事实层包含所有目标事实。如果能在$n$个时间步发现该层，PG暂停扩展并尝试提取规划，向后收集解规划。从$F_n$层中的目标事实开始，追溯$F_{i-1}$层中的动作$A_i$的前件，从生成$F_i$中事实所需的每个动作$A_i$中选出一系列动作。

规划的提取不一定能成功，因为所需动作可能在共同的动作层中相互排斥——与传统规划中的子目标相互作用类似。因此，某$F_n$中的目标条件只是可解的必要条件，而非充分条件。一般情况下，从PG中提取规划要用到搜索，尽管比传统规划算法中的搜索空间要小得多，但通常远远超过最初构建PG。

PG的主要缺点是它们要求域有限的（即命题的），而且，其语言$\mathcal{L}$必须大小有限，因为所有的事实和动作实例都要为扩展PG而明确地构建出来。

**2. 作为可满足性问题的规划**

从规划研究的早期开始，人们就已经尝试把规划生成问题表示成传统逻辑中的推理问题[9.41]。这样做因为两个原因也许很有用：首先，已有有效的逻辑推理器对规划可能有用，节省了研究专门规划算法的气力；其次，域中的逻辑推理将被无缝集成到规划中，从而可以白白得到一种强有力的域表示法。

FOPL中对变化与不变的有效表示已经被归为框架问题㊀，详见参考文献［9.4］的第10.3节的介绍。

㊀ 译者注：框架问题主要研究情境演算中不变的事物如何表示。

同时，有若干种方法以各种逻辑形式来表示规划问题，并有一些演绎规划器在那个时代达到了顶级性能。例如，TALplanner[9.42] 采用了时序逻辑表示法，Blackbox[9.43] 采用命题逻辑编码，其规划算法结合了 PG。命题逻辑编码为使用有效的模型检查器（参见9.1节）进行推理提供了选择。这对 PG 任何时候都是适用的。参考文献［9.27］中的第7章对此进行了介绍。

有限规划问题的命题表示法可以从给定域和问题描述比照先验图式得出，如同为 Blackbox 开发的方法一样。事实被指定附加的情境参数，带有在情境间迁移的动作。初始事实、目标事实和动作结果的命题逻辑表示很简单。令人感兴趣的部分（参见9.2.1节）由解释性框架公理构成，即一个形式化公理集，两种情境间事实真值的任何变化都需要应用动作做出解释，在该动作的结果中具有改变的事实值。

### 9.3.3 不确定性规划

虽然信息完备性、确定性和停滞性在某个抽象级对规划域通常是有用的近似，但在其他情形却未必有用，而这绝不意味着正好相反的情形就是对的，这种情况下，规划几乎也就没什么意义了。很多域表现出未知的、随机的和动态的一面，但依然提供一定程度的信息和控制，利用这个来弥补信息和控制的不足便是不确定性规划的思想，根据域模型不完整性的内容和程度，有不同的形式，本节扼要介绍其中的一种，详细介绍可以参见参考文献［9.27］的第Ⅴ部分和参考文献［9.4］的第12、16和17章。参考文献［9.44］第Ⅳ部分介绍了机器人环境中的概率规划技术。参考文献［9.45］建立了前述的传统规划和各种不确定性规划的统一视图。

假定某些动作可能具有不确定性结果，且这些结果出现的相对频率信息（近似的或估计的）可用。在这种情况下，概率框架下的表示法便应运而生，如马尔可夫决策过程（MDP）。MDP 用有限状态集 $S$、有限动作集 $A$ 和动作模型表示域。动作模型设定：对于每个 $a \in A$，在状态 $s$ 执行 $a$ 终止于状态 $s'$ 的条件概率分布为 $P_a(s' \mid s)$。例如，假定机器人的当前位置是状态描述的一部分，从当前位置 $l$ 移动到邻接的自由位置 $m$ 的高层动作成功移动到 $m$ 的情况占95%，未指定（可能是未知）的条件使机器人留在位置 $l$ 的情况占剩下的5%。

状态伴随着效用，动作的耗费可以建模成结果状态的负效用。在这种框架下的规划意味着要寻找一个动作序列，不仅考虑到每个算子的惟一标准结果，而且考虑到所有可能的结果，包括那些不太可能但会产生很大耗费的结果（考虑在一个陡峭的楼梯附近轮式平台可能的运动误差）。

在此框架下的规划就是决策论中的策略，即从状态映射到动作的函数。基本规划算法有值迭代（VI）和策略迭代（PI，见参考文献［9.4］第17章）。对有限状态集，二者都收敛到最优策略。其差别是 VI 是通过逼近给定状态最优策略的真实效用来实现的，而 PI 只寻找最优策略，节省了确定其精确效用值的气力。

MDP 还假设状态在执行时是可观察的，即Agent 能够确切知道自己处于什么状态，并能在策略中确切地选取相应的分支，这在一些机器人应用中可能不方便。进一步跳过可观测性假设，便引出了部分可观测 MDP（POMDP）。POMDP 在 MDP 中增加一个观测模型，由 Agent 进行的可能观测的有限集 $O$ 及在状态 $s$ 观察 $o$ 的条件概率 $P(o \mid s)$ 构成。POMDP 也被用于移动机器人定位与标图的形式模型（见第37章）。

POMDP 的最优策略是仿照 MDP 来定义的，但人们发现它们计算困难。一种常用的方法是考虑信念空间而不是状态空间，即状态空间上的概率分布空间，对应 Agent 在执行一个动作或观测之后对自己可能处于状态空间中的位置的信念。信念空间是完全可观测的（Agent 确切知道其信念），因此 POMDP 可以变换成信念空间上的 MDP，于是 VI 和 PI 算法便可用了。信念空间以指数级大于状态空间，且是连续的。因此，只有小状态空间上的 POMDP 可以用这种方式有效处理。还有些逼近方法，见参考文献［9.4］的第17章。

### 9.3.4 机器人规划

机器人规划（或基于规划的机器人控制）一词在 AI 领域中是指在机器人（通常指自主移动机器人）控制软件中使用前述规划方法，并非意味着要替换机器人技术中现有的运动或路径规划方法（参见第5章、第26章和第35章），而是对更一般的动作规划做些补充。在机器人控制中使用规划有若干目的，无论这些规划是由机器人在线自动生成的，还是从规划库中取出的。提供一种高度细化的机器人操作描述，可用于优化全部行为，可用于如任务级遥操作一样与人交互，可用于如多机器人协调（参见第40章）中的一样与伙伴机器人通信，可用于在高粒度块中学习复杂的动作结构，可用于根据环境变化自适

应行为，也可在不同的应用规模上通过为程序员提供一种有意义的抽象层而用于机器人控制编码工程。参考文献 [9.27] 第 20 章阐述了这些目的，参考文献 [9.46] 收集了跨越这些目的的研究论文，参考文献 [9.33] 第 5 章对本领域最近的应用前景进行了展望。

由于机器人动作规划的目的和抽象级别多种多样，没有哪一种单一的规划方法能与之完全对应上，当然任何一种规划方法又都有用。于是，机器人规划一词通常被按照参考文献 [9.47] 中表述的宽泛含义使用，即“是机器人程序的一部分，机器人对其未来的执行进行显示的推理”。无论机器人采用哪种规划，对闭环执行和监控都有需求，从规划方法学的角度看，机器人规划的内容就源自这些需求。从技术上讲，这些需求形成了对机器人规划的约束，尤其是对域语言、动作形式化及机器人控制体系结构的约束。

给定规划域的域语言$\mathcal{L}$通常是精心地手工构建的，因为糟糕的设计决策可能使同样规划器的规划时间有着天壤之别。对于机器人规划，还有另外一个问题：命题（至少那些为规划生成和执行监控而需观测的命题）需要完全依靠传感器数据来有效确定。一般而言，这便是 AI 中符号接地问题[9.1,2]（参见 9.1 节）。目前解决此问题最务实的做法是将域语言的动态部分限制到可以被有效监控的命题上。

动作形式化最好应支持规划生成和执行监控，因此要有足够的表达能力，比如类似于实时规划语言，此外还要有足够的限制以对规划进行有效推理。参考文献 [9.48] 讨论了这些问题，并对已有方法进行了较小范围的综述。

最后，机器人控制体系结构必须确定规划过程和规划结果要被适当地集成到整个机器人控制中。特别是来自新近规划（如果有）的建议与来自其他控制组件（如并发反应行为组件）的任何活动必须能有效协商，详见第 8 章。

## 9.4　机器人学习

机器学习是 AI 研究领域中最受关注的问题之一，学习与智能之间的联系是显而易见的。学习程序的首例是 1959 年 Samuel 编写的西洋棋程序。学习的定义本身与智能的定义一样具有一般性，它基本上可以表述为基于经验改善系统自身性能或知识的能力。在 AI 中，典型的学习方法主要是通过演绎、归纳或类比方法操作符号表示以产生新知识。统计学习涵盖了数据分类方法（即从样本推导模型），这是在机器人技术及其他领域中广泛使用的学习方法。如果表示法是概率的，就采用贝叶斯推理。神经网络（基于生物神经元的形式模型）涵盖了与统计学习相关的数据分类技术。

强化学习是另一种在机器人中比较流行的学习方法，它与 MDP 和动态规划密切相关。它主要是采用与每个机器人动作关联的强化信号（奖赏）来对正确响应进行强化。

学习也可以根据系统动作后是否有教师能显式提供正确答案（即，能对系统进行奖惩或只有系统自身性能可用。）而分成有监督和无监督两类。

本节综述了机器人领域感兴趣的最重要的学习方法。学习在机器人控制中的应用贯穿本书始终，如第 37 章学习标图、第 60 章学习复杂的马达协调模式以及第 61 章的演化学习。

### 9.4.1　归纳逻辑学习

归纳逻辑规划（ILP）[9.49] 是主要的有监督符号学习方法之一，它是基于逻辑表示法和一阶逻辑推理的，并使用上下文知识，即已经获得的知识。ILP 的目标是给定返回真或假值变量集和所谓的背景知识来综合（或学习）逻辑程序，程序对观测形成一个解释。这些程序当然不是唯一的。因此，其难点在于寻找与数据兼容的最小（充分必要的）程序，即对正变量返回真、对负变量返回假。该程序也必须能被泛化，即应用到新的实例上时能产生正确答案。一般而言，IPL 并不容易处理。参考文献 [9.4] 中的第 19.5 节对此作了介绍。

### 9.4.2　统计学习与神经网络

统计学习被广泛用于机器人和计算机视觉领域，涵盖了诸如贝叶斯学习、核方法和神经网络等若干技术。它以从数据中学习模型为目标将模式划分到类别中，数据被看成随机变量，数据的值为模型提供了采样。首先要有一个训练阶段，此阶段中将数据集及关联标签提呈给算法（有监督学习）。然后算法会自己对数据进行标注。训练阶段的目标是最小化分类误差（或风险，或期望损失）。推荐阅读参考文献 [9.4] 第 20 章进行一般了解。

贝叶斯学习是贝叶斯规则的一种应用——根据给定数据计算给定假设（数据所属的类别标签）的概率。训练阶段提供数据对每一类的似然程度 $P(d \mid C_i)$。分类还需要类分布的先验知识 $P(C_i)$，这样才能应用贝叶斯规则。贝叶斯学习有若干变种，如极大似然法（ML）和期望最大化算法（EM）。贝叶

斯技术具有中等计算耗费，易于实现，但不能在线学习。

神经网络（NN）由加权连接的基本计算单元（神经元）构成。每个单元计算其输入的加权和，如果大于给定阈值（常用 Sigmoid 函数）则激活或点火，这便具备了分类器的基础。最常用的前馈网络的基本结构包括一个输入层、一个或多个隐层以及一个输出层。通过连接权重，NN 的输出便构成其输入的函数。NN 的训练就是调整权重以对数据正确分类（有监督学习）。与贝叶斯学习相比，神经网络没有洞察分类器的内部，但可以在线学习。

### 9.4.3　强化学习

强化学习（RL）是一种通过对环境施加动作并由环境反馈奖赏信号的无监督学习方法。参考文献[9.50] 是很重要 RL 文献，参考文献 [9.4] 中的第 21 章也有一般性介绍。在 RL 中，机器人或 Agent 的目标是学习最佳策略，即达到给定目标的动作序列。为此，必须最大化累积奖赏值，RL 的形式框架因此与 MDP 的相同。机器人在集合 $S$ 中感知（有时是部分感知）环境状态，并能完成集合 $A$ 中动作，这些动作的序列便形成策略 $\pi$。从一个状态执行一个给定动作到下一个状态有一个转移概率 $P(s_{t+1}=s' \mid s_t, a)$。机器人努力最大化一个值函数 $V$，$V$ 表示奖赏值 $r_t$ 随时间累积的期望。Bellman 方程是表达值函数并使最优策略 $\pi^*$ 能够学习的基本方程。

$$V^{\pi^*}(s) = \max_a \left[ r(s,a) + \gamma \sum_{s}^{t} P(s' \mid s,a) V^{\pi^*}(s') \right] \tag{9.1}$$

其中，$r(s, a)$ 为立即奖赏，折扣因子 $\gamma$ 将未来的预期奖赏纳入考虑范围。Q-学习[9.51] 是计算最优策略的一个变种，其思想是学习动作的值而不是状态的值。

大部分 RL 研究工作都假定动作空间是离散的，已给出的学习过程本身的形式并不能直接应用于连续动作空间。要将 RL 应用于连续空间，一种常用的做法是采样。

## 9.5　结论与扩展阅读

自从 AI 崭露头角那天起，便将自主机器人列入其研究日程。在 20 世纪 90 年代，当移动机器人平台广泛使用且价格可以接受时，很多实验室完成了最初的实验。AI 对待机器人技术的态度非常明确，就是为Agent的计算模型（包括感知、推理和动作执行）提供一个有用的试验床，因为机器人能在完整的集成中检验这些模型。

这与 AI 对机器人技术的长远观点相似，都是要开发能为智能自主机器人闭环控制器有点贡献的方法和工具。但如今 AI 推理方法对机器人技术的贡献是什么呢?

这里已经学到了两点体会。第一，已经介绍过的推理方法十分易懂且高效，目前已能够安全且有用地用作机器人 Agent 闭环控制的一部分。RoboCup 中型足球联赛便是很壮观的一个例子，美国国家航空航天局（NASA）远程 Agent 任务[9.52] 自主控制功能是另外一例。

第二，感知、(基于符号的）推理和动作执行的完全闭环集成需要解决符号接地问题[9.1]（其中的真实部分)。即，必须理解机器人如何能按照用于推理和动作规划的语义范畴去感知环境。理解符号接地的过程完全处于 AI 及与此有关的所有认知科学的大问题之中。因此机器人技术最好别再等待 AI 先行找到一般的解决方案。这期间，机器人可以在闭环控制中使用 AI 推理方法，只要有用就行，别管所需的数据在哪里可以得到。

为总结本章，我们回到机器人控制体系结构的问题上，突出功能集成与物理集成的基本观点。为了这一回顾之目的，我们将推理看成是一种或一套必须依赖以下来源提供信息的方法：第一，域建模者（人)；第二，为以符号形式提供域当前状态的最新信息而进行的在线感知，(可能还会有）第三，泛化既往经验帮助对自身进行识别或推理的学习器。这种观点实际上有点鼠目寸光。一个完全集成的机器人推理器应该通过提供假设来帮助其他模块，如，感知模块可能正在其传感数据中找什么（如果你告诉我你已经确定了水槽和洗碗机，那么我告诉你，我们可能会在厨房里，你可以密切注意冰箱)。推理和感知的双向集成目前已经超越了最先进的机器人技术，正在成为研究热点，其灵感可能源自认知视觉的相关工作，参考文献 [9.53] 收集了这方面近年发表的论文。

为了更全面地了解本章提到的各种方法及 AI 中的其余方法，推荐阅读 AI 教材，其中由 Russell 和 Norvig 的著作[9.4] 目前正被广泛使用。参考文献[9.5] 专门介绍了近年的知识表示方法及相关问题，推荐一读。在第一手资料来源中，特别要提一下两部期刊，*Artificial Intelligence* 和 *Journal of Artificial Intelligence Research*（*JAIR*)[9.54]，其内容均能很好地覆盖这里探讨的话题。*International Joint Conferences on*

*Artificial Intelligence*（*IJCAI*）是 AI 领域最主要的国际会议，两年一次，每逢奇数年召开。

## 参考文献


9.1 S. Harnad: The symbol grounding problem, Physica D **42**, 335–346 (1990)
9.2 S. Coradeschi, A. Saffiotti: An introduction to the anchoring problem, Robot. Auton. Syst. **43**(2–3), 85–96 (2003)
9.3 F. Baader, D. Calvanese, D. McGuinness, D. Nardi, P. Patel-Schneider (Eds.): *The Description Logic Handbook* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2003)
9.4 S. Russell, P. Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 2nd edn. (Prentice Hall, Englewood Cliffs 2003)
9.5 R.J. Brachman, H.J. Levesque: *Knowledge Representation and Reasoning* (Morgan Kaufmann, San Francisco 2004)
9.6 W.V.O. Quine: *Methods of Logic*, 4th edn. (Harvard Univ. Press, Cambridge 1955)
9.7 Z. Manna, R. Waldinger: *The Deductive Foundations of Computer Programming: A One-Volume Version of "The Logical Basis for Computer Programming"* (Addison-Wesley, Reading 1993)
9.8 W. Hodges: Elementary predicate logic. In: *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 1, ed. by D. Gabbay, F. Guenthner (D. Reidel, Dordrecht 1983)
9.9 A. Robinson, A. Voronkov (Eds.): *Handbook of Automated Reasoning* (Elsevier Science, Amsterdam 2001)
9.10 M. Davis, G. Logemann, D. Loveland: A machine program for theorem proving, Commun. ACM **5**(7), 394–397 (1962)
9.11 J. Franco, H. Kautz, H. Kleine Büning, H. v. Maaren, E. Speckenmeyer, B. Selman (Eds.): Special issue: theory and applications of satisfiability testing, Ann. Math. Artif. Intell. **43**, 1–365 (2005)
9.12 The Web Ontology Language OWL. http://www.w3.org/TR/owl-features/
9.13 G. Antoniou, F. v.Harmelen: *A Semantic Web Primer* (MIT Press, Cambridge 2004)
9.14 K.L. Chung, F. AitSahila: *Elementary Probability Theory* (Springer, Berlin 2003)
9.15 J. Pearl: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems* (Morgan Kaufmann, San Mateo 1988)
9.16 R. Brooks: Intelligence without representation, Artif. Intell. **47**, 139–159 (1991)
9.17 J. McCarthy, P. Hayes: Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence, Machine Intell. **4**, 463–507 (1969)
9.18 H. Levesque, R. Reiter, Y. Lespérance, F. Lin, R. Scherl: Golog: a logic programming language for dynamic domains, J. Logic Programm. **31**, 59–83 (1997)
9.19 M. Shanahan, M. Witkowski: High-level robot control through logic, ATAL '00, 7th Intl. Workshop Intell. Agents VII. Agent Theories Architectures and Languages 2000 (Springer, Berlin 2001) pp. 104–121
9.20 M. Thielscher: *Reasoning Robots. The Art and Science of Programming Robotic Agents* (Springer, Berlin 2005)
9.21 A. Saffiotti, K. Konolige, E.H. Ruspini: A multivalued logic approach to integrating planning and control, J. Artif. Intell. **76**, 481–526 (1995)
9.22 R.J. Firby: An investigation into reactive planning in complex domains, AAAI 1987 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1987) pp. 202–206
9.23 M.P. Georgeff, A.L. Lansky: Reactive Reasoning and Planning, AAAI 1987 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1987)
9.24 M.P. Georgeff, F.F. Ingrand: Decision-making in an embedded reasoning system, IJCAI 1989 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1989)
9.25 M. Boddy, T.L. Dean: Solving time-dependent planning problems, IJCAI 1989 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1989)
9.26 S. Zilberstein: Operational rationality through compilation of anytime algorithms, AI Mag. **16**(2), 79–80 (1995)
9.27 M. Ghallab, D. Nau, P. Traverso: *Automated Planning: Theory and Practice* (Morgan Kaufmann, San Francisco 2004)
9.28 R.E. Fikes, N.J. Nilsson: strips: a new approach to theorem proving in problem solving, J. Artif. Intell. **2**, 189–208 (1971)
9.29 R.E. Fikes, P.E. Hart, N.J. Nilsson: Learning and executing generalized robot plans, J. Artif. Intell. **3**, 251–288 (1972)
9.30 N.J. Nilsson: Shakey the Robot. SRI International, Tech. Note TN 323, 1984. www.ai.sri.com/shakey/
9.31 J. Rintanen, J. Hoffmann: An overview of recent algorithms for AI planning, KI **15**(2), 5–11 (2001)
9.32 PLANET: Euopean Network of Excellence in AI Planning. http://www.planet-noe.org/
9.33 PLANET Technological Roadmap on AI Planning and Scheduling. http: //www.planet-noe.org/service/Resources/Roadmap/Roadmap2.pdf. 2003
9.34 D. McDermott, M. Ghallab, A. Howe, A. Ram, M. Veloso, D. S. Weld, D. E. Wilkins: *PDDL – The Planning Domain Definition Language*, Tech Report, Vol. CVC TR-98-003/DCS TR-1165 (Yale Center for Computational Vision and Control, New Haven 1998)
9.35 M. Fox, D. Long: PDDL2.1: an extension to PDDL for expressing temporal planning domains, J. Artif. Intell. Res. **20**, 61–124 (2003)
9.36 T. Bylander: The computational complexity of propositional strips planning, J. Artif. Intell. **69**, 165–204 (1994)
9.37 D. McAllester, D. Rosenblitt: Systematic nonlinear planning, AAAI 1991 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1991)
9.38 D. Wilkins: Domain-independent planning: representation and plan generation, J. Artif. Intell. **22**, 269–301 (1984)
9.39 D.S. Nau, T.C. Au, O. Ilghami, U. Kuter, M. Murdock, D. Wu, F. Yaman: Shop2: an HTN planning system, J. Artif. Intell. Res. **20**, 379–404 (2003)
9.40 A.L. Blum, M.L. Furst: Fast planning through plan graph analysis, J. Artif. Intell. **90**, 281–300 (1997)
9.41 C. Green: Application of theorem proving to problem solving, IJCAI 1969 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1969)
9.42 P. Doherty, J. Kvarnström: TALplanner: a temporal

logic based planner, AI Mag. **22**(3), 95–102 (2001)

9.43 H. Kautz, B. Selman: Unifying SAT-based and graph-based planning, IJCAI, Stockholm 1999 (Morgan Kaufmann, San Mateo 1999)

9.44 S. Thrun, W. Burgard, D. Fox: *Probabilistic Robotics* (MIT Press, Cambridge 2005)

9.45 B. Bonet, H. Geffner: Planning with incomplete information as heuristic search in belief space, AIPS 2000 (AAAI, Menlo Park 2000)

9.46 M. Beetz, J. Hertzberg, M. Ghallab, M.E. Pollack (Eds.): *Advances in Plan-Based Control of Robotic Agents*, Vol. 2466 (Springer, Berlin 2002)

9.47 D. McDermott: Robot planning, AI Mag. **13**(2), 55–79 (1992)

9.48 M. Beetz: Plan representation for robotic agents, AIPS, Toulouse 2002 (AAAI, Menlo Park 2002)

9.49 N. Lavrac, S. Dzeroski: *Inductive Logic Programming: Techniques and Applications* (Ellis Horwood, New York 1994)

9.50 R.S. Sutton, A.G. Barto: *Reinforcement Learning: An Introduction* (MIT Press, Cambridge 1998)

9.51 C.J. Watkins: Models of Delayed Reinforcement Learning. Ph.D. Thesis (Cambridge Univ., Cambridge 1989)

9.52 N. Muscettola, P. Nayak, B. Pell, B.C. Williams: Remote Agent: to boldly go where no AI system has gone before, J. Artif. Intell. **103**, 5–47 (1998)

9.53 H.I. Christensen, H.H. Nagel (Eds.): *Cognitive Vision Systems – Sampling the Spectrum of Approaches* *LNCS* (Springer, Berlin 2006)

9.54 J. Artif. Intell. Res. http://www.jair.org

# 第2篇　机器人结构

**Frank C. Park 编辑**

**第10章　性能评价与设计标准**

Jorge Angeles，加拿大蒙特利尔

Frank C. Park，韩国首尔

**第11章　运动学冗余机械臂**

Stefano Chiaverini，意大利卡西诺

Giuseppe Oriolo，意大利罗马

Ian D. Walker，美国克莱姆森

**第12章　并联机器人**

Jean-Pierre Merlet，法国苏菲亚-安提波利斯

Clément Gosselin，加拿大魁北克

**第13章　具有柔性元件的机器人**

Alessandro De Luca，意大利罗马

Wayne Book，美国亚特兰大

**第14章　模型识别**

John Hollerbach，美国盐湖城

Wisama Khalil，法国南特

Maxime Gautier，法国南特

**第15章　机器人手**

Claudio Melchiorri，意大利博洛尼亚

Makoto Kaneko，日本大阪

**第16章　有腿机器人**

Shuuji Kajita，日本筑波

Bernard Espiau，法国圣伊斯米尔

**第17章　轮式机器人**

Guy Campion，比利时鲁汶

Woojin Chung，韩国首尔

**第18章　微型和纳米机器人**

Bradley J. Nelson，瑞士苏黎世

Lixin Dong，瑞士苏黎世

Fumihito Arai，日本仙台

本篇介绍机器人结构，主要关注于机器人的设计、建模、动作规划，以及对于机器人物理运动的控制。我们首先会想到那些带有臂、腿以及手的机器人结构，与此同时，还会想到轮式的车辆和平台，并将微米和纳米级的机器人也加入到机器人结构中。即使是对于像手臂一样的最简单的机器人部件，考虑到大量的连杆和传动机构形式，在运动机构中存在着各种各样的封闭运动链，以及关节连接的灵活性，那么让人惊奇的形形色色的设计方案也是完全有可能的。对于这些结构的有效模型和规划控制算法将是更加具有挑战性的问题。

本篇的主题不仅仅对于建立机器人本身尤为重要，对于建立设计和控制动作，按照指令进行操纵方面也至关重要。因此，本篇与机器人学基础（第1篇）的联系是显然的，尤其是第1篇中关于运动学（第1章）、动力学（第2章），以及机构与驱动（第3章）的章节。将机器人与其他研究智能的学科最终区别开的因素就机器人定义方面而言，是机器人本身需要一种运动表现；在机器人拓展应用方面，是机器人需要与环境交互来产生它的动作。本篇所处理的问题可以被认为是组成机器人整体研究的一个最基础层次。

正如仅仅通过简化后的模型去了解人类的智力和对人类身体的远距离探知一样，分解开那些结构的各个零件而不去讨论其内部的连接和相互影响是非常困难的。比如说，关于怎样设置坐标系以及描述运动（第3篇），怎样抓取和控制物体（第4篇），以及怎样教会复杂的机器人去学习（第5篇）都不可避免的需要考虑到机器人的物理结构。专门为多种用途和环境所设计的机器人（第6篇），尤其是那些专门针对直接与人接触的那些机器人（第7篇），也自然需要考虑到机器人的物理结构。

本篇各章的主要内容包括：

第10章性能评价与设计标准，提供了一个关于机器人设计过程的简洁概述，以及关于设计结构工具的评价标准和机器人运动表现的评价体系的简单调研。例如工作空间、局部和全局灵活性，以及弹性静力学和弹性动力学的表现评价，它们不仅决定了机器人的拓扑结构以及物理维度，而且还能对诸如工件放置和动态冗余自由度解决方案起到一定的作用。

第11章运动学冗余机械臂，处理了冗余自由度的运动的产生和控制的问题。运动学的冗余使机器人具有更高程度的灵活性，这样的灵活性可以用于避免奇异点、关节限制和工作空间障碍等方面，同时还能够最小化驱动转矩、能量以及其他适应性运动执行标准。本章主要对控制区间的逆向运动冗余解决方案进行了讨论，其中涉及了从仅有少数运动冗余自由度到可以被运动模型认为是连续曲线的大量的冗余控制情况。

第12章并联机器人，介绍了仿真机械运动学和动力学，例如著名的 Stewart-Gough 平台。并联机构包含闭环的运动结构，还有诸如那些与研究串联机构相差很大的研究方法。本章主要讨论了多种主题，从并联机构的运动合成、正向和逆向运动学，到对于其特殊行为、工作位置特性、静态和动态分析以及实际涉及问题的探究。

第13章具有柔性元件的机器人，讨论了动态模型和对于由柔性关节和连杆组成的机器人的控制。因为对于柔性关节和柔性连杆，两者研究方法在结构上是不同的，所以这一章主要建立在这两种柔性模式的相互独立研究基础上。这种方法可以扩展到关节和连杆都具有柔性的机器人中，甚至是两者同时在相互动态影响的实例中。本章中还给出了工业机器人中柔性的典型来源。

第14章模型识别，讨论了确定机器人控制系统的动态内部参数设定的方法。对于动态的测量，首要目的是确定几何的 D-H 参数或者运动学方程，主要通过测量关节的组合以及不同姿势下的运动极限点。另一方面的内部参数是通过在执行一段轨迹过程中测量一个或多个关节的力和力矩的方式进行分析的。这样的动态和内部参数定义可以被转换为对于常规结构的最小二乘法分析，也就是说常规结构的关于定义的参数、测量方式的充分性，以及数值鲁棒性都是由动态和内部参数所确定和影响的。本章将就这些问题展开讨论。

第15章机器人手，介绍机器人手设计、建模和控制背后所涉及的主要原理问题。从讨论拟人化程度和机械手灵巧性特点开始，本章分析了机器人手相关设计问题、驱动、传动架构，以及可行的传感技术等。机器人手控制和动态建模之所以困难，不仅仅是因为复杂的运动学结构，还有那些柔性传动元件。本章对这些问题也作了专门的介绍。

第16章有腿机器人，主要讨论了关于设计、分析、控制有腿机器人方面的大量问题。以有腿机器人发展的历史作为开端，本章提供了回转行走分析，以及建立在前进动力和 ZMP（零力矩点）基础上的双足机器人的控制。与此同时，例如模拟哺乳动物的四足机器人这样的多足机器人也在本章中进行了讨论。更进一步，混合的由腿、手和轮式结构共同组成的机器人、绳索行走机器人，甚至是能够攀爬墙壁的有腿

机器人都将在本章中进行讨论。

第17章轮式机器人，提供了一个关于轮式机器人普遍且便于理解的描述。这一章首先讨论了基于轮式结构的机器人的运动性，以及其运动约束的特性。本章还论述了运动和动力状态的空间模型，以及轮式机器人的结构特点。这些特点主要包括：控制能力、非完整性以及稳定性。本章还讨论了在非线性控制中的反馈线性化，以及基于车轮个数和形式的不同的机器人结构分类等方面的问题。

第18章微型和纳米机器人，提供了一个关于当前微型和纳米机器人的现状的概述。前一部分具体描述了在毫米和微米级别的机器人对于物体的控制，以及在这一个尺度空间内对于自主机器人结构的设计和实现（纳米机器人也是应用同样的定义，只是其尺寸维度被限制在纳米的程度以内）。概述了尺度效应、驱动，以及在此尺寸级别内的传感和制造问题。同时，还论述了微型结构、生物科学以及对于微米和纳米级的电子机械系统的制造和特性在现实中的应用问题。

# 第10章 性能评价与设计标准

Jorge Angeles, Frank C. Park

纪军红 译

本章主要介绍机器人的设计，重点是串联结构机器人。在开始部分提出一个分阶段的设计流程，然后介绍机器人设计中需考虑的主要因素，包括工作空间几何特性、动态静力学、动力学、静弹性和动弹性指标。为此，这些概念所需的数学知识也被简要地介绍以使本章更易理解。

我们总结部分在机器人机械设计和性能评价中用到的工具和指标。重点关注主要用于操作任务的机器人和串联链结构。并联机器人的运动学在第12章中介绍，轮式、行走机器人、多指手和其他特殊结构在各自相应的章中介绍。



本章介绍的指标和工具的最主要用途是机器人的机械结构设计。机器人设计和普通的单自由度机构设计的差别在于，后者只完成一个特定的任务，如从传送带上拾起一个工件并把它放到托盘上，传送带是与机构同步的，托盘是静止的，工件应放到何处已经被明确定义。与此不同，机械手不只完成一个特定的任务，而是一类任务，可能是平面、球面、直线，或如选择柔性装配机械臂（SCARA）能够完成的动作，也被称为Schönflies位移[10.1]等。机器人设计者面临的挑战是机器人将执行的任务的不确定性。设计标准将有助于设计者处理这些不确定性。

## 10.1 机器人设计流程

给定一系列的任务，如功能要求和更具体的设计要求，设计者需要设计一台机器人满足上述所有要求。设计过程包括以下阶段：

1）确定机械结构对应的运动链的拓扑结构。我们将机器人分为三类：串联、并联和混合结构。然后确定各子链间的关节连接形式，最常用的是转动式和棱柱式。近年来，一种新的形式也被广泛使用，*Π*-关节，两杆绕平行的轴转动相同的角位移，导致耦合的两杆实现平移，这四个杆构成了一个平行四边形结构[10.2]。

2）确定各杆件的几何尺寸以定义机器人结构，即填写Denavit-Hatenberg参数表[10.3]来满足工作空间要求。尽管通常关节变量也被包含在上述参数中，但关节变量并不影响机器人结构，而是确定机器人姿态。

3）确定各杆件和关节的结构参数以满足静态负载要求，负载包括力和力矩。要求即可以定义为最大负载情况，也可以定义为最常见工作状态，这取决于所采用的设计思路。

4）确定各杆件和关节的结构参数来满足动态负载要求，负载包括杆件和操作对象共同的惯性效应。

5）确定整体机械结构的动弹性参数，包括执行器的动态特性，以避免最大负载条件或最常见工作条件下的特定共振频率。

6）针对设计中确定的工作条件选择执行器和相应的机械传动形式，来适应任务的不确定性。

上述过程应依次执行：①首先，基于任务系列和工作空间的形状（见10.2.2节）确定拓扑结构。

②基于对工作空间的要求，包括最大可达位置和前一阶段定义的拓扑结构，确定杆件的几何尺寸。③基于上述杆件几何尺寸确定各杆件和关节的结构参数以达到满足支撑静态负载要求（除并联机器人外，其他类型机器人的所有关节都是主动驱动的，并联机器人不在本章的讨论范围内）。④基于上述由静态负载条件确定的杆件和关节结构参数，确定杆件的质心和转动惯量矩阵来初步评价电动机力矩需求（这种评价是初步的，因为执行器的动态特性没有被考虑，这种负载变化是显著的，即使对所有执行器都安装在机座上的并联机器人）。⑤假设杆件是刚性的，关节具有柔性，根据经验或由类似的机器人得到的数据，可以得到机器人的动弹性模型，其在一系列选择的姿态下的自然模态和频率（结构的动态行为受机器人姿态影响）可以由科学编程语言如 Matlab 或计算机辅助工程（CAE）语言如 Pro/Engineer 或 ANSYS 获得。⑥如果机器人结构的频率谱可以被接受，设计者可以开始选择电动机，否则需要重新进行参数选择，即返回步骤3)。

尽管一个设计周期可以按上述过程完成，设计者现在必须协调动弹性模型和电动机制造商提供的结构和惯量数据。这要求返回阶段5）并进行新一轮的动弹性分析。显然，机器人设计过程和普遍的工程设计过程有一个共同点：它们都是迭代进行的[10.4]。值得注意的是，不同的设计阶段中有不同的主导因素，在很大程度上，这些因素是相互独立的。例如，拓扑结构和几何特性可以独立于电动机选择。当然，所有的因素都在整体设计过程中相互影响，但在相当多的设计实例中，不同的因素并不相互影响，因此不必须采用多目标设计方法。换言之，串联机器人的最优设计可以通过一系列的单目标最优设计来实现。再次重申，最后的结果，电动机的选择，必须被集成到整体数学模型中以验证整体的性能。一个工业机器人的最优设计的范例见参考文献［10.5］。

只有当部件的物理极限被突破的时候才需要返回阶段1进行彻底的重设计。SCARA 系统就是这种情况。当前工业机器人大多采用串联的拓扑结构，除了少量例外，如 Konig & Hartman RP-AH 系列并联结构机器人[10.6]，其由两台串联的 SCARA 系统共用一个末端执行器。对更短的往复运动时间（如工业测试周期，见10.2.1节）的需求，促使工业界寻求新的结构形式。现在 ABB 机器人公司在市场上推出并联机器人 FlexPicker，基于 Clavel's Delta 机器人[10.7]，在前三个自由度之外串联添加了第四个自由度。FlexPicker 整体采用并联结构保证 Delta 机器人的运动平台能够进行纯平动。Adept 技术公司报告的最短往复运动周期是 420ms，负载为 2kg（以 Adept Cobra s600 串联机器人实现），其他制造商还报告过更短的时间。

本章按照上述机器人设计过程的不同阶段的次序安排。注意到拓扑结构和几何尺寸的选择在运动学设计过程中紧密相关，我们以测试工作空间要求开始：回顾确定运动链拓扑结构的方法，以及为满足工作空间要求的几何尺寸。然后详细回顾为评价机器人的操作能力而提出的各种标准，重点是基于运动学和动力学模型的关于灵活性的定量描述。随后检验为满足静态和动态负载要求确定杆件和关节结构参数的方法。最后讨论动弹性特征，执行器和齿轮的尺寸，其中考虑到机器人的固有频率特性，力和加速度要求。

## 10.2 工作空间标准

机器人的设计过程中一个首要的考虑是它的工作空间需要满足一系列特性要求，随之而来的问题是用户如何指定这些特性。

上述因素基本可以归于 Vijaykumar 等人提出的机械手区域结构[10.8]。将机械手视为解耦的结构，最后三个转动关节的轴线交于一点，构成一个球形腕，轴的交点被称为腕中心。对于这种结构的机械手，一个操作任务可以被分解为位置和姿态子任务：由前3个关节构成的机器人的区域结构负责将腕中心放置到指定点 $C(x, y, z)$；随后，局部结构，即腕部，保证末端操作手（EE）获得相对机座坐标系用一旋转矩阵描述的指定姿态。

文献中大部分确定工作空间的算法都采用区域结构。在此，我们需要指出不考虑物理可实现性的运动链的工作空间和实际机器人的工作空间之间的区别。对于前者，所有的转动关节都可以不受限制地绕其轴线转动；对于后者，关节限制是存在的，如为防止导线缠绕。在机器人设计的前期，可以暂不考虑关节限制，工作空间的对称性由关节类型决定。如果第一个关节是转动关节，整个工作空间绕该关节的轴线对称；如果第一个关节是棱柱关节，工作空间具有延伸对称性，延伸的方向由该关节的运动方向决定。理论上棱柱关节可以无限延伸，具有棱柱关节的机器人的工作空间也是无限延伸的。实际中机器人的工作空间是其一个子空间。

对于并联机器人（将在14章详细阐述），总体

上，区域结构的意义不那么清晰。显示其工作空间的一个常用方法是保持其运动平台（相当于串联机器人的末端操作手）在一个固定的姿态[10.9]。在设计阶段，并联机器人结构常采用的一个共同特性是，用相同结构且对称放置的腿联结机座和动平台。每条腿是具有一或两个主动自由度的串联运动链，其余的自由度均为被动自由度。这类机器人的工作空间也具有对称性，但不是轴对称。对称性由腿的数目和驱动关节的类型确定。

回到串联机器人的情况，工作空间可以被定义为下列两种情况之一，除了在一些 Lebesgue 测量值为零[10.10]的点处，几乎处处连续的拓扑空间簇或表面。一般地说，在表面上这样的点构成一条曲线，例如球面上的子午线，或直线上一些孤立点构成一个集合，例如实轴上的有理数。一个表面型工作空间的例子是 Puma 机器人，它的运动链如图 10.1 所示。在图中，区域和局部结构可以被很容易地分辨，前者处于完全展开状态。机器人的工作空间可以按下列步骤获得：首先，当机器人处于图 10.1 所示的姿态时，锁定除关节 2 以外所有关节，然后令关节 2 绕其轴线充分旋转，腕的中心 $C$ 构成一个半径为 $R$ 的圆周，也就是 $C$ 和直线 $L_2$ 之间的距离。圆周所在的平面垂直于直线 $L_2$，与关节 1 的轴线 $L_1$ 之间的距离是 $b_3$，这个距离也被称为肩部偏移。现在锁定除关节 1 以外所有关节，然后机器人绕轴线 $L_1$ 转动，结果如图 10.2 中的环形。这个表面包围的内部就是布尔操作$\mathcal{S}$-$\mathbb{C}$的结果，其中$\mathcal{S}$是中心在 $O_2$ 半径为 $R$ 的球体，见图 10.1，$\mathbb{C}$是半径为 $b_3$ 轴线为 $Z_1$ 的无限圆柱体。需要指出的是，尽管这个工作空间可以用简单的布尔操作产生，却不能由形如 $f(x, y, z)=0$ 的隐函数产生，因为表面不是一个拓扑空间簇。

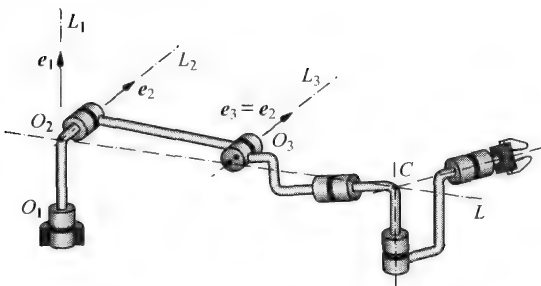


图 10.1 一台处于完全展开姿态的 Puma 机器人（引自参考文献［10.11］）

具有拓扑空间簇工作空间的工业机器人并不常见。图 10.3 所示是一个满足区域结构的六轴解耦机器人，它的相邻轴线相互垂直，之间的距离都是 $a$。两轴的公法线与两轴的交点之间的距离也是 $a$，如 $X_2$ 和 $X_3$，$X_4$ 和 $X_3$，以及 $C$ 和 $Z_3$ 之间的距离也是一样。点 $C$ 是球形腕的中心，腕结构没有在图中显示。机器人的工作空间可以用 $f(x, y, z)=0$ 形式的函数表示[10.11]，对应图 10.4 所示的拓扑空间簇。图中工作空间内部的深色区域对应在该处逆运动学存在四个实数解的所有点的集合，其他点处只存在两个解。

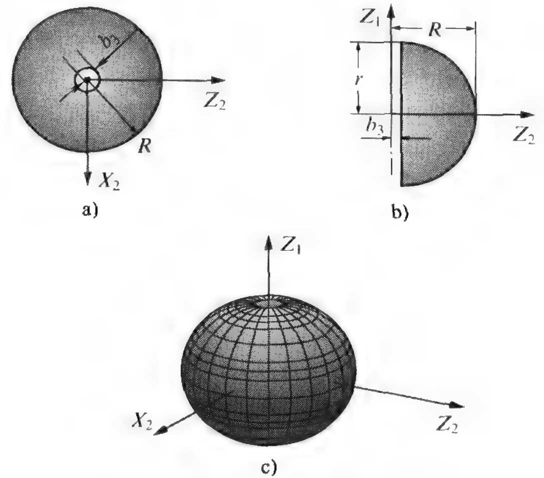


图 10.2a-c Puma 机器人的工作空间（引自参考文献［10.11］）

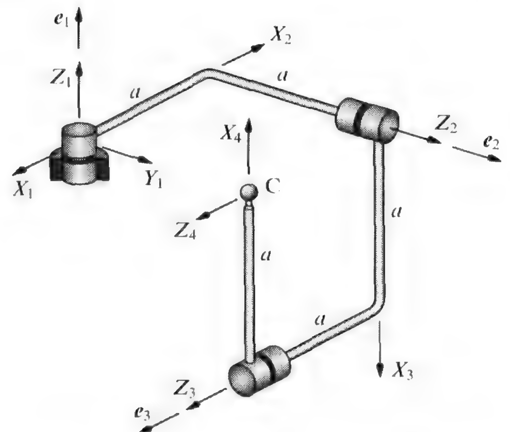


图 10.3 一台包括三个正交的转动关节的机器人（引自参考文献［10.11］）

工作空间边界上的任意点意味着位置奇异，与姿态奇异不同，工作空间不是拓扑空间簇的机器人在工作空间边界上的棱线处表现出两种奇异，除位置奇异外还包括姿态奇异。在棱线处雅可比矩阵的秩减少

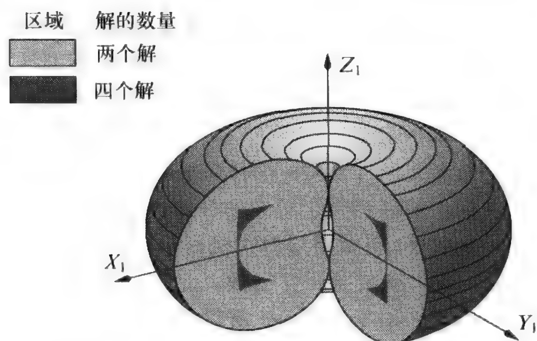



图 10.4　图 10.3 中的正交机器人的工作空间
（引自参考文献［10.11］）

2，在边界上的其他点处秩减少 1。

现在可以概括出基于工作空间形状的设计准则：

1）如果要求工作空间是轴对称的，且容积有限，选用具有区域结构的串联构型，且只选用转动关节。

2）如果要求工作空间是棱柱形且容积无限，选用具有区域结构的串联构型，第一个关节选用棱柱关节。在此，无限的真正意义是沿某一方向远远大于其他方向。另外，如果要求只沿一个方向远远大于其他方向，可棱柱关节即可以选用地面上的轨道，也可以选用空中的悬架。如果要求沿两个方向远远大于其他方向，则选用轮式移动机器人携带机械手，最著名的例子是美国航空航天局在 1997 年寻找到火星路线计划中采用的 Sojourner。

3）如果不要求工作空间具有轴对称结构，但要求若干共面的对称轴，类似于正多边形结构，选用并联机器人。

## 10.2.1　到达一系列目标坐标系

与工作空间要求密切相关的一个问题是任务要求。在机械设计中的一个常用做法是在空间中指定一系列坐标系，然是设计一个能够到达所有这些坐标系的符合预设拓扑结构的机构。到达各坐标系的次序必须被指定。如果不是所有的坐标系都能被到达，那么寻求一个能够在某种意义上最接近这些坐标系的机构。关于这个经典机构设计问题的文献有许多，可以参考文献［10.1，12，13］及其引用的参考文献。在此指出应用这种目标坐标系方法设计机器人时需注意的几点：

1）并不总需要精确地达到期望的坐标系，有时候甚至是不可能的：某些情况下更好的选择是采用某种优化方法获得到达期望位姿的最小误差（保证误差的模满足工程要求）。

2）参考文献［10.9］中指出，通过区间分析，考虑到制造误差因素，不仅是一系列离散的姿态，而是整个六维工作空间都可以到达。

3）单自由度结构设计中的分支问题在机器人设计中也有可能出现：基于通过点的设计结果可以到达所有的期望位姿，但有可能不能在一个特定的运动模式中实现所有的位姿。这个问题在机器人设计中变得更为明显，给定一个末段操作手的姿态，转动解耦的六自由度串联机器人可以产生最多 16 个可能解，即 16 个分支[10.14,15]。

4）为机器人提出设计任务，即要求其末端操作手能够到达一系列位姿时，不应忘记使用机器人的目的不是完成一个特定的任务，而是一系列任务。选择的目标姿态应该能够反映这些任务。

结合上述各点，我们可以介绍 SCARA 系统的设计或评价过程。SCARA 系统是一个四自由度的串联机器人，可以在通用刚体位移集合的 Schönflies 子集内完成若干任务[10.16,17]，也就是除三维的平移运动外增加一个绕固定轴的转动。在这类系统中，手部的任务是一段长 300mm 的水平线段联结的两段长 25mm 的垂直线段。末端操作手可以垂直运动，同时绕垂直轴在 180° 范围内转动。SCARA 制造商采用的任务规范中没有说明如何处理角落的问题，这个问题留给机器人工程师自由发挥。

## 10.2.2　工作空间容积和拓扑结构

### 1. 可达和灵活工作空间

自 Roth 的早期工作[10.18]开始，关于机械手运动学几何特性和其工作空间之间的关系已经进行了许多研究。大部分研究中都将工作空间分为两部分：可达空间和灵活空间[10.19]。为末端操作手指定一个参考点 P，例如球形腕的中心或末端操作手上的其他点，可达空间被定义为 P 点在物理上可到达的空间点的集合。灵活空间被定义为 P 点可以以任意末端操作手姿态到达的点的集合。

关于工作空间的早期文献主要集中于用数值或代数方法描述工作空间。可达空间和灵活空间被分别被 Kumar 和 Walron[10.19]，Yang 和 Lee[10.20] 以及 Tsai 和 Soni[10.21] 利用数值方法进行了分析。与代数方法相比，这种方法的主要优点是可以方便地引入运动约束。但应用这种方法却难以获得通用的设计准则。在表征工作空间的代数方法中，Gupta 和 Roth[10.22] 以及 Gupta[10.23] 中采用了拓扑分析方法，并提出了工作空间中的孔和空洞的概念，并验证了其存在条件。可达空间和灵活空间的形状也被表述为 P 的函数。

Freudenstein 和 Promrose[10.24]，Lin[10.25]进行了更深入的研究，建立了运动学参数和工作空间之间的精确关系，并对一类三关节机械手针对工作空间的容积进行了优化。Vijaykumar 等人对工作空间优化进行了更通用的分析。根据灵活空间定义了机械手的性能指标，即给出一个机械手满足若干关于其 Denavit-Hartenberg 参数的约束条件，结果显示最优的 6R 设计是肘式机械手形式。

机器人区域结构的一种典型设计是正交形式，包括一个沿垂直轴转动的关节和两个沿水平轴转动的关节，其中一条水平轴与垂直轴相交。常用的结构还包括长度相等的中间和远端杆件。这种结构的工作空间是一个半径为两倍上述长度的球体。其容积自然由该长度决定。如参考文献 Yoshikawa ［10.26］ 中指出的，由上述区域结构的最后两个杆件构成的平面两连杆机械手的工作空间是所有具有同样杆件长度的结构中最大的。具有同样区域机构的机械手的工作空间也几乎是在同类机器人中最大的。

**2. 微分几何工作空间表征**

如果将机器人末端操作手的配置空间视为一个特定的欧几里德集合 SE（3）的子集，工作空间也可以通过微分几何方法求解。在定义空间机构的工作空间容积时需要考虑的一个重要原则是其应不受选择的参考坐标系的影响。这个要求的一个不很直观的表述形式是：容积不应受末端操作手坐标系被定义在最后一个杆件上的哪一点的影响。这个条件有下述物理意义：无论操作手变大或变小，机器人都应拥有同样的工作空间容积，其只取决于关节轴线位置。

如将 SE（3）视为一个 Riemanian 拓扑空间簇，则工作空间的容积就是 SE（3）的容积经运动学映射 f 得到的像的容积。SE（3）有一个双重不变特性，即其容积既不受静坐标系（机座坐标系），又不受动坐标系（末端操作手坐标系）的选择的影响，见参考文献 Loncaric ［10.27］。Peden 和 Sastry 在参考文献［10.28］中给出了一个直观的例子。假设一架飞机被限制在一个边长 1km 的空间立方体内飞行，在这个范围的任意一点，飞机可以将其自身指向 $4\pi$ 的固态角范围内的任意一个方向，并可绕其指向的方向在 $2\pi$ 角度范围内横滚，在每一点处飞机的姿态容积是 $4\pi\times2\pi=8\pi^2\mathrm{rad}^3$，乘以位置容积得到飞机在自由配置空间内的容积是 $8\pi^2\mathrm{rad}^3\cdot\mathrm{km}^3$。

工作空间的这种描述方式在机器人学中得到广泛应用，主要优点是不同于灵活空间的常规定义，这种方式可以协调处理位置自由度和姿态自由度。需要指出，得到的实际数值受对物理空间采用的长度比例的影响；这点对工作空间容积本身不是个严重的问题，比较不同工作空间时如果采用相同的长度比例也不是问题。

在参考文献［10.28］中，Paden 和 Sastry 采用上述几何架构证明满足运动学长度约束，拥有最大工作空间的 6R 机械手是肘式机械手，这与 Vijaykumar 等人的早期成果[10.8]一致。此外，获得结果过程中，没有采用 Vijaykumar 所做的关于运动学结构的假设。

## 10.3 灵巧性指标

### 10.3.1 开链结构的局部灵巧性

灵巧性可以被定义为沿任意方向同样容易地运动并施加力和力矩的能力，这个概念属于动态静力学的范畴，即研究多肢体机械系统中静态保守条件下，可行复合速度和约束复合力之间的相互作用关系。这里，复合速度是一个六维的刚体速度矢量，包括参考点的 3 个速度分量和刚体整体的 3 个角速度分量。复合力是作用在刚体上的一个六维静态矢量，包括作用在参考点的合力的 3 个分量和作用在物体上的伴随力矩的 3 个分量。

Salisbury 和 Craig[10.29]介绍了关节手臂设计过程中的灵巧性概念，将其视为由输入关节速度误差到指尖处的输出速度之间的传递关系。为说明这一概念，用 $J(\theta)$ 代表正运动学映射的雅可比矩阵，即

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.1}$$

式中，$\boldsymbol{\theta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 分别代表关节变量和关节速度矢量，$\boldsymbol{t}$ 是末端操作手的复合速度，被定义为

$$\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \dot{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} \tag{10.2}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$ 代表末端操作手的角速度，$\dot{\boldsymbol{p}}$ 是末端操作手的操作点 $P$ 的速度，即定义任务时的参考点。

以 $n$ 和 $m$ 分别代表关节空间$\mathcal{J}$和末端操作手配置空间$\mathcal{G}$的维数，总有 $n\geqslant m$。单位球面 $\{\boldsymbol{\theta}\mid\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|=1\}$ 经过映射 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ 的像是复合速度空间 $\boldsymbol{t}$ 内的一个椭球面。事实上，即使我们假定 $n=m$ 得出的结论，也能适应更通用的情况 $n\neq m$。我们在此保留完整的假设是为了以后讨论的简化。对 $J$ 进行极值分解[10.30]得到：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{RU}=\boldsymbol{VR} \tag{10.3}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 是一个正交矩阵，既可以是有理的，也可以是无理的。有理情况下，$\boldsymbol{R}$ 代表旋转，无理情况下，$\boldsymbol{R}$ 代表反射。$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是对称，至少为半正定阵。如果 $\boldsymbol{J}$ 为非奇异，则 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 均为正定阵，且上述分解方式唯一。这两个矩阵总可以通过相似变换联系在一起

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \tag{10.4}$$

也就是说这两个矩阵具有相同的非负实特征值。这些特征值同时也是 $\boldsymbol{J}$ 的奇异值。如果用 $\boldsymbol{\Sigma}$ 代表 $\boldsymbol{U}$ 的对角表述形式，其中第 $i$ 个对角元素是 $\boldsymbol{U}$ 的第 $i$ 个特征值，则 $\boldsymbol{U}$ 的特征值分解是

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \tag{10.5}$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 是一个正交矩阵，其第 $i$ 列 $\boldsymbol{e}_i$ 代表 $\boldsymbol{U}$ 的第 $i$ 个特征向量，$\boldsymbol{V}$ 的第 $i$ 个特征向量用 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_i$ 表示。如果将 $\boldsymbol{U}$ 的特征值分解带入到 $\boldsymbol{J}$ 的极值分解式（10.3）中，得到

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \tag{10.6}$$

也就是 $\boldsymbol{J}$ 的奇异值分解，$\boldsymbol{\Sigma}$ 的各对角线元素也就是 $\boldsymbol{J}$ 的奇异值。

现在可以给出正运动学映射，式（10.1）的几何解释，为此将其改写为

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.7}$$

对于一个非奇异姿态，雅可比矩阵式可逆，同理 $\boldsymbol{U}$ 也可逆，由上式可得到

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \tag{10.8}$$

进一步，如果假定复合速度向量 $\boldsymbol{t}$ 和关节速度向量 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的所有元素都有同样的物理单位，即纯平动或纯转动机器人的情况，则可以对（10.8）取两端取欧几里德模数，得到

$$\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-2}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \tag{10.9}$$

将 $\boldsymbol{U}$ 用它的特征值分解，式（10.5）代替，得到

$$\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2=\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}$$

如果定义

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} \tag{10.10}$$

则上式变为

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\boldsymbol{v}=\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \tag{10.11}$$

如果 $\boldsymbol{v}$ 的第 $i$ 个元素记作 $\boldsymbol{v}_i$，$i=1,\cdots,n$，对于 $\mathcal{J}$ 内的单位球 $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|^2=1$，式（10.11）变为

$$\frac{\nu_1}{\sigma_1^2}+\frac{\nu_2}{\sigma_2^2}+\cdots\frac{\nu_n}{\sigma_n^2}=1 \tag{10.12}$$

即 $\mathcal{G}$ 空间，或笛卡儿速度空间中半轴分别是 $\{\sigma_i\}_1^n$ 的椭球的标准方程。需要指出，该椭球只有在特定的坐标系内才能表述为标准形式，即坐标轴的方向与 $\boldsymbol{U}$ 的特征向量的方向一致。椭球在 $\mathcal{G}$ 空间内的通用表达式是

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}=1 \tag{10.13}$$

总之，关节空间的一个单位球被逆雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}^{-1}$ 映射为一个椭球，其半轴长度是 $\boldsymbol{J}$ 的奇异值。即 $\boldsymbol{J}$ 将关节速度空间的单位球扭曲为末端操作手复合速度空间的一个椭球。这种扭曲可以作为由机器人结构决定的运动和力传递质量的一个度量；扭曲越小，传递的质量越高。

由雅可比矩阵导致的扭曲的度量还可以被定义为 $\boldsymbol{J}$ 的最大奇异值 $\sigma_M$ 和最小奇异值 $\sigma_m$ 之间的比例，也被称为 $\boldsymbol{J}$ 的条件数 $\boldsymbol{\kappa}_2$，利用矩阵的 2 范数[10.31]得到

$$\boldsymbol{\kappa}_2=\frac{\sigma_M}{\sigma_m} \tag{10.14}$$

实际上，式（10.14）只是计算 $\boldsymbol{J}$ 或任意 $m\times n$ 维矩阵的条件数的可能方法之一，而不是效率最高的。这种定义中要求已知雅可比矩阵的奇异值。但是，奇异值和特征值的计算量都很大，再加上极值分解的计算量，这样做的计算量只是略小于奇异值分解的计算量[10.32]。对于一个 $n\times n$ 维的矩阵，条件数的更通用的定义是[10.31]：

$$\kappa(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \tag{10.15}$$

如上所述，式（10.14）是在（10.15）式中采用矩阵 2 范数获得的。矩阵的 2 范数定义为

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\equiv\max_i\{\sigma_i\} \tag{10.16}$$

另一方面，可以采用矩阵的加权 Frobenius 范数，定义如下

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}\equiv\sqrt{\frac{1}{n}tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}\equiv\sqrt{\frac{1}{n}tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})} \tag{10.17}$$

显然，奇异值的计算被避免了。如果在上述定义中省略权值 $\frac{1}{n}$，就得到标准的 Frobenius 范数。在工程中加权 Frobenius 范数应用更为广泛，因为它不取决于矩阵的行和列数。加权 Frobenius 范数实际上得到奇异值的均方根值（rms）。

基于矩阵的 Frobenius 范数，可以得到雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的 Frobenius 条件数 $\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{F}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{J})&=\frac{1}{n}\sqrt{tr(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})}\sqrt{tr[(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}]}\\&=\frac{1}{n}\sqrt{tr(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})}\sqrt{tr[(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}]}\end{aligned} \tag{10.18}$$

上述两种计算矩阵的条件数的方法之间还有一点重要差别：$\boldsymbol{\kappa}_{\mathrm{F}}(\cdot)$ 是它的自变量矩阵的解析函数，

$\kappa_2(\cdot)$ 则不是。因此基于 Frobenius 范数得到的条件数在机器人结构设计中拥有巨大的优势。$\kappa_F(\cdot)$ 是可微的，可用于基于梯度的优化方法，运行远远快于仅依靠函数评价的直接方法。在要求实时计算的机器人控制中，$\kappa_F(\cdot)$ 也体现出优势，因为在计算过程中不需要计算奇异值，只需要进行矩阵求逆，所以速度更快。

我们注意到条件数的概念来源于由线性系统方程（10.1）求解 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的过程，这有助于更好地理解条件数在机器人设计和控制中的重要性。$\boldsymbol{J}$ 是结构参数和姿态变量 $\theta$ 的函数，其中必然包含已知等级的误差。结构参数，也就是 Denavit-Hartenberg 表中的常数，被存储在向量 $\boldsymbol{p}$ 中，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 中必然包括各自的误差 $\delta\boldsymbol{p}$ 和 $\delta\boldsymbol{\theta}$。此外，机器人控制软件的输入，复合速度 $\boldsymbol{t}$ 也不可避免地含有误差 $\delta\boldsymbol{t}$。

采用浮点数求解式（10.1）得到 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的过程中，得到的结果必然包含截尾误差 $\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}$。$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 中的相对误差受结构参数和姿态变量的相对误差影响[10.31]

$$\frac{\|\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|}\leqslant\kappa(\boldsymbol{J})\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{p}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{t}\|}{\|\boldsymbol{t}\|}\right) \quad (10.19)$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 代表各自（未知的）实际值；$\boldsymbol{t}$ 代表复合速度的名义值。

然而，上述讨论中的任务包括位置或姿态要求，但不同时包括两者。现实中，大多机器人任务既包括位置，又包括姿态要求，这样雅可比矩阵的不同元素具有不同的单位，从而其奇异值也具有不同的单位。和位置相关的奇异值具有长度单位，和姿态相关的是无量纲的。这样，就不可能对所有奇异值排序或求和。

为处理这一问题，并计算雅可比矩阵的条件数，特征长度的概念被提出[10.11]。特征长度 $L$ 被定义为在某个最优姿态下，雅可比矩阵的带有长度单位的元素被分离出来使得雅可比矩阵的条件数达到最小值的长度。因为定义的方式非常抽象，缺乏清晰的几何意义，使其在机器人领域的应用非常困难。为提供明确的几何意义，最近齐次空间的概念被提出[10.33]。利用这一概念，机器人结构在一无量纲空间中设计，所有点的坐标都是无量纲实数。这样做，一条直线的六个 Plücker 坐标[10.34]也都是无量纲的。机器人的雅可比矩阵的每一列对应转动轴线的 Plücker 坐标，也是无量纲的。雅可比矩阵的奇异值也是无量纲的，则其条件数可以被定义。对应最小条件数，确定机器人的结构时，若满足若干几何约束，如杆件长度比例和相邻关节轴线间的角度，可以得到机器人的最大可达范围。这个最大可达范围 $r$ 是一个无量纲数，将其与规定的拥有长度单位的最大可达范围 $R$ 相比较，特征长度就是比例 $L=R/r$。

### 10.3.2 基于动力学的局部性能评价

既然运动是由力或力矩作用在刚体上造成的，一个自然的想法是定义考虑机构的惯性特性的性能指标。Asada[10.35]定义了广义惯量椭球（GIE），即对应 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}^{-1}$ 的椭球，其中 $\boldsymbol{M}$ 是机械手的惯量矩阵。这个椭球的半轴是上文介绍的奇异值。Yoshikawa[10.36]定义了相应的动态操作性度量为 $\det[\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{-1})^{\mathrm{T}}]$。从物理角度看，这些概念对应两种现象。若将机器人视为一个输入-输出设备，即给定关节力矩，产生末端操作手处的加速度。Yoshikawa 的指标反映这种力矩-加速度增益的一致性，Asada 的广义惯量椭球表征这个增益的逆。如果一个操作者握住机器人的末端操作手尝试移动机器人，广义惯量椭球将反映机器人对这种末端操作手运动的阻抗。

其他将机器人的性能视为动力学的函数的度量包括：Voglewede 和 Ebert-Uphoff[10.37]提出的基于关节刚度和杆件惯量的性能指标，其目的是确定由机器人的任意姿态到奇异状态之间的距离。Bowling 和 Khatib[10.38]提出了广义坐标系来评价一个广义机械手的动态能力，其中包括了末端操作手的速度和加速度，还考虑了力矩和执行器所受的速度限制。

### 10.3.3 全局灵巧性度量

上述度量值都只具有局部意义因为它们都只针对给定的姿态。局部度量对很多应用具有意义，如冗余求解和工件定位。为了设计目的，更需要一种全局的度量。将局部度量推广到全局的一个直观方法是将局部度量在整个可行的关节空间积分。在参考文献［10.39］中，Gosselin 和 Angeles 将雅可比条件数在整个工作空间上积分来定义一种全局度量，被称为全局条件指标。对于简单的情况，如平面定位和球形机械手，全局条件指标和对应的局部度量完全吻合。

### 10.3.4 闭链灵巧性指标

建立闭链的灵巧性具有若干不同点。第一个明显的差别是闭链的关节配置空间不再是平坦的，一般情况下是高维空间内的曲面。此外，与开链情况不同，闭链的正运动学问题比逆运动学问题更困难，有可能存在多个解。另一个重要区别是尽管只有部分关节是可以主动驱动的，这个数目仍然可能超过机器人的自

由度数目。

一些针对特定机构[10.40]和所有关节都可被驱动的协作机器人系统[10.41,42]的基于坐标的闭链灵巧性度量已经被提出，部分方法得到的结果相互矛盾[10.43,44]。由于上文介绍的闭链机构独有的非线性特性，为它们建立基于坐标的灵巧性度量时需要特别关注。

另一个新近的研究方向是为闭链结构的灵巧性建立不随坐标系变化的微分几何表达式。在这个框架下关节和末端操作手配置空间被视为通过适当选择的 Riemannian 度量的 Riemannian 拓扑空间簇，其中关节空间度量的选择反映关节执行器的特性。为串联结构开发的椭球概念也可以被推广到通用的闭链情况，可以包括主动和被动关节，包括冗余驱动情况[10.45,46]。

### 10.3.5 修正的类灵巧性度量

上述对灵巧性的不同定义都定性地反映机器人沿任意方向运动和施加力的能力。Liegeois[10.47]和 Klein，Huang[10.48]的工作中，采用了不同的视角，其中灵巧性通过关节范围的可实行性来定量地描述。这样做的动机是因为大部分机器人关节都存在限制，因此应将关节到达停止位置的可能性降到最低。

Hollerbach[10.49]采用了一种修正的方法来设计一个冗余的7R机械手，考虑的因素包括：①避免内部奇异点；②工作空间中的避障能力；③运动学方程的可解性；④机械的可构建性。基于这四条准则，他得到了一种特定的7R设计，和人类手臂具有相同的形态构型，两个球关节相当于肩关节和腕关节，以及一个转动关节相当于肘关节。通常情况下，锁定冗余机器人的一个关节，机器人仍然可以完成普通的六自由度任务，对于该结构，如果锁定肘关节，该机器人将失去这种操作能力。

从控制角度出发，Spong[10.50]指出，如果机械手的惯量矩阵具有消失的 Riemannian 弯曲，则存在一系列坐标系，在其中运动方式可以具有特别的简化形式。惯量矩阵的弯曲也反映了动力学特性对某些机器人参数的敏感度。最小化这种弯曲，是另一种可能的机器人设计标准。

## 10.4 其他性能指标

### 10.4.1 加速度半径

另一种表征机械手动态能力的度量是加速度半径，最初由 Graettinger 和 Krogh 在参考文献［10.51］中提出，其意义是给定执行器所受的力矩限制，反映末端操作手在任意方向上的最小加速度能力。特别地，给定一个串联链的动力学方程

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.20}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 是机器人的质量矩阵，也被称为关节空间中的惯量矩阵；$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta},\ \dot{\boldsymbol{\theta}})$ 是由关节速度向量到科氏力和离心力矢量的映射矩阵。执行器受到力矩限制，形如

$$\boldsymbol{\tau}_{\min}\leqslant\boldsymbol{\tau}\leqslant\boldsymbol{\tau}_{\max} \tag{10.21}$$

此处下限和上限力矩$\boldsymbol{\tau}_{\min}$，$\boldsymbol{\tau}_{\max}\in\mathbb{R}^n$是常数或机械手姿态 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数。末端操作手复合速度的变化率 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\theta},\dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{10.22}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\theta},\ \dot{\boldsymbol{\theta}})$ 是雅可比矩阵的时间导数。假设 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})$ 是非奇异的，可以得到

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\dot{\boldsymbol{t}}-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t}) \tag{10.23}$$

将上式代入动力学方程（10.20），得到

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t},\dot{\boldsymbol{t}})=\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t}) \tag{10.24}$$

其中

$$\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$$

$$\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})]\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

对于给定的状态（$\boldsymbol{\theta}$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$），线性力矩限制（10.21）定义了一个复合加速度空间内的多面体。Greaetinger 和 Krogh[10.51]将加速度半径定义为中心在原点，完全包含在这个多面体内的球的最大半径。其代表末端操作手在任意方向的最小加速度。这个概念被用来衡量机械手的加速度能力，也被用来确定执行器的尺寸来获得期望的加速度半径。Bowling 和 Khatib[10.38]将这一概念推广以衡量末端操作手的力和加速度能力，定量描述机械手的最差动态表现。

### 10.4.2 静弹性性能

静弹性性能反映机器人在静平衡条件下对外加负载-力和力矩的响应。这种响应体现为机械手的刚度，即末端操作手受外加复合力时的位移和角度形变。

机器人形变有两个来源：杆件和关节形变。对应杆件很长的情况，如空间机器人-加拿大手臂2型，杆件柔性是形变的主要来源。对于当今大多数串联机器人，形变主要出现在关节处。

在本章中，我们认为机器人杆件是刚性的，关节模型是线弹性扭转弹簧。更复杂的杆件柔性问题将在

第13章中深入介绍。关于静弹性模型，我们的分析建立在一下假设基础上：对于定位任务，关节锁定在某一姿态 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处，末端操作手受到复合力扰动 $\Delta\boldsymbol{w}$ 作用，其被弹性关节力矩 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 所平衡。在该条件下，$\Delta\boldsymbol{\theta}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 之间服从著名的线性关系

$$\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{\theta}=\Delta\boldsymbol{\tau} \tag{10.25}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 是关节空间中对应给定姿态处的刚度矩阵，是一个对角阵，各对角线元素分别对应各关节的扭转刚度，因此 $\boldsymbol{K}$ 是姿态独立的，即在整个机器人工作空间内为常数矩阵。另外，因为所有关节都具有有限的非零刚度，因此 $\boldsymbol{K}$ 是可逆的，其逆阵 $\boldsymbol{C}$ 被称为柔顺矩阵。可以将（10.25）式的逆表示为

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{\tau} \tag{10.26}$$

显然 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 都具有增量的本质，都由平衡姿态处开始测量，在平衡姿态处，二者均为0。

关于刚度矩阵，Griffis 和 Duffy[10.52] 提出了一种由刚体位移增量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 到复合力增量 $\Delta\boldsymbol{w}$ 的不具有对称性的映射。映射背后的概念是 Howard 等人在参考文献［10.53］中利用 Lie 代数方式提出的。但在上述文章中，$\Delta x$ 和 $\Delta w$ 是不匹配的，它们的乘积并不代表功的增量，因为 $\Delta x$ 并不出现在 $\Delta w$ 的作用点，因此，上述映射的矩阵形式并不代表刚度矩阵。

给定相同幅值的 $\Delta\boldsymbol{\tau}$，变形在与 $\boldsymbol{C}$ 的最大特征值，即 $\boldsymbol{K}$ 的最小特征值（表示为 $\kappa_{\min}$），对应的特征向量方向上的形变最大。关于静弹性性能，我们的目标是：①最小化最大形变，即最大化 $\kappa_{\min}$；②使形变的幅值 $\|\Delta\theta\|$ 尽可能关于负载 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的作用方向不敏感。可以通过使 $K_{\min}$ 尽可能接近 $K_{\max}$ 来实现。第一个目标与刚度常数相关，该常数越大，形变越小。第二个目标涉及各向同性，最理想的情况是 $K$ 的所有特征值都相等，即 $K$ 本身是各向同性的。由于串联机器人的金字塔效应，即靠近机座的电动机需要支撑其后所有部分，整体的刚度由靠近机座的关节决定，因此，串联机械手不可能具有各向同性的刚度矩阵。

式（10.25）和式（10.26）也可以在任务空间中表述为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}\Delta\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{w} \tag{10.27}$$

式中，$\Delta\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{t}\Delta t$，$\Delta t$ 代表一个时间间隔微量，在此期间内末端操作手的姿态变化微量是 $\Delta\boldsymbol{x}$，即

$$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}\Delta t=\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{\theta} \tag{10.28}$$

是一个由关节增量向量到位姿增量向量的线性变换。下面我们将说明刚度矩阵不是坐标系不变的，即在由关节空间到笛卡儿空间的线性变换中，刚度矩阵不满足相似变换。我们首先简要回顾相似变换的定义：如果 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$ 是一个由 $\boldsymbol{R}^n$ 空间到其自身的线性变换，引入向量基的变化，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{L}$ 变成 $\boldsymbol{L}'$，即满足下式

$$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{10.29}$$

上述变换将 $\boldsymbol{R}^n$ 空间内的任意向量变换为同一空间内的另一向量，将矩阵 $\boldsymbol{L}$ 变换为 $\boldsymbol{L}'$，如式（10.29）所示，称为相似变换。因为 $\boldsymbol{A}$ 代表坐标系之间的转换，所以其必然可逆。

现在，由式（10.28）和式（10.27）给出的坐标变换，可以得到

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\tau} \tag{10.30}$$

其中我们需要利用动态静力学关系[10.11]

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{w}=\Delta\boldsymbol{\tau}$$

在此，指数项 $-\mathrm{T}$ 意味着逆的转置，或转置的逆。在式（10.30）两端同时左乘 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$，可以得到：

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{\theta}=\Delta\boldsymbol{\tau} \tag{10.31}$$

比较式（10.25）和式（10.31），可以得到关节空间的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和笛卡儿空间的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$ 之间的关系

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}\boldsymbol{J}\ \text{或}\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}^{-1} \tag{10.32}$$

显然 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$ 之间不满足相似变换。意味着这两个矩阵不会具有完全相同的特征值，它们的特征向量也不能通过式（10.28）描述的线性关系相关联。事实上，如果机器人是转动耦合的，它的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的元素都具有单位 N·m，即扭转刚度，而 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$ 的元素具有不同的单位。为说明这点，将雅可比矩阵和其逆，以及两个刚度矩阵都分解为四个 3×3 的子块，即

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12}\\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{J}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}'_{11} & \boldsymbol{J}'_{12}\\ \boldsymbol{J}'_{21} & \boldsymbol{J}'_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{22}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}11} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}12}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}22}\end{pmatrix}$$

由复合速度的定义式（10.2）可知，$\boldsymbol{J}$ 的上半部分的两个子块是无量纲的，它的下半部分的两个子块具有长度单位[10.11]。因此，$\boldsymbol{J}^{-1}$ 左侧的两个子块是无量纲的，其右侧的两个子块具有逆长度单位。$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$ 的各子块可由式（10.32）所示的关系得出：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}11}=\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{11}(\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{J}'_{11}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{J}'_{21})+\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{21}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{12}\boldsymbol{J}'_{11}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{J}'_{21})$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}12}=\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{11}(\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{J}'_{12}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{J}'_{22})+\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{21}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{12}\boldsymbol{J}'_{12}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{J}'_{22})$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}21}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{C}12}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}22}=\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{12}(\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{J}'_{12}+\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{J}'_{22})+\boldsymbol{J}'^{\mathrm{T}}_{22}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}_{12}\boldsymbol{J}'_{12}+\boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{J}'_{22})$$

显然，$K_{C11}$的元素的单位是 N·m，即扭转刚度，$K_{C12}$和$K_{C21}$的元素的单位是 N，$K_{C11}$的元素的单位是 N/m，即平移刚度。

上述讨论的结论是可以得到$K$的范数，但不能直接得到$K_C$的范数，除了引入特征长度使得$K_C$的所有元素成为齐次无量纲的。矩阵的范数是有用的工具，因为它表征矩阵的元素有多大。我们希望确定机器人在关节空间和笛卡儿空间的刚度如何，在关节空间，我们可以采用任何范数，需要指出，式（10.3）介绍的2范数并不适合，因为它会把最强的关节的刚度赋予整个机器人系统，更合适的方式是采用式（10.17）描述的加权 Frobenius 范数，它采用各关节刚度的均方根值。

为实现机器人的最优设计，我们将力求获得在关节空间的刚度矩阵的 Frobenius 范数的最大值，同时兼顾机器人重量的约束。因为如果所有的关节都选用同样的材料，刚度越大意味着关节越重。

### 10.4.3　动弹性性能

对于一个通用的设计问题，不仅动态静力学和静弹性性能，还需要考虑动弹性性能。因此，我们在10.4.2节介绍的假设的基础上，增加一个条件，即考虑由杆件质量和转动惯量导致的惯性力。

在给定的姿态$\boldsymbol{\theta}_0$，忽略阻尼项，一个串联机器人的线性化模型可写成

$$\boldsymbol{M}\Delta\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{\theta}=\Delta\boldsymbol{\tau} \qquad (10.33)$$

式中，$\boldsymbol{M}$是10.4.1节中介绍的$n\times n$维正定质量阵，$\boldsymbol{K}$是10.4.2节中介绍的关节空间中的$n\times n$维正定刚度矩阵。$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{K}$都在关节空间坐标系内定义，$\Delta\boldsymbol{\theta}$代表关节变量弹性位移向量。这些位移产生的前提是各关节被锁定在位置$\boldsymbol{\theta}_0$处，具有理想的线弹性特性。机器人受到扰动$\Delta\boldsymbol{\tau}$的作用，或存在一个不为零的初始条件，或二者皆存在。

在自由振动情况下，即系统（10.33）的运动由非零初始条件导致，扰动$\Delta\tau$为零，则可由上述方程求解出$\Delta\ddot{\boldsymbol{\theta}}$：

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{\theta}}=-\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} \qquad (10.34)$$

式中，$\boldsymbol{D}$被定义为动力学矩阵。其决定被考虑的系统的行为，因为它的特征值就是系统的固有频率，而其特征向量对应系统的模态向量。以$\{\omega_i\}_1^n$和$\{\boldsymbol{f}_i\}_1^n$分别代表$\boldsymbol{D}$的特征值和特征向量的集合。在初始条件$[\Delta\boldsymbol{\theta}(0),\ \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}(0)]^{\mathrm{T}}$情况下，其中$\Delta\boldsymbol{\theta}(0)$与$\boldsymbol{D}$的第$i$个特征向量成比例，且$\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}(0)=0$，则系统的运动形式为$\Delta\boldsymbol{\theta}(t)=\Delta\boldsymbol{\theta}(0)\cos\omega_i t$[10.54]。

进一步，在式（10.28）描述的变化情况下，模型（10.33）变化为

$$\boldsymbol{MJ}^{-1}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{KJ}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{w}$$

在上式等号两端都乘以$\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}$，可以得到模型（10.33）在笛卡儿坐标系下的动弹性模型

$$\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{MJ}^{-1}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{KJ}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{w}$$

其中第一个矩阵系数是笛卡儿坐标系下的质量矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{C}}\equiv\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{MJ}^{-1} \qquad (10.35)$$

第二个系数是式（10.32）中定义的$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$。在笛卡儿坐标系下的动弹性模型可以写为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{C}}\Delta\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}\Delta\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{w} \qquad (10.36)$$

再次重申，由变换（10.35）可知，与刚度矩阵类似，质量矩阵同样不具有在不同坐标系下的不变性。对于转动耦合型机器人，$\boldsymbol{M}$的所有元素的单位都是 kg·m$^2$，但$\boldsymbol{M}_{\mathrm{C}}$的元素具有不同的单位。与10.4.2节中对笛卡儿空间中的刚度矩阵进行的类似的分析表明，如果将$M_{\mathrm{C}}$分解为4个3×3的子块，则它的左上子块具有转动惯量单位，它的右下子块具有质量单位，其他非对角块的单位是 kg. m。

笛卡儿空间中的动力学矩阵相应变化为

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{C}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}} \qquad (10.37)$$

证明动力学矩阵具有相对坐标系的不变性非常简单。将变换（10.32）和（10.35）代入式（10.37），可以得到

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{JM}^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{KJ}^{-1}=\boldsymbol{JM}^{-1}\boldsymbol{KJ}^{-1}$$

其中可以发现关节坐标系中的动力学矩阵$\boldsymbol{D}$的表达式，因此有

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{JDJ}^{-1} \qquad (10.38)$$

也就意味着$\boldsymbol{D}_{\mathrm{C}}$是$\boldsymbol{D}$的相似变换。从而，动力学矩阵在坐标系改变时具有不变性，即两个矩阵具有相同的特征值集合，它们的特征向量之间满足同样的相似变换。如果$\boldsymbol{D}$在关节空间中的模态向量记为$\{\boldsymbol{f}_i\}_1^n$，对应笛卡儿空间内的模态向量记为$\{\boldsymbol{g}_i\}_1^n$，则这两个集合之间的相互关系是

$$\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{Jf}_i \qquad i=1,\cdots,n \qquad (10.39)$$

因此，无论在哪个空间中计算，动弹性模型的固有频率总是相同的，振动的自然模态的变换符合相似变换。

在零初始条件下，受到形如$\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\theta}_0\cos\omega t$的激励作用时，系统的响应将是频率为$\omega$的简谐运动，其幅值将同时取决于$\omega$和系统的频率谱$\{\omega_i\}_1^n$[10.54]。当$\omega$等于系统的自然频率时，响应的幅值将无限地增大，即出现共振现象。由于这个原因，在

设计机器人时，需要严格地保证它的频率谱不包含任何期望的工作频率。这点可以通过调整机器人的质量和刚度矩阵来使得机器人的频率谱处于所有工作条件的频率范围之外来实现。

设计不是一个直截了当的任务。事实上，在关节空间中刚度矩阵是常数矩阵，而质量矩阵则取决于当前的姿态，即 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})$。因为这一特性，机器人的动弹性设计是个迭代的过程：设计过程如同一个稻草人任务。给定一个典型的任务，包括一系列的姿态，对应存在一系列的质量矩阵。随后，对应所有这些姿态的频率谱将被设计处于稻草人任务的频率范围之外。鉴于机器人终究将执行与稻草人任务不同的任务，需要进行针对不同任务的仿真由共振角度来确保设计的安全性。

## 参考文献


10.1 O. Bottema, B. Roth: *Theoretical Kinematics* (North-Holland, Amsterdam 1979), Also available by Dover Publishing, New York 1990

10.2 J. Angeles: The qualitative synthesis of parallel manipulators, ASME J. Mech. Des. **126**(4), 617–624 (2004)

10.3 J. Denavit, R.S. Hartenberg: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, ASME J. Appl. Mech. **77**, 215–221 (1955)

10.4 G. Pahl, W. Beitz: *Engineering Design. A Systematic Approach*, 3rd edn. (Springer, London 2007), Translated from the original Sixth Edition in German

10.5 M. Petterson, J. Andersson, P. Krus, X. Feng, D. Wappling: Industrial Robot Design Optimization in the Conceptual Design Phase, Proc. Mechatron. Robot., Vol. 2, ed. by P. Drews (APS-European Centre for Mechatronics, Aachen 2004) pp. 125–130

10.6 Koning & Hartman, Amsterdam, The Netherlands, http://www.koningenhartman.com/nl/producten/aandrijven_en_besturen/robots/ir_rp_ah/ (November 23, 2007)

10.7 R. Clavel: Device for the movement and positioning of an element in space, Patent 4976582 (1990)

10.8 R. Vijaykumar, K.J. Waldron, M.J. Tsai: Geometric optimization of serial chain manipulator structures for working volume and dexterity, Int. J. Robot. Res. **5**(2), 91–103 (1986)

10.9 J.P. Merlet: *Parallel Robots* (Springer, Dordrecht 2006)

10.10 K. Hoffman: *Analysis in Euclidean Space* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1975)

10.11 J. Angeles: *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*, 3rd edn. (Springer, New York 2007)

10.12 L. Burmester: *Lehrbuch der Kinematik* (Arthur Felix, Leipzig 1886), in German

10.13 J.M. McCarthy: *Geometric Design of Linkages* (Springer, New York 2000)

10.14 H. Li: Ein Verfahren zur vollständigen Lösung der Rückwärtstransformation für Industrieroboter mit allegemeiner Geometrie. Ph.D. Thesis (Universität-Gesamthochscule Duisburg, Duisburg 1990)

10.15 M. Raghavan, B. Roth: Kinematic analysis of the 6R manipulator of general geometry, Proc. 5th Int. Symp. Robot. Res., ed. by H. Miura, S. Arimoto (MIT Press, Cambridge 1990)

10.16 J. Angeles: The degree of freedom of parallel robots: a group-theoretic approach, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (Barcelona 2005) pp. 1017–1024

10.17 C.C. Lee, J.M. Hervé: Translational parallel manipulators with doubly planar limbs, Mechanism Machine Theory **41**, 433–455 (2006)

10.18 B. Roth: Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint, National Bureau of Standards – NBS SP **495**, 39–61 (1976)

10.19 A. Kumar, K.J. Waldron: The workspaces of a mechanical manipulator, ASME J. Mech. Des. **103**, 665–672 (1981)

10.20 D.C.H. Yang, T.W. Lee: On the workspace of mechanical manipulators, ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. **105**, 62–69 (1983)

10.21 Y.C. Tsai, A.H. Soni: An algorithm for the workspace of a general n-R robot, ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. **105**, 52–57 (1985)

10.22 K.C. Gupta, B. Roth: Design considerations for manipulator workspace, ASME J. Mech. Des. **104**, 704–711 (1982)

10.23 K.C. Gupta: On the nature of robot workspace, Int. J. Robot. Res. **5**(2), 112–121 (1986)

10.24 F. Freudenstein, E. Primrose: On the analysis and synthesis of the workspace of a three-link, turning-pair connected robot arm, ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. **106**, 365–370 (1984)

10.25 C.C. Lin, F. Freudenstein: Optimization of the workspace of a three-link turning-pair connected robot arm, Int. J. Robot. Res. **5**(2), 91–103 (1986)

10.26 T. Yoshikawa: Manipulability of robotic mechanisms, Int. J. Robot. Res. **4**(2), 3–9 (1985)

10.27 J. Loncaric: Geometric Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics. Ph.D. Thesis (Harvard University, Harvard 1985)

10.28 B. Paden, S. Sastry: Optimal kinematic design of 6R manipulators, Int. J. Robot. Res. **7**(2), 43–61 (1988)

10.29 J.K. Salisbury, J.J. Craig: Articulated hands: force control and kinematic issues, Int. J. Robot. Res. **1**(1), 4–17 (1982)

10.30 G. Strang: *Linear Algebra and Its Applications*, 3rd edn. (Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, New York 1988)

10.31 G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix Computations* (The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore 1989)

10.32 A. Dubrulle: An optimum iteration for the matrix polar decomposition, Electron. Trans. Numer. Anal. **8**, 21–25 (1999)

10.33 W.A. Khan, J. Angeles: The Kinetostatic Optimization of Robotic Manipulators: The Inverse and the Direct Problems, ASME J. Mech. Des. **128**, 168–178 (2006)

10.34 H. Pottmann, J. Wallner: *Computational Line Geometry* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 2001)

10.35 H. Asada: A geometrical representation of manip-

ulator dynamics and its application to arm design, Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. Contr. **105**(3), 131–135 (1983)

10.36 T. Yoshikawa: Dynamic manipulability of robot manipulators, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1985) pp. 1033–1038

10.37 P.A. Voglewede, I. Ebert-Uphoff: Measuring closeness to singularities for parallel manipulators, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (New Orleans 2004) pp. 4539–4544

10.38 A. Bowling, O. Khatib: The dynamic capability equations: a new tool for analyzing robotic manipulator performance, IEEE Trans. Robot. **21**(1), 115–123 (2005)

10.39 C.M. Gosselin, J. Angeles: A new performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators, Proc. 20th ASME Mech. Conf. (Kissimmee 1988) pp. 441–447

10.40 C. Gosselin, J. Angeles: The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator, ASME J. Mech. Trans. Autom. Des. **110**, 35–41 (1988)

10.41 A. Bicchi, C. Melchiorri, D. Balluchi: On the mobility and manipulability of general multiple limb robots, IEEE Trans. Robot. Autom. **11**(2), 232–235 (1995)

10.42 P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, B. Siciliano: Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems, IEEE Trans. Robot. Autom. **7**, 678–685 (1991)

10.43 C. Melchiorri: Comments on Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems and further considerations, IEEE Trans. Robot. Autom. **9**, 232–235 (1993)

10.44 P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, B. Siciliano: Reply to comments on Global task space manipulability ellipsoids for multiple-arm systems' and further considerations, IEEE Trans. Robot. Autom. **9**, 235–236 (1993)

10.45 F.C. Park: Optimal robot design and differential geometry, ASME Special 50th Anniv. Design Issue **117**(B), 87–92 (1995)

10.46 F.C. Park, J. Kim: Manipulability of closed kinematic chains, ASME J. Mech. Des. **120**(4), 542–548 (1998)

10.47 A. Liégeois: Automatic supervisory control for the configuration and behavior of multibody mechanisms, IEEE Trans. Sys. Man. Cyber. **7**(12), 842–868 (1977)

10.48 C.A. Klein, C.H. Huang: Review of pseudo-inverse control for use with kinematically redundant manipulators, IEEE Trans. Sys. Man. Cyber. **13**(2), 245–250 (1983)

10.49 J.M. Hollerbach: Optimum kinematic design of a seven degree of freedom manipulator. In: *Robotics Research: The Second International Symposium*, ed. by H. Hanafusa, H. Inoue (MIT Press, Cambridge 1985)

10.50 M.W. Spong: Remarks on robot dynamics: canonical transformations and riemannian geometry, Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. (1992) pp. 454–472

10.51 T.J. Graettinger, B.H. Krogh: The acceleration radius: a global performance measure for robotic manipulators, IEEE J. Robot. Autom. **4**(11), 60–69 (1988)

10.52 M. Griffis, J. Duffy: Global stiffness modeling of a class of simple compliant couplings, Mechanism Machine Theory **28**, 207–224 (1993)

10.53 S. Howard, M.J. Zefran Kumar: On the 6× 6 cartesian stiffness matrix for three-dimensional motions, Mechanism and Machine Theory **33**, 389–408 (1998)

10.54 L. Meirovitch: *Fundamentals of vibrations* (McGraw-Hill, Boston-London 2001)

# 第 11 章 运动学冗余机械臂

Stefano Chiaverini，Giuseppe Oriolo，Ian D. Walker

吴立成 译

本章主要讨论冗余度求解的方法，即在求解逆运动学问题时利用冗余自由度的技巧。显然，这是一个与运动规划和控制密切相关的问题。

本章首先特别回顾了面向任务的运动学及其速度级（一阶微分）求逆的基本方法，并讨论了处理运动学奇异的主要方法。其次，把不同的求解运动学冗余的一阶方法分成两大类，即基于适当性能指标的优化方法和基于任务空间增广的方法。为考虑例如力矩最小化这样的动力学问题，随后讨论了加速度级（二阶微分）的冗余度求解方法。还讨论了由关节的循环运动产生循环的任务空间运动的条件，这是一个重要的问题，比如在工业上应用一个冗余机械臂完成重复性任务这样的场合。同时还详细分析了超冗余度这种特殊类型的机械臂。最后一节对进一步学习所需的参考读物进行了推荐。

运动学冗余的机械臂具有比完成任务所需要的更多的关节，这使机器人拥有更多的灵巧性，这不仅可用于实现避奇异、避关节超限和任务空间避障，还可用于最小化关节力矩、最小化能量消耗，或者一般而言，优化某种适当的性能指标。



## 11.1 概述

当机械臂具有比刚好能完成给定任务所需要的自由度更多的自由度时侯，就具有了运动学冗余度。这意味着，原则上没有什么机械臂是本质上冗余的。更准确地说，是存在某些任务，机械臂针对这样的任务时就成了冗余的。因为众所周知，一般的任务要求末端执行器跟踪一个运动轨迹，这需要 6 个自由度，所以具有 7 个或更多关节的机械臂被当成是本质上冗余的机械臂的典型例子。但具有更少自由度的机器人，比如传统的六关节工业机械臂，对于某些任务而言也可能成为运动学冗余的，例如，只是简单要求末端执行器的位置而对姿态没有约束的任务。

传统工业设计中利用冗余是为了增加对故障的鲁棒性以提高可靠性（比如处理器或传感器冗余），在机械臂的机械结构上引入运动学冗余的目的不止于此。实际上，使机械臂具有运动学冗余的主要目的是增加灵活性。

早期机械臂设计方法的特点是具有最小的复杂性，设计目标是最低的成本和维护。比如用于完成拾-放操作的平面关节型机械臂（SCARA）[⊖]就是这种

⊖ 译者注：Selective Compliance Assembly Robot Arm，有时也直译为选择顺应性装配机械手臂。

设计理念的产物。可是让机械臂只具有能完成任务的最少关节会在实际应用中导致严重的局限性，除了奇异，还会遇到关节超限或工作空间障碍问题。这些问题都将使关节空间中的禁区增大，以便在操作过程中回避。这就需要有一个仔细构造的且是静态的工作空间，机械臂的运动可以事先在该空间中进行规划，机器人设备在传统工业应用中的情况就是这样的。

另一方面，具有比执行任务所需更多的自由度使机械臂能进行所谓的自运动或内运动，即不改变末端执行器位姿的机械臂运动。这意味着末端执行器执行同样的任务时，关节可以选择多种不同的运动方式，有可能避开禁区，最终提高设备的通用性。这种特性是在非结构化或动态环境中进行操作的关键，而非结构化或动态环境正是先进工业应用和服务机器人的工作环境。

实际上，如果规划得当，以增加了灵巧性为特色的运动学冗余机械臂有可能实现避奇异、避关节超限和工作空间避障，以及针对特定任务最小化力矩/能耗，本质上意味着机器人机械臂能达到较高的自治程度。

运动学冗余机械臂的生物原型是人类的手臂，不用惊讶，手臂也是术语学上命名串联结构机械臂的灵感来源。实际上，人类手臂的肩部有3个自由度，肘部和腕部各有一个和三个自由度。固定你的腕部，比如把手腕搁在桌子上并在肩部不动的情况下移动手肘，就可以很容易地验证手臂具有有效的冗余度。许多机器人模仿了人类手臂的运动学配置，并被称为类人机械臂。包括DLR轻型机器人（见图11.1）和三菱的PA-10机器人（见图11.2）在内的机器人，形成了一个七自由度机械臂的家族。而Scienzia Machinale公司的DEXTER（参见图11.3）则是一个八自由度机器人的例子。有大量关节的机械臂常常被称为“超冗余度”机器人，包括文献中描述的许多蛇形机器人。

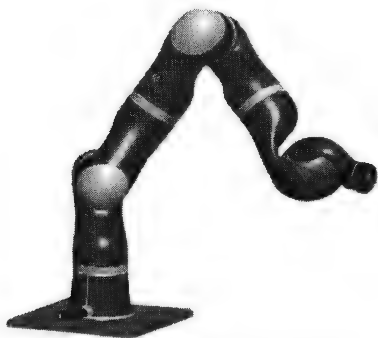


图11.1　七自由度DLR轻型机器人

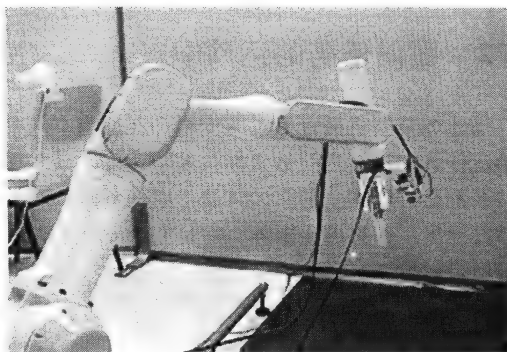


图11.2　七自由度三菱PA-10机械臂

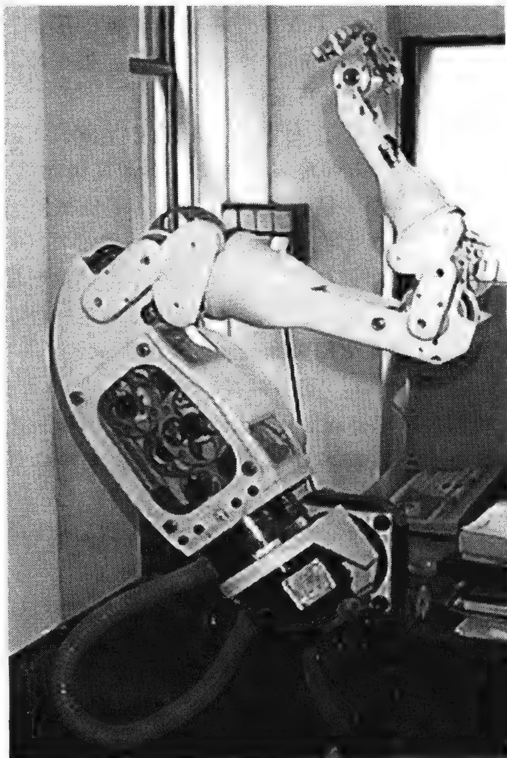


图11.3　Scienzia Machinale公司的八自由度机械臂DEXTER

使用两个及以上机器人设备共同执行同一项任务，比如多机械臂协调和多指手，也会形成运动学冗余。冗余装置还包括车辆-机械臂系统，不过这种情况下冗余度的准确计算还必须考虑车辆本体运动可能出现的非完整约束。

虽然要制造运动学冗余的设备在机械设计方面也会出现一些问题，但本章专注于讨论冗余度求解方法，即在求解逆运动学问题时利用冗余自由度的技巧。这是一个与运动规划和控制密切相关的问题。

## 11.2 面向任务的运动学

描述关节型机械臂形态的变量和在适当空间中描述给定任务的变量之间的坐标关系、速度关系和加速度关系都是可以建立的。尤其是考虑任务的一阶运动学还可导出任务雅可比矩阵，它是冗余度求解方法研究的主要对象。

### 11.2.1 任务空间方程

机械臂是一个由关节连接的刚体链。令 $q_i$ 为刚体 $i$ 相对于刚体 $i-1$ 的位置变量，向量 $\boldsymbol{q}=(q_1\cdots q_N)^{\mathrm{T}}$ 就唯一地表示了 $N$ 关节串联机械臂的形态。关节 $i$ 可以是滑移关节或者是转动关节，$q_i$ 根据情况分别表示相邻连杆的位移或转角。

虽然机械臂在“关节空间”中进行表示和驱动比较自然，但要方便地表示它的操作却要用向量 $\boldsymbol{t}=(t_1\cdots t_M)^{\mathrm{T}}$，典型的情况是该向量表示了机械臂末端执行器在一个适当定义的任务空间中的位置。一般情况下，$M=6$，而且 $\boldsymbol{t}$ 的前三个元素表示末端执行期位置，而后三个元素则是末端执行器姿态的某种最小描述（比如欧拉角或 RPY 角表示），也即

$$\boldsymbol{t}=[p_x \quad p_y \quad p_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma]^{\mathrm{T}}$$

典型的情况是 $N\geqslant M$，因而关节能提供的自由度数不少于末端执行器任务所需要的。如果严格满足 $N>M$，机械臂就是运动学冗余的。

关节空间坐标向量 $\boldsymbol{q}$ 与任务空间坐标向量 $\boldsymbol{t}$ 的关系可以表示为正向运动方程

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q}) \tag{11.1}$$

式中，$\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}$ 是一个非线性向量函数。

**1. 任务雅可比和几何雅可比**

考虑一阶微分运动学方程[11.1]

$$\dot{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{11.2}$$

式（11.2）可由（11.1）对时间求导得到。在式（11.2）中，$\dot{\boldsymbol{t}}$ 是任务空间速度向量；$\dot{\boldsymbol{q}}$ 是关节空间速度向量；$\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q})=\partial\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}/\partial\boldsymbol{q}$ 是 $M\times N$ 的任务雅可比矩阵（也称为解析雅可比）。

值得注意的是，$\dot{\boldsymbol{t}}$ 中关于末端执行器姿态的元素表示了用于描述姿态的参数的变化速率，而不是末端执行器的角速度向量。其实，令 $\boldsymbol{v}_N$ 表示末端执行器的 $3\times1$ 平动速度向量，$\boldsymbol{\omega}_N$ 表示 $3\times1$ 角速度向量，并定义末端执行器的速度 $\boldsymbol{v}_N$ 为

$$\boldsymbol{v}_N=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_N\\ \boldsymbol{\omega}_N\end{pmatrix} \tag{11.3}$$

则下面的关系式成立

$$\dot{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}_N \tag{11.4}$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 是一个 $M\times6$ 的变换矩阵，它只是 $t$ 的函数。当 $M=6$ 时，变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的形式为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}\end{pmatrix} \tag{11.5}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 分别是适当维数的单位矩阵和零矩阵；$\boldsymbol{R}$ 是一个 $3\times3$ 的特定矩阵，由描述末端执行器姿态的表示方式决定。

对一个特定的机械臂，映射

$$\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{11.6}$$

通过 $6\times N$ 的几何雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 把关节空间速度和相应的末端执行器速度联系起来了。几何雅可比矩阵是机械臂运动学分析主要的研究对象，因为可以通过它根据当前形态下的关节速度控制量，得出末端执行器的运动（表示为它的刚体自由空间速度）。

对比式（11.2）、式（11.4）和式（11.6），可得几何雅可比和任务雅可比之间的关系为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \tag{11.7}$$

**2. 二阶微分运动学**

一阶微分运动学式（11.2）表示了任务空间和关节空间速度之间的关系，进一步求它对时间的导数可以得到加速度的类似关系

$$\ddot{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{11.8}$$

上式也被称为二阶微分运动学。

### 11.2.2 奇异

本节通过考虑奇异位形的产生原因来分析它在运动学逆解中的作用。

**1. 表示法奇异与运动学奇异**

如果任务雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}$ 在某个位形下是降秩的，则这个机器人位形 $\boldsymbol{q}$ 是奇异的。考虑 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}$ 在式（11.2）和式（11.8）中的作用，容易理解处于奇异位形时无法产生末端执行器在某些方向上的速度或加速度。观察式（11.7）可发现更深层次的问题，奇异可能是因为变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和几何雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 有一个不满秩，或者都不满秩。

$\boldsymbol{T}$ 矩阵的不满秩只与 $\boldsymbol{R}$ 建立的末端执行器角速度向量和 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 中关于末端姿态的分量之间的数学关系有关。因为 $\boldsymbol{R}$ 的表达式决定于所用的姿态表示法，导致 $\boldsymbol{T}$ 奇异的位形因而被认为是表示法奇异点。值得注意的是，任何一种末端执行器姿态的最小表示都会产生表示法奇异。当然对于一个特定的位形而言，会

不会产生表示法奇异是由所采用的姿态表示方法决定的。

表示法奇异与机械臂的真实运动能力并没有直接关系，真实运动能力可以改用几何雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 来分析。该矩阵的降秩实际上是与机械臂末端执行器运动能力的缺失相关的。确切地说，此时某些末端执行器速度是用任何关节速度都无法实现的。使得 $\boldsymbol{J}$ 奇异的位形称为运动学奇异点。

因为本章主要关注微分运动学方程（11.2）和式（11.8）的求逆，接下来详细研究任务雅可比矩阵和它的奇异（包括表示法奇异和运动学奇异）。考虑 $N \geqslant M$ 的情况，以涵盖常规机械臂和冗余机械臂。

**2. 雅可比矩阵的奇异值分解**

为了分析式（11.2）表示的线性映射，可对雅可比矩阵进行奇异值分解（SVD）。值得注意的是，奇异值分解是一个强有力的数学工具，在计算矩阵的秩和分析近乎奇异的线性映射时，它是唯一可靠的方法。经典的 Golub-Reinsch 算法[11.2]是计算任意矩阵奇异值分解最有效率和数值最稳定的算法，但可能还是难以达到实时应用的计算要求。参考文献[11.3]提出了一种利用机器人矩阵计算特点的更快算法，有可能用于提高运动学实时控制方法的性能。

任务雅可比矩阵的 SVD 可以写为如下形式

$$\boldsymbol{J}_t = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{M} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \qquad (11.9)$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 是输出奇异向量 $\boldsymbol{u}_i$ 的 $M \times M$ 维正交矩阵；$\boldsymbol{V}$ 是输出奇异向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的 $N \times N$ 维正交矩阵；$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{0})$ 是一个 $M \times N$ 维的矩阵。它的 $M \times M$ 维对角线子矩阵 $\boldsymbol{S}$ 包含矩阵 $\boldsymbol{J}_t$ 的奇异值 $\sigma_i$。请注意 SVD 是其矩阵变量的连续乘函数，因此当机器人处于当前位形附近时，输入和输出奇异向量以及奇异值的差别也不大。令矩阵的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_t) = R$，则有

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_R > \sigma_{R+1} = \cdots = 0$$

$$\Re(\boldsymbol{J}_t) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_R\}$$

$$\aleph(\boldsymbol{J}_t) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{R+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$$

如果任务雅可比矩阵是满秩的（$R = M$），所有的奇异值都非零，$\boldsymbol{J}_t$ 的值空间就是整个的 $\mathbb{R}^M$，$\boldsymbol{J}_t$ 的零空间的维数为 $N\text{-}M$。而在奇异位形处，$R < M$，因此最后 $M\text{-}R$ 个奇异值等于零，$\boldsymbol{J}_t$ 的值空间是 $\mathbb{R}^M$ 的 $R$ 维子空间，$\boldsymbol{J}_t$ 的零空间的维数减少为 $N\text{-}R$。下面从运动学角度对此给出一种解释。

（1）可达速度　当机器人处于某一个位形时，$\boldsymbol{J}_t$ 的值空间是可以由所有可能的关节空间速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 计算得到的任务空间速度的集合。因此，值空间就组成了所谓的末端执行器任务的可达速度子空间。前 $R$ 个输出奇异向量就构成了值空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{J}_t)$ 的一个基底。因此，奇异的效果是从可达速度空间中抹去了一些任务速度的线性组合，从而减少了 $\boldsymbol{J}_t$ 的值空间的维数。

（2）零空间速度　在每个位形处，$\boldsymbol{J}_t$ 的零空间则是那些不产生任务速度的关节空间速度的集合。这样的关节速度因此被简称为零空间速度。后 $N\text{-}R$ 个输入奇异向量构成了零空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{J}_t)$ 的一个基底，这些向量表示每个关节速度的线性无关组合。从这种意义上说，奇异的效果是因为引入了更多的不产生任务速度的关节速度线性无关组合，增加了 $\boldsymbol{J}_t$ 的零空间的维数。

由式（11.2）和式（11.9）可知，平行于第 $i$ 个输入奇异向量的关节速度所产生的任务速度与第 $i$ 个输出奇异向量平行：

$\forall \rho \in \mathbb{R} \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \rho \boldsymbol{v}_i \Rightarrow \boldsymbol{t} = \sigma_i \rho \boldsymbol{u}_i$（译者注：此公式中的 $\boldsymbol{t}$ 应为 $\boldsymbol{t}$ 的导数 $\dot{\boldsymbol{t}}$。原文有误）

因此，$\boldsymbol{J}_t$ 的第 $i$ 个奇异值可以看成是一个增益系数，$\boldsymbol{v}_i$ 方向的关节速度空间运动到所产生的 $\boldsymbol{u}_i$ 方向任务速度空间运动之间的一个系数。当机器人靠近某个奇异位形时，第 $R$ 个奇异值 $\sigma_R$ 趋近于零，由沿着 $\boldsymbol{v}_R$ 方向的给定大小关节速度所产生的任务速度也按比例下降。当机器人处于某个奇异位形时，沿着 $\boldsymbol{v}_R$ 方向的关节速度属于零空间速度，沿着 $\boldsymbol{u}_R$ 方向的任务空间速度变得无法实现。

一般情况下，关节空间速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 是在所有 $\boldsymbol{v}_i$ 方向上都含有非零分量的各关节速度的一个任意的线性组合。总的效果可以通过合并单个上述分量的效果来分析。值得注意的是，$\dot{\boldsymbol{q}}$ 的属于 $\boldsymbol{J}_t$ 零空间的部分会引起机械臂位形的变化，却不改变任务空间速度。这种运动可以用于在实现期望的任务运动的同时实现附加的目标，比如壁障或避奇异。这正是冗余度求解算法研究的核心内容。

**3. 到奇异点的距离**

奇异不仅在奇异点，而且在奇异点相邻的位形处都会造成影响，这在实际经验中确定无疑。因此，根据某种适当的标准来表示一个位形与奇异点的距离就非常重要，可以用来避免不良影响。

因为每个奇异点都与 $\boldsymbol{J}_t$ 的降秩相关，当雅可比矩阵为方阵（$M = N$）时，一种概念上很简单的可能方法就是计算它的行列式。可操作性指标[11.4]就是这一思路对非方阵雅可比的一个推广，其定义为

$$\mu = \sqrt{|\boldsymbol{J}_t \boldsymbol{J}_t^{\mathrm{T}}|}$$

众所周知，可操作性等价于 $J_t$ 的奇异值的乘积，即

$$\mu = \prod_{i=1}^{M} \sigma_i$$

因此，它的零值就对应着奇异。

另一种到奇异点距离的合理指标是雅可比矩阵的条件数[11.5]，定义为

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_M}$$

条件数的取值范围是 1 ~ ∞。在奇异值都相等的位形处，取值为1。在奇异位形处取值为∞。请注意当 $\kappa = 1$ 时，所有奇异值都是相等的，因此末端执行器在任务空间的所有方向上的运动能力都是一样的，即机械臂处于一种各向同性的位形，而在奇异点处则在任务空间的某些方向上丧失了活动能力。

一种更直接的描述与奇异位形的距离的指标是雅可比矩阵的最小奇异值[11.5]，即

$$\sigma_{\min} = \sigma_M$$

最小奇异值可以通过计算量较小的方法进行估计，包括数值方法[11.3,6,7]或基于机器人结构运动学分析的方法[11.8]。

必须注意，条件数或 $J_t$ 的最小奇异值差别很大的时候，可操作性指标却可能保持不变。另一方面，因为在奇异点附近最小奇异值的变化比其他奇异值更快，它会对雅可比矩阵行列式和条件数的变化起主导作用。因此，描述到奇异位形距离的最有效指标就是 $J_t$ 的最小奇异值[11.5]。

## 11.3 微分逆运动学

为完成一项任务，必须控制机械臂关节作适当的运动。因此，推导出可根据给定的任务空间量计算出关节空间量的数学关系非常必要。这也正是逆运动学问题研究的目标。

逆运动学问题可以通过正运动学方程（11.1），一阶微分运动学（11.2）或二阶微分运动学方程（11.8）求逆来求解。如果任务是时变的（即如果给定了形式为 $t(t)$ 的期望轨迹），则因为微分运动学关系表示为以任务雅可比为系数矩阵的线性方程组，可以方便地求解[11.9]。

### 11.3.1 通解

假设机械臂是运动学冗余的（即 $M < N$），式（11.2）或式（11.8）的通解可以借助任务雅可比矩阵的伪逆 $J_t^{\dagger}$ 来表示[11.1,10]，伪逆是指满足如下 Moore-Penrose 条件的唯一矩阵

$$\begin{aligned} J_t J_t^{\dagger} J_t &= J_t \\ J_t^{\dagger} J_t J_t^{\dagger} &= J_t^{\dagger} \\ (J_t J_t^{\dagger})^{\mathrm{T}} &= J_t J_t^{\dagger} \\ (J_t^{\dagger} J_t)^{\mathrm{T}} &= J_t^{\dagger} J_t \end{aligned} \tag{11.10}$$

如果 $J_t$ 是长方矩阵并且满秩，则其伪逆可由下式计算

$$J_t^{\dagger} = J_t^{\mathrm{T}} (J_t J_t^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{11.11}$$

如果 $J_t$ 是方阵，式（11.11）退化为标准的逆矩阵。

式（11.2）的通解可以写为

$$\dot{q} = J_t^{\dagger} \dot{t} + (I - J_t^{\dagger} J_t) \dot{q}_0 \tag{11.12}$$

式中，$I - J_t^{\dagger} J_t$ 是 $J_t$ 零空间中的正交映射；$\dot{q}_0$ 是一个任意的关节空间速度。因此解的第二部分是一个零空间速度。式（11.12）给出了满足末端执行器任务约束（11.2）的所有最小二乘解，即最小化 $\| \dot{t} - J\dot{q} \|$ 的解。尤其当 $J_t$ 是满秩长方矩阵时，式（11.12）表示的所有关节速度都能正确实现给定的任务速度。通过调节 $\dot{q}_0$，还可以得到能产生相同末端执行器任务速度的不同关节速度。因此，就像后面将详细讨论的那样，冗余度求解的相关文献一般都采用式（11.12）形式的解。

在式（11.12）中，令 $\dot{q}_0 = 0$ 可以得到特解

$$\dot{q} = J_t^{\dagger} \dot{t} \tag{11.13}$$

该特解是式（11.2）的最小范数的最小二乘解，被称为伪逆解。对于逆微分运动学问题，最小二乘特性保证了末端执行器任务实现的精度，而最小范数可能与关节空间速度的可行性相关。

对于二阶运动学方程（11.8），它的最小二乘解可以表示为如下的一般形式

$$\ddot{q} = J_t^{\dagger} (\ddot{t} - \dot{J}_t \dot{q}) + (I - J_t^{\dagger} J_t) \ddot{q}_0 \tag{11.14}$$

式中，$\ddot{q}_0$ 是一个任意的关节空间加速度。如上所述，在式（11.14）中，令 $\ddot{q}_0 = 0$ 可以得到最小范数加速度解

$$\ddot{q} = J_t^{\dagger} (\ddot{t} - \dot{J}_t \dot{q}) \tag{11.15}$$

### 11.3.2 奇异点的鲁棒性

现在来研究一阶逆映射（11.12）和（11.13）与奇异点处理所涉及的运动学方面的问题。参考式（11.9）中 $J_t$ 的奇异值分解，考虑矩阵 $J_t^{\dagger}$ 的以下分解

$$J_t^{\dagger} = V \Sigma^{\dagger} U^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{R} \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^{\mathrm{T}} \tag{11.16}$$

式中，$R$ 是如上所述表示任务雅可比矩阵的秩。类似

式（11.9），有以下式子：

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_R > \sigma_{R+1} = \cdots = 0$$

$$\mathscr{R}(J_t^{\dagger}) = \mathscr{N}^{\perp}(J_t) = \text{span}\{v_1, \cdots, v_R\}$$

$$\mathscr{N}(J_t^{\dagger}) = \mathscr{R}^{\perp}(J_t) = \text{span}\{u_{R+1}, \cdots, u_M\}$$

请注意，如果雅可比矩阵满秩，$J_t^{\dagger}$的值空间是$\mathbb{R}^N$中的一个$M$维子空间，$J_t^{\dagger}$的零空间是空的。而在奇异位形处（$R<M$），$J_t^{\dagger}$的值空间是$\mathbb{R}^N$中的一个$R$维子空间，$J_t^{\dagger}$存在一个$M$-$R$维的零空间。

$J_t^{\dagger}$的值空间是关节空间速度$\dot{q}$的一个集合，可以根据所有可能的任务速度$\dot{t}$，由逆运动学映射（11.13）计算得到。因为这些$\dot{q}$属于$J_t$的零空间的正交补，正如所希望的那样，伪逆解（11.13）满足最小二乘条件。

$J_t^{\dagger}$的零空间是一个在当前位形产生零关节空间速度的任务速度$\dot{t}$的集合。另一方面，这些$\dot{t}$属于可达任务速度空间的正交补。因此，伪逆解（11.13）的一个效果是滤除任务速度指令中不可实现的分量，而留下可精确跟踪的可达分量，这是和伪逆解的最小范数最小二乘特性相关联的。

如果给定的任务速度是沿着$u_i$方向的，则相应的关节空间速度（由式（11.13）计算得到的）平行于$v_i$，并且长度乘以系数$1/\sigma_i$。接近奇异点时，第$R$个奇异值趋于零，$u_R$方向一定大小的任务速度所需要的$v_R$方向的关节空间速度大小与系数$1/\sigma_R$与成比例，将无限增大。处于奇异点时，$u_R$方向对任务变量来说不可实现，$v_R$成了机械臂的零空间速度之一。

由以上分析可知，有两个主要问题与基本的微分逆运动学解（11.13）有着本质上的联系，即：

1）接近奇异位形时，可能需要超大的关节空间速度，原因是$\dot{t}$的一些分量处于这样的方向上，即在奇异点处不可实现的方向。

2）处于奇异位形时，如果$\dot{t}$包含非零的不可达分量，则关节空间解将不存在。

这两点对于完整的逆解（11.12）显然也是一样的。

上述两个问题都是机械臂运动学控制主要关心的问题，控制中要求计算出的关节空间速度必须是机器人手臂能够实际实现的才行。针对上述问题，发展出了改进的微分逆映射，以确保机械臂在整个工作空间中行为适当。一种合理的方法是远离奇异点时仍然使用映射（11.13），只在奇异位形附近的区域内对该映射进行改动。区域的定义则要靠描述到奇异点距离的适当指标来实现，而且改进的映射必须保证关节速度是连续的和可实现的。

**1. 规划轨迹修正**

处理奇异点问题的一种方法是在规划阶段就让轨迹避开无法消除的奇异点，或者说只赋给机器人手臂可实现的任务空间运动指令。然而，这种方法依赖于理想的轨迹规划，无法在实时的传感控制中应用，因为实时控制时运动指令是在线生成的。

对于任务空间中固定的奇异点，比如类人手臂的肩部奇异，在运动规划阶段避开奇异位形相对简单。但是，对于那些有可能在工作空间的任何地方出现的奇异，比如腕部奇异，这种方法就难以实现。

解决奇异问题的另一种可能的方法是当机械臂接近奇异点时进行关节空间插值[11.14]。不过，这种方法有可能在跟踪之前指定的任务空间运动时产生很大的误差。

参考文献［11.5］提出了一种作用在任务空间的、基于时间尺度变换的方法。这种方法令机械臂在接近奇异点时降低运动速度。但当机器人处于奇异点时，这种方法就失效了。

因为基于任务空间的机器人控制系统必须能控制机械臂安全地通过奇异点，大量研究转向了推导定义明确的连续的逆运动学映射。

**2. 消除雅可比矩阵中线性相关的行/列**

求解式（11.13）首先要求当雅可比奇异时，计算$J_t$的伪逆的一般算法是有效的。文献中提出了一些算法属于这样一种模式，消除不可实现的末端参考运动分量[11.16]，或是使用雅可比矩阵的非奇异分块[11.10]。这类方法的主要问题是要用一种系统性的方法求出不可达速度的方向，以及需要在常规的和用于奇异点附近的逆运动学算法之间进行平滑切换。

一种计算雅可比矩阵伪逆的系统性方法可以利用对机械臂结构的运动学分析来建立，因为对于典型的机械臂，有可能在适当地与连杆固接的动坐标系中辨识和描述奇异位形的类别。参考文献［11.17，18］针对六自由度肘关节形式的机械臂描述了这种方法。

要在穿越奇异点时保持解的连贯性，需要注意的是，机械臂在奇异点附近时奇异向量变化非常小，但在奇异位形处时$R$变得比$M$小，$\frac{1}{\sigma_M}v_M u_M^{\mathrm{T}}\dot{t}$项突然从式（11.16）中消失了。

一种可能的避免这一问题的方法是在奇异点附近

令 $u_M^T \dot{t} \approx 0$，这意味着去除奇异时不可达的方向上的任务速度指令。不过，如11.3.2节所述，这种方法只有在针对任务空间中固定的奇异点的轨迹预先规划时，才可以合理运用。

无论给定的 $\dot{t}$ 是什么，伪逆解的连贯性都可以这样来确保：在适当定义的奇异点邻域内将机械臂视为奇异，将雅可比修改为 $\bar{J}_t$，因而可得 $M-R$ 个额外的自由度[11.17~19]。这不会对末端执行器速度有太大影响，因为修正的雅可比 $\bar{J}_t$在领域内趋近于 $J_t$。当然这种方法难以用于多重奇异点。但对于典型的类人结构的工业机械臂，需要主要关心的只有腕部奇异，因为腕部奇异可能在工作空间的任何地方出现，而肘部和肩部奇异在任务空间中是固定的，因而可以通过规划来避开。

**3. 正则化/阻尼最小二乘法**

参考文献［11.9，20］各自独立地提出了将阻尼最小二乘法用于微分逆运动学问题的方法。这种方法相当于求解方程

$$J_t \dot{t} = (J_t^{\dagger} J_t + \lambda^2 I)\dot{q} \qquad (11.17)$$

而不是式（11.2）。式中，$\lambda \in \mathbb{R}$ 为阻尼系数。可以验证，当 $\lambda$ 为零时，式（11.17）和式（11.2）就是一样的了。

式（11.17）的解可以写为两种等价的形式：

$$\dot{q} = J_t^T (J_t^T J_t + \lambda^2 I)\dot{t} \qquad (11.18)$$

$$\dot{q} = (J_t^T J_t + \lambda^2 I)^{-1} J_t^T \dot{t} \qquad (11.19)$$

式（11.18）的计算量小于式（11.19）的，因为一般而言 $N \geqslant M$。下文在不需要显性描述计算过程的地方，将把阻尼最小二乘解归结为

$$\dot{q} = J_t^*(q)\dot{t} \qquad (11.20)$$

解式（11.20）满足以下条件

$$\min_{\dot{q}} = (\|\dot{t} - J_t \dot{q}\|^2 + \lambda^2 \|\dot{q}\|^2) \qquad (11.21)$$

该条件实现了最小二乘特性和最小范数特性的折中。条件（11.21）意味着在求给定 $\dot{t}$ 所需要的关节空间速度时，同时考虑精度和可实现性。在这点上，适当选择阻尼系数非常关键：较小的 $\lambda$ 值能给出精确解，但对奇异点和近奇异点位形的鲁棒性较差；较大的 $\lambda$ 值会导致跟踪精度较低，即使是在精确可行解可能存的时候。

按照奇异值分解的模式，解（11.20）可以写为

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{R} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} v_i u_i^T \dot{t} \qquad (11.22)$$

请注意，下式成立

$$\Re(J_t^*) = \Re(J_t^{\dagger}) = \mathcal{N}^{\perp}(J_t) = \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_R\};$$

$$\mathcal{N}(J_t^*) = \mathcal{N}(J_t^{\dagger}) = \Re^{-}(J_t) = \operatorname{span}\{u_{R+1}, \cdots, u_M\}。$$

类似于 $J_t^{\dagger}$，如果雅可比矩阵满秩，$J_t^*$ 的值空间是$\mathbb{R}^N$ 中的 $M$ 维子空间，并且 $J_t^*$ 的零空间是空的；而在奇异位形处，$J_t^*$ 的值空间是$\mathbb{R}^N$ 中的 $R$ 维子空间，并且存在一个 $M-R$ 维的零空间。

显然，相比于纯粹的最小二乘解（11.13），解（11.22）中满足 $\sigma_i >> \lambda$ 的部分受阻尼系数的影响较小，因为此时有

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\sigma_i}$$

另一方面，当遇到奇异点时，最小奇异值趋于零，而解的相关部分被系数 $\sigma_i/\lambda^2$强制为零；这就逐渐减少了为实现期望 $\dot{t}$ 中接近退化的部分所需的关节速度。在奇异点，只要剩余奇异值比阻尼系数大得多，解（11.20）和解（11.13）的行为就是一致的。请注意，归因于阻尼系数，$1/(2\lambda)$ 的上界依赖于一个增益系数，第 $i$ 个系数是 $u_i$ 方向的任务速度分量和它产生的$v_i$方向关节速度之间的系数；当 $\sigma_i = \lambda$ 时，达到该上界。

（1）阻尼系数选取　由上所述，选取的阻尼系数值给定了当前位形与奇异点的接近程度；而且，$\lambda$ 决定了与伪逆给出的纯最小二乘解的相似程度。$\lambda$ 的优化选取需要考虑给定轨迹上的最小非零奇异值，并考虑确保可实现关节速度的最小阻尼。

为了在机械臂的整个工作空间中实现出良好的性能，参考文献［11.9］提出让阻尼系数随位形变化。普通的方法是把 $\lambda$ 作为机器人手臂当前位形到奇异点距离的一个函数来调节。远离奇异位形时解出的关节速度是可达的；因此精度要求占主导，应使用较小的阻尼。接近奇异点时，不可达方向的任务速度指令将导出很大的关节速度，因此精度要求应该放松；在这种情况下，需要使用较大的阻尼。

参考文献［11.9］提出把阻尼系数当成可操作性指标的函数来调节。因为雅可比矩阵的最小奇异值是描述到奇异点位形距离更有效的指标［11.5］，下文将考虑用它来构造可变的阻尼系数。

如果能得到最小奇异值的估计值 $\hat{\sigma}_M$，阻尼系数可选为下式[11.21]

$$\lambda^2 = \begin{cases} 0 & \text{当 } \hat{\sigma}_M \geqslant \varepsilon \text{ 时} \\ [1 - (\hat{\sigma}_M/\varepsilon)^2]\lambda_{\max}^2 & \text{其他} \end{cases} \qquad (11.23)$$

上述阻尼系数能确保解的连续性和良好形态。在式

(11.23) 中，$\varepsilon$ 定义了奇异区域的大小，在此区域内施加阻尼；$\lambda_{max}$则设定了阻尼系数的最大值，在奇异点处取得该值。

(2) 数字滤波　由式 (11.22) 可知，阻尼系数在所有末端执行器速度分量上都影响解的精度，但其实末端执行器速度只有在不可达方向上的分量才导致跟踪能力的损失。为了克服这个问题，参考文献 [11.6] 提出了对末端执行器速度分量进行选择性滤波的方法。方法可如下推导：如果可以得到输出奇异向量的一个估计 $\hat{u}_i$，此处的输出奇异向量是与形成不可达分量的最小的 $M$-$K$ 个奇异值相关的，解就可以写为如下形式

$$\dot{q}=J_t^{\mathrm{T}}(J_t^{\mathrm{T}}J_t+\lambda^2 I+\beta^2\sum_{i=k+1}^{M}\hat{u}_i\hat{u}_i^{\mathrm{T}})^{-1}\dot{t} \quad (11.24)$$

式中，$\beta$ 只沿着不可达分量方向给出阻尼的最大分量。这也可以由下式来验证

$$\dot{q}\approx\sum_{i=1}^{K}\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2}v_i u_i^{\mathrm{T}}\dot{t}+\sum_{i=K+1}^{R}\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2+\beta^2}v_i u_i^{\mathrm{T}}\dot{t} \quad (11.25)$$

其中的近似是因为式 (11.24) 使用的是估计值 $\hat{u}_i$。请注意 $K\leqslant R$；但哪怕输出奇异向量的估计不正确，$\lambda$ 也要保持非零值以保证满足映射 (11.24) 的条件。

同样地，对于由与最小奇异值相关的输入奇异向量生成的关节速度分量，可以施加附加的阻尼。因为这样的速度分量接近于零空间速度[11.22]。解的一般形式为

$$\dot{q}=(J_t^{\mathrm{T}}J_t+\lambda^2 I+\beta^2\sum_{i=k+1}^{N}\hat{v}_i\hat{v}_i^{\mathrm{T}})^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\dot{t} \quad (11.26)$$

式中，$\beta$ 只沿着 $N$-$K$ 个零空间速度分量的估计值 $\hat{v}_i$ 给出阻尼的最大分量。这也可以由下式来验证

$$\dot{q}\approx\sum_{i=1}^{K}\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2}v_i u_i^{\mathrm{T}}\dot{t}+\sum_{i=K+1}^{R}\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2+\beta^2}v_i u_i^{\mathrm{T}}\dot{t} \quad (11.27)$$

其中的近似也是因为式 (11.26) 使用了估计值 $\hat{v}_i$。同样，在这种情况下，即使输入奇异向量的估计不正确，$\lambda$ 也要保持非零值以保证满足映射 (11.26) 的条件。

对比式 (11.27) 和式 (11.25) 可以看出，在奇异向量估计精确的情况下，解 (11.24) 和解 (11.26) 相等。

### 11.3.3　关节轨迹重构

在求解一阶微分逆运动学时，可得到与给定的末端执行器任务速度曲线 $\dot{t}(t)$ 相应的关节速度曲线 $\dot{q}(t)$，但是，机器人运动控制器除了参考关节速度还需要参考位置轨迹。根据由末端执行器速度曲线 $\dot{t}(t)$ 得到的关节速度曲线重构出关节位置曲线，就实现了运动学求逆，这可以看成是一种逆运动学算法。

如果关节速度曲线完全确定（比如通过它的解析式确定），相应的关节位置曲线可以通过对时间积分来得到，即

$$q(t)=q(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{q}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (11.28)$$

不过，机器人控制系统的数字化实现使得得到关节速度的离散序列 $\dot{q}_k$ 更有可能，$\dot{q}_k$ 为 $t_k$ 时刻对计算得到的关节速度的采样，即

$$\dot{q}_k=\dot{q}(t_k)$$

由于这一原因，必须提出连续时间积分 (11.28) 的离散时间近似方法。

连续时间积分准确的离散时间近似通常需要在插值算法的复杂性和时间步长之间进行折中。在实时应用场合，比如机器人运动控制，高阶插值会造成大的时延，降低控制回路的动态性能。这种时延可以通过适当缩短时间步长来减少。无论如何，如果低阶插值也能得到可以接受的数字积分精度，时间步长也就足够短了。典型的情况是一阶插值，比如欧拉前向积分法把积分 (11.28) 转化为

$$q_k=q_0+\sum_{h=0}^{k-1}\dot{q}_h\Delta t \quad (11.29)$$

式中，$\Delta t$ 是时间步长。方程 (11.29) 一般写为更有效率的递推形式

$$q_k=q_{k-1}+\dot{q}_{k-1}\Delta t$$

不论使用哪种插值法，每一步数值积分都存在虽然很小但却避免不了的误差，误差还会累积，导致重构曲线与精确的关节位置曲线之间的长期漂移。影响所有积分重构方法的另一个误差源是关节位置初始值可能有误差。

克服这些问题的计算方法基于反馈修正项的使用，被称为闭环逆运动学（CLIK：closed-loop inverse kinematics）。例如一阶运动学的情况，$k$ 时刻关节速度可由下式计算（对比式 (11.12)）

$$\dot{q}_k=J_t^{\dagger}(q_k)\{\dot{t}_k+K[t_k-k_t(q_k)]\}+[I-J_t^{\dagger}(q_k)J_t(q_k)]\dot{q}_{0k} \quad (11.30)$$

式中，$K$ 是一个正定常数增益矩阵。

二阶 CLIK 算法也能用于求解关节位置、速度和

加速度[11.24,25]。CLIK 算法最初是在参考文献[11.26]和[11.27]中提出的，方法用雅可比的转置代替了伪逆，这可以显著减少计算量并可用于固有奇异点[11.28]。

## 11.4 冗余度求解的优化法

对于运动学冗余的机械臂，逆运动学问题可以有无穷多解，因此需要一个对解进行选择的指标。本节考虑在一阶微分运动学层次上的冗余度求解的优化法。在讨论关节速度计算的算法性策略之前，先简单回顾一下可能的性能指标。

### 11.4.1 性能指标

具有比完成给定任务所需自由度更多的自由度的能力，可以用于在运动过程中提高性能指标。这样的指标可能只依赖于机器人关节位形，或者还与速度或加速度有关。

在能够通过定义适当指标来追求的附加目标中，最重要的可能是避奇异。实际上，引入运动学冗余的一个主要原因就是要减少工作空间中，机械臂必须处于奇异位形才能达到的区域，这样的奇异位形被称为不可避奇异点。冗余机械臂中的可避和不可避奇异点的讨论可参见参考文献[11.29]。如果给定的末端执行器任务不经过不可避奇异点，原则上总是有可能算出一条关节轨迹，任务雅可比 $J_t$ 沿着这条轨迹是连续满秩的。为实现这一目标，可能的性能指标就是11.2.2节介绍的描述到奇异点距离的那些独立于位形的函数，即可操作性、条件数和 $J_t$ 的最小奇异值。在运动过程中使这些函数最大化（或保持尽可能大的值）是在运动中避开奇异位形的合理方案。

因为运动学求逆在奇异位形的邻域内会产生趋于无穷大的关节速度，一种概念上有所不同的方法就是最小化冗余度求解所生成的关节速度的范数。不过，只有当该范数在机械臂的所有运动中都最小化时，这种方法才能保证避开奇异点。范数的局部极小[11.10]对于避奇异没有任何实际意义[11.29]。

冗余度还可以用于使机械臂连杆机构避开一些不受欢迎的关节空间，比如机械性的关节限制，这是机器人机械臂典型存在的，可以通过最小化如下代价函数来避开[11.30]

$$H(q)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i-q_{i,\mathrm{mid}}}{q_{i,\max}-q_{i,\min}}\right)^2$$

式中，$[q_{i,\min},\ q_{i,\max}]$ 是关节 $i$ 的有效活动范围；$q_{i,\mathrm{mid}}$ 是该范围的中点。壁障是冗余度的另一项有意思的应用，它可以通过最小化适当的人工势场来实现，人工势场函数基于障碍区域在位形空间中的投影来定义[11.31,32]。

文献中还提出了很多其他的性能指标，其中一些将在11.6节和11.9节中提到。

### 11.4.2 局部优化

局部优化的最简单形式可以用伪逆解（11.13）来表示。它给出了满足任务约束的关节速度中范数最小的那个。显然，由局部最优解生成的关节运动不是机械臂所有可能的运动中速度最小的。这意味着，尽管局部最小化了关节速度，还是不能确保避开奇异[11.29]。

使用通解（11.12）的另一种可能方法是选取需要最小化的性能指标 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$，在它的反梯度方向上选取任意的关节速度 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$：

$$\dot{\boldsymbol{q}}_0=-k_H\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \tag{11.31}$$

式中，$k_H$ 是一个步长标量；$\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ 是指 $\boldsymbol{H}$ 在当前关节位形的梯度。这种方法可引出下面的冗余度求解方法[11.30]

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}_t^{\dagger}\dot{\boldsymbol{t}}-k_H(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_t^{\dagger}\boldsymbol{J}_t)\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \tag{11.32}$$

因为式（11.32）的第二项是 $\boldsymbol{H}$ 的反梯度在雅可比矩阵零空间中的投影，上式让人想起了约束最小化问题中的梯度投影法[11.33]。尤其是参考文献[11.34]显示，逆运动学解（11.32）在当前位形 $\boldsymbol{q}$ 处，最小化了完全二次方程

$$L(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}-k_H\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$$

因此，式（11.32）代表了性能指标 $\boldsymbol{H}$ 的无约束局部最小化（这将导致选取 $\dot{\boldsymbol{q}}=-k_H\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$），和通过最小范数关节速度来满足约束（11.2）之间的折中。

步长 $k_H$ 的选择对于冗余度求解算法（11.32）的性能非常关键。特别是，较小的步长值可能降低性能指标最小化的速度，但另一方面，较大的值甚至可能导致 $\boldsymbol{H}$ 反而增加（回想一下，反梯度只是局部的最快下降方向）。实际上，要为每个位形在适当的时间内确定一个 $k_H$ 值，可以使用简化的线搜索技术，比如 Armijo 规则[11.33]。

### 11.4.3 全局优化

冗余度解法（11.32）的主要优点是简单：如果 $\nabla \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ 和 $k_H$ 的计算是有效率的，它就是实时运动学求逆可以实际采用的一种方法。它的缺点在于优化

过程的局部性，这可能在较长时间的任务中造成不令人满意的性能，比如，使用式（11.32）时取 $\boldsymbol{H}=-\mu$（可操作性）将比简单的伪逆解表现更好，但还是不能保证避开奇异。

因此很自然地会去考虑在式（11.12）中对 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ 进行选择，以便最小化积分指标 $\int_{t_i}^{t_f}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\mathrm{d}t$ 的可能性。

该指标定义在整个任务的时间域 $[t_i, t_f]$ 上（比如随着运动对可操作性积分）。不幸的是，这个问题的解（自然地会表示为变分形式的式子）可能不存在，并且在任何情况下，通常都没有封闭形式。值得注意的是，使该问题必然可解的一种方法是在积分中加入关节速度或加速度的二次齐式。不过，这在二阶运动学层面上更容易实现（参见 11.6 节）。

## 11.5　冗余度求解的任务增广法

另一种冗余度求解的方法是增广任务向量以便处理表示为约束的附加目标。在本节中，将回顾用于求解一阶微分运动学方程（11.2）的基本的任务增广技术。

### 11.5.1　扩展雅可比矩阵

扩展雅可比技术是由 Baillieul[11.35] 提出、并在后来由 Chang[11.36] 再次提出的。这种方法在原始的末端执行器任务上添加适当数量的函数约束，从而可以在满足末端执行器任务的无穷多解中得出确定的一个。

考虑一个优化的目标函数 $g(\boldsymbol{q})$，并令 $\boldsymbol{N}_{J_t}(\boldsymbol{q})$ 为在非奇异位形 $\boldsymbol{q}$ 处张成 $\boldsymbol{J}_t$ 的零空间的矩阵，比如，

$$\boldsymbol{N}_{J_t}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_t^{\dagger}\boldsymbol{J}_t$$

可以验证，对于一个给定的 $\boldsymbol{t}_0$，如果 $\boldsymbol{q}_0$ 是这样一个位形，它使函数 $g(\boldsymbol{q})$ 在约束 $\boldsymbol{t}_0=\boldsymbol{k}_t(\boldsymbol{q}_0)$ 之下取得极值，则有

$$\left.\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}\boldsymbol{N}_{J_t}(\boldsymbol{q}_0)=0^{\mathrm{T}} \tag{11.33}$$

如果雅可比 $\boldsymbol{J}_t$ 满秩，秩为 $M$，则 $\boldsymbol{N}_{J_t}$ 的秩为 $N\text{-}M$。因此，方程（11.33）生成一组独立的 $N\text{-}M$ 个约束，可写为如下向量形式

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}$$

比如，可以通过逐个求梯度 $\partial g(\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q}$ 与 $N\text{-}M$ 个向量的标量积来得到，而这 $N\text{-}M$ 个向量是 $\boldsymbol{J}_t$ 零空间的一个基底，即

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})=\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{v}_{M+1}(\boldsymbol{q})\cdots\boldsymbol{v}_N(\boldsymbol{q}))\right)^{\mathrm{T}}$$

在这一点上，条件（11.33）意味着满足方程

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_t(\boldsymbol{q}_0)\\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_0\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

对于以 $\boldsymbol{t}_0$ 和位姿 $\boldsymbol{q}_0$ 为起始点的运动，通过在每个时刻都令 $g(\boldsymbol{q})$ 取极值来跟踪轨迹 $\boldsymbol{t}(t)$ 的运动，则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_t(\boldsymbol{q}(t))\\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}(t)\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

两边同时对时间求导可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_t(\boldsymbol{q}_0)\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{t}}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{11.34}$$

式中，左乘向量 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的矩阵是个方阵，被称为扩展雅可比 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{ext}}$ 矩阵。

因此，如果初始位形 $\boldsymbol{q}_0$ 使 $g(\boldsymbol{q})$ 取得极值，并假设 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{ext}}$ 不会奇异，则逆映射

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{ext}}^{-1}(\boldsymbol{q})\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{t}}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{11.35}$$

的时间积分可生成使 $g(\boldsymbol{q})$ 取极值的关节位形，从而跟踪给定的某端执行器轨迹 $\dot{\boldsymbol{t}}(t)$。

扩展雅可比方法相比于式（11.13）形式的伪逆法有一个主要的优点就是它是循环的（见 11.7 节）。此外，通过适当选取向量 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$，解（11.35）就可等价于解（11.12）[11.35,37]。

### 11.5.2　增广雅可比矩阵

另一种方法，即所谓的任务空间增广法，先引入一个与末端执行器任务一起执行的约束任务。然后，建立一个增广雅可比矩阵，由它的逆给出搜索到的关节速度解。Sciavicco、Siciliano[11.28,38,39] 和 Egeland[11.40] 分别独立提出了任务空间增广的概念，随后 Seraji 又在位形控制法的架构中再次提出这一概念[11.41]。

详细来说，考虑向量 $\boldsymbol{t}_c=(t_{c,1}\cdots t_{c,P})^{\mathrm{T}}$，它描述了需和 $M$ 维末端执行器任务 $\boldsymbol{t}$ 一起执行的附加任务。虽然完全利用冗余度意味着所考虑的附加任务要正好和冗余自由度一样多，即 $P=N\text{-}M$，一般情况下取 $P\leqslant N\text{-}M$。

关节空间坐标向量 $\boldsymbol{q}$ 和约束任务向量 $\boldsymbol{t}_c$ 之间的关系，可以考虑为正向运动学方程

$$\boldsymbol{t}_c=\boldsymbol{k}_c(\boldsymbol{q}) \tag{11.36}$$

其中 $\boldsymbol{k}_c$ 是一个连续的非线性向量函数。

因此，考虑如下映射是有益的

$$\dot{\boldsymbol{t}}_c = \boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{11.37}$$

该映射可由方程（11.36）微分得到。在式（11.37）中，$\dot{\boldsymbol{t}}_c$是约束任务速度向量，并且 $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{q}) = \partial \boldsymbol{k}_c / \partial \boldsymbol{q}$ 是 $P \times N$ 维的约束任务雅可比矩阵。

至此，增广任务向量可以通过拼接末端执行器任务向量和约束任务向量定义为

$$\boldsymbol{t}_a = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{t}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_t(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{k}_c(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix}$$

根据这一定义，寻找使 $\boldsymbol{t}_a$ 取某些期望值的关节位形 $\boldsymbol{q}$，就意味着同时满足末端执行器任务和约束任务。

这个问题的解可以通过在微分层面上反求下面的映射关系来得到

$$\boldsymbol{t}_a = \boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{11.38}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{J}_a = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_t \\ \boldsymbol{J}_c \end{pmatrix}$$

被称为增广雅可比矩阵。

一种约束任务向量的特殊选择是 $\boldsymbol{t}_c = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})$，其中 $\boldsymbol{h}$ 就像在11.5.1节中所描述的那样定义，这就可以使增广雅可比法包含了扩展雅可比法。

### 11.5.3　算法性奇异

在跟踪末端执行器之外定义附加目标增加了这样的可能性：存在使增广运动学问题奇异，而单纯的末端执行器任务运动学并不奇异的位形。这种位形因而被称为算法性奇异[11.35]。参见速度关系式（11.34）和式（11.38），算法性奇异位形使扩展雅可比矩阵和增广雅可比矩阵分别是奇异的，而 $\boldsymbol{J}_t$ 却是满秩的。

最初的任务增广冗余度解法提出之后，Baillieul指出算法性奇异点不是扩展雅可比方法特有的问题，但扩展雅可比法会造成约束任务与末端执行器任务的冲突[11.35,37]。这在简单情况下很容易理解，比如包含避障问题的轨迹跟踪的时候：如果期望轨迹经过一个障碍，那就要么跟踪轨迹，要么避开障碍，两个目标不可能同时实现。如果两种任务之间的冲突来源有一个清晰的含义，那么算法性奇异就有可能根据具体情况，通过机敏地定制约束任务来避免（例如，参考文献［11.23］）。在更一般的情况下，一些分析工具可能在寻找算法性奇异和指导约束函数的选取时有用[11.42]，或在寻找更好地调和两种任务的位形时有用[11.43]。

考虑式（11.2）和式（11.37）定义的任务，通过考虑它们的逆映射可以看到当有

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{J}_c^{\mathrm{T}}) \cap \mathfrak{R}(\boldsymbol{J}_t^{\mathrm{T}}) \neq \{\boldsymbol{0}\} \tag{11.39}$$

时，两种任务是冲突的，因此这是出现算法性奇异的条件。另一方面，当有

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{J}_c^{\mathrm{T}}) \cap \mathfrak{R}(\boldsymbol{J}_t^{\mathrm{T}}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

时，因为两个逆映射线性无关，两种任务是不冲突的。有一种任务不冲突的特殊情况是

$$\mathfrak{R}(\boldsymbol{J}_c^{\mathrm{T}}) \equiv \mathfrak{R}^{\perp}(\boldsymbol{J}_t^{\mathrm{T}}) \tag{11.40}$$

并且两个映射相互正交。

在算法性奇异点处，增广雅可比矩阵不可逆，但可以采用奇异点鲁棒技术。因为不存在精确解，会有重构误差，而且这对两种任务向量都会有影响。要抵消这个问题，参考文献［11.44，45］考虑用加权阻尼最小二乘法来对增广雅可比矩阵求逆。另一种不同的方法是所谓的任务优先级逆运动学。

### 11.5.4　任务优先级

在任务优先级策略框架下，是通过给期望任务分配适当的优先级，然后只在高优先级任务的零空间中去满足低优先级任务，来处理末端执行器任务与约束任务之间的冲突[11.46,47]。典型情况下，末端执行器任务被认为是主要任务，虽然有时它是次要任务[11.23]。该方法的思想是当精确解不存在时，重构误差只会影响低优先级的任务。

参见解（11.12），任务优先级方法计算出适当的 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$，以实现 $P$ 维的约束任务 $\dot{\boldsymbol{t}}_c$。值得注意的是，将 $\dot{\boldsymbol{q}}_0$投影到 $\boldsymbol{J}_t$ 的零空间保证了约束任务比末端执行器任务的优先级低，因为投影结果是一个零空间速度[11.48]。

当次要任务 $\dot{\boldsymbol{t}}_c$与主要任务 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 正交（即满足方程（11.40））时，关节速度

$$\dot{\boldsymbol{q}}_0 = \boldsymbol{J}_c^{\dagger}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{t}}_c \tag{11.41}$$

可以很容易地解决问题，而且主要任务速度映射式（11.2）的零空间速度也有了（即不需要 $\boldsymbol{N}_{J_t}$的投影项了）。不过，通常两类任务可能不冲突但也不是正交的，或者有冲突，不存在同时实现 $\dot{\boldsymbol{t}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{t}}_c$的关节速度解。方法与两种任务所定义的优先顺序相关，一种合理的选择是保证精确跟踪主要任务速度的同时，最小化约束任务速度的重构误差 $\dot{\boldsymbol{t}}_c - \boldsymbol{J}_c\dot{\boldsymbol{q}}$，因此给出[11.49]

$$\dot{q}_0 = [J_c(I - J_t^\dagger J_t)]^\dagger(\dot{t}_c - J_c J_t^\dagger \dot{t}) \quad (11.42)$$

最后，观察到零空间投影算子是幂等的厄密矩阵，所以式（11.12）和式（11.42）的解可以简化为[11.46]

$$\dot{q} = J_t^\dagger \dot{t} + [J_c(I - J_t^\dagger J_t)]^\dagger(\dot{t}_c - J_c J_t^\dagger \dot{t}) \quad (11.43)$$

可以验证，算法性奇异的问题还是存在。实际上，当条件（11.39）成立时，对于满秩的 $J_t$ 和 $J_c$，矩阵 $J_c$（$I - J_t^\dagger J_t$）也会降秩。不过，与任务空间增广法不同，只要主要任务雅可比矩阵满秩就可以得到正确的主要任务解。另一方面，在算法性奇异点之外，任务优先级方法给出的解和任务空间增广法是一样的。而接近算法性奇异点时，解的品质变坏，可能造成很大的关节速度。这个问题可以通过考虑有关矩阵的因子秩，并根据适当的阈值把矩阵当成奇异的，在一定程度上解决[11.46]。这样所得到的关节速度是有限大小的，前提是必须保证零空间分量的连续性。

另一种方法是放宽次要任务速度重构约束的最低限度，只去跟踪式（11.41）中不与主要任务冲突的部分[11.50,51]，即

$$\dot{q} = J_t^\dagger \dot{t} + (I - J_t^\dagger J_t) J_c^\dagger \dot{t}_c \quad (11.44)$$

这种解的一个直观依据可以这样得到：伪逆 $J_t^\dagger$ 和 $J_c^\dagger$ 分别用于求解各自任务速度的关节速度，然后把相应于约束任务（次要的）的关节速度投影到 $J_t$ 的零空间，以消除将引起与末端执行器任务（主要的）冲突的部分，最后把它和相应于末端执行器任务的关节速度叠加。其结果，解（11.44）有一个优良特性，即算法性奇异点与 $J_c$ 的奇异点是解耦的。

可以推断，解（11.44）的约束任务重构误差比解（11.43）的更大。这是在跟踪有冲突的任务时，使给出的关节速度轨迹光滑可行的代价。不过，对于可以在算法性奇异点之外修复次要任务跟踪误差的 CLIK 应用，解（11.44）更好。在这种情况下有

$$\dot{q} = J_t^\dagger \omega_t + (I - J_t^\dagger J_t) J_c^\dagger \omega_c$$

其中

$$\omega_t = \dot{t} + K_t(t - k_t(q))$$

$$\omega_c = \dot{t} + K_c(t_c - k_c(q))$$

## 11.6　二阶冗余度求解

在加速度级求解冗余度可以考虑机械臂运动过程的动力学性能。而且，得到的加速度曲线可以直接作为任务空间动力学控制器的参考信号（与相应的位置和速度信号一起）。但另一方面，二阶冗余度求解算法在计算量方面总是要求更高。

最简单的加速度级算法是式（11.15）中提出的，即给出实现任务约束（11.8）的最小范数解。与速度级伪逆解一样，这种局部优化解生成的关节运动无法在机械臂整个的运动过程中使加速度全局最小。不过值得注意的是，使用式（11.15）可在 $[t_i, t_f]$ 内最小化积分指标 $\int_{t_i}^{t_f} \dot{q}^T \dot{q} dt$，前提是满足适当的边界条件[11.52]，比如在端点自由的情况下（$t_i$ 和 $t_f$ 时刻的关节位置和速度都没有指定），需要满足的边界条件可以分开，并表示为

$$\dot{q}(\bar{t}) = J_t^\dagger \dot{t}(\bar{t}) \quad \bar{t} = t_i, t_f$$

因此，虽然解（11.15）表面上简单而优雅，实际上最小化上述积分代价需要求解一个两点边界值问题（TPBVP），这是个运算量很大的过程，对于实时运动学控制是不可行的。不过，对于工业调试中的离线冗余度求解，却是非常令人满意的。

通过考虑全部的二阶解（11.14），可以更灵活地选择（局部的或全局的）性能指标。将机械臂动力学模型表示为

$$\tau = H(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + \tau_g(q) \quad (11.45)$$

式中，$\tau$ 为驱动力矩向量；$H$ 为机械臂惯性矩阵；$c$ 为离心力/哥氏力项；$\tau_g$ 为重力项。取式（11.14）的零空间加速度为

$$\dot{q}_0 = -[H(I - J_t^\dagger J_t)]^\dagger \tilde{\tau} \quad (11.46)$$

其中

$$\tilde{\tau} = H J_t^\dagger(\ddot{t} - \dot{J}_t \dot{q}) + c + \tau_g$$

这可以局部最小化驱动力矩范数 $\tau^T \tau$[11.53]。这种特殊的冗余度求解方法对于短时间的任务表现很好，但在长时间的运行中可能会不稳定（更准确地说，是关节力矩会非常大），本质原因是零空间关节速度的增大。还要注意，式（11.46）中的矩阵积 $H(I - J_t^\dagger J_t)$ 是不满秩的，因此它的伪逆必须通过一个 SVD 过程来计算。整体上最小化关节力矩也是有可能的[11.54]，这种解显然避开了不稳定问题，但又需要求解一个 TPBVP。

另一种有趣的逆解如下

$$\ddot{q} = J_{t,H}^\dagger(\ddot{t} - \dot{J}_t \dot{q}) + (I - J_{t,H}^\dagger \dot{J}_t) H^{-1} c \quad (11.47)$$

从使用加权伪逆的角度来看，它是通解（11.14）的

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\,dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger} = H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_t H^{-1} J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_t G_t J_t = J_t$ 的一个 $N \times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q) \cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N \times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\,dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N \times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger} = H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N \times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t = J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i，t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\left(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\left(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\,\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_{t}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_t H^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T(J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i,t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{+}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{+}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{+}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_tH^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{+}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{+}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{+}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_t H^{-1} J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_t G_t J_t = J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\,\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\left(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{+}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{+}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{+}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\,\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i，t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_t H^{-1} J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_t G_t J_t = J_t$ 的一个 $N \times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t = J_t$ 的一个 $N \times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger} = H^{-1}J_t^{T}\left(J_t H^{-1} J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i,t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\left(J_{t}H^{-1}J^{T}_{t}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\left(J_{t}H^{-1}J_{t}^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{+}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{+}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{+}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_{t}^{T}\ (J_{t}H^{-1}J_{t}^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_{t}(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_{t}(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\,\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t}\qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\text{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger} = H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t}) = J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t = J_t$ 的一个 $N \times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如 11.8.3 节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}(J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\,\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\,(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7　循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8　超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1　刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^T\ (J_tH^{-1}J_t^T)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}\ (\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\dot{t} \qquad (11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t = J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{+}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{+}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{+}_{t,H}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{+}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}\ =G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\ (\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}\ (\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J^{T}_{t}\ (J_{t}H^{-1}J^{T}_{t})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J^{\dagger}_t$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\left(J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i, t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H} = H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_t H^{-1} J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}\,(\bar{t}) = J^{\dagger}_{t,H}\,\dot{t}\,(\bar{t}) \qquad \bar{t} = t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q} = G_t(q)\,\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_t G_t J_t = J_t$ 的一个 $N \times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q) = \mathrm{span}\{g_{t1}(q) \cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i, t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t}) \qquad \bar{t}=t_i, t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^T\left(J_tH^{-1}J_t^T\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^TH(q)\dot{q}dt$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\left(J_tH^{-1}J_t^{T}\right)^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{\mathrm{T}}\ (J_tH^{-1}J_t^{\mathrm{T}})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在$[t_i,\ t_f]$上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J_{t,H}^{\dagger}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J_{t,H}^{\dagger}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在［$t_i$，$t_f$］上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J_{t,H}^{\dagger}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t} \tag{11.48}$$

式中，$G_t$是任务雅可比矩阵$J_t$的任意一种广义逆，即满足$J_tG_tJ_t=J_t$的一个$N\times M$矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵$J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务$t(t)$在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令$g_{ti}(q)$表示$G_t$的第$i$列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于$J_t$的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是JPL蛇形机器人[11.56]，

轻微改动。详细地说，$J^{\dagger}_{t,H}$是惯性加权的任务雅可比伪逆，惯性矩阵满秩时可以表示为下式

$$J^{\dagger}_{t,H}=H^{-1}J_t^{T}\ (J_tH^{-1}J_t^{T})^{-1}$$

解（11.47）最小化了

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{1}{2}\dot{q}^{T}H(q)\dot{q}\mathrm{d}t$$

即机械臂动能在 $[t_i,\ t_f]$ 上的积分[11.52]。这又必须要用到正确的边界条件，比如端点自由时有

$$\dot{q}(\bar{t})=J^{\dagger}_{t,H}\dot{t}(\bar{t})\qquad \bar{t}=t_i,t_f$$

## 11.7 循环性

基于微分运动学的冗余度求解算法的共有缺点是缺少循环性（也称为可重复性）：通常，一个循环的任务空间轨迹对应的关节空间轨迹本身却不是循环的（即关节的最终位置和初始位置不一致）。这种现象显然是不希望的，因为这基本上意味着在反复重复周期性任务时，机械臂行为是不可预知的。

对于一类特殊的冗余度解法，存在一个循环性能否满足的数学条件[11.55]。特别地，考虑如下形式的任意解法

$$\dot{q}=G_t(q)\dot{t}\qquad(11.48)$$

式中，$G_t$ 是任务雅可比矩阵 $J_t$ 的任意一种广义逆，即满足 $J_tG_tJ_t=J_t$ 的一个 $N\times M$ 矩阵（式（11.13）中的伪逆矩阵 $J_t^{\dagger}$就是一种特殊的广义逆）。设给定任务 $t(t)$ 在任务空间的一个简单连通域中描述了一个循环轨迹，并令 $g_{ti}(q)$ 表示 $G_t$ 的第 $i$ 列。式（11.48）生成循环的关节轨迹的一个充要条件是，分布

$$\Delta G_t(q)=\mathrm{span}\{g_{t1}(q)\cdots g_{tM}(q)\}$$

是对合的（即，它对于李（Lie）括号操作是封闭的）。

需要强调的是，$\Delta G_t$ 的对合性是一个强条件，因为必须在所有位形都满足它。这意味着多数广义逆都不是循环的。还要注意，上述对于循环性的条件不仅取决于选取的广义逆（即伪逆、加权伪逆等），还取决于 $J_t$ 的形式，它又与机械臂的机械结构相关。这意味着循环性必须根据个体情况分别建立。

至于非（11.48）类的冗余度求解法，即通解（11.12）衍生的那些解法，通常都不是循环的。尤其是当局部优化法用于求解冗余度时，比如式（11.32），更是如此。值得注意的是，扩展雅可比法是一个例外，它总是循环的。

## 11.8 超冗余机械臂

研究运动学冗余时产生的一个自然问题就是：当关节数（而且因此冗余度数）远大于任务空间维数时会怎样，最终趋于无穷时会如何呢？自然界存在具有许多关节的串联刚性连杆系统的例子（比如蛇、哺乳动物和鱼的脊椎），这种生物学上的存在性证据启发和吸引了机器人研究者和设计者许多年。在这种兴趣之下发展出了几种特殊类型的冗余度机械臂，一起被称为超冗余度机械臂。本节对这个令人感兴趣的领域的基本问题和现状进行综述。

通常如果一个机械臂可控的位形（关节）空间自由度，比得上或超过了它的任务空间自由度，就被认为是超冗余的。（因此，七或八自由度的空间刚性杆机械臂一般不被认为是超冗余的。）超冗余机械臂提高了利用其额外的关节进行手臂抓持/操作，和在障碍密集区域机动的潜力。因此预期的应用包括拥挤环境下的工作（灾难救援、医疗应用等）。

就像所观察到的那样，（任何）冗余度的增加都将增加新的基本能力（自运动、子任务执行能力），所以直觉上认为增加大量的自由度有可能继续增加新的和复杂的行为。不过，详细观察发现，许多引起人兴趣的生物超冗余系统实际上只做相对有限的运动，由非常简单的算法控制。例如，（生物）蛇的脊椎有非常多的关节，然而蛇的运动是典型的由近似正弦曲线限定的运动，由简单的参数（幅度，频率）决定。因此，设计者和算法开发人员找到了许多关键性的简化，并用于了超冗余机械臂的开发，如11.8.3节的讨论。

在硬件开发方面，该领域发展出了两个主要方向：类脊椎动物的刚性杆设计和类无脊椎动物的连续体机械臂。本节下面的两个单元概述了这两个方向的历史和现状，随后讨论了超冗余机器人系统所需要的和所发展出的独特分析技术。总之，关键的问题是以这样或那样的形式处理复杂性。

### 11.8.1 刚性杆超冗余设计

按照从传统的串联刚性连杆机械臂（冗余或非冗余的）往上进化的逻辑，这一类超冗余度机械臂可能是最自然的。这种机器人的设计特色是有超级多的刚性杆结构的关节（通常是串联的）。这类机器人设备一个很好的早期实例是 JPL 蛇形机器人[11.56]，